This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Stanford University Libraries
3 6105 027 647 218

BRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFO
ITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STA
IES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNI
ORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIB
ANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSI
RSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARI
BRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFO
ITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STA
RIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNI
ORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIB
ANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSI
NIVERSITY LIBRARIES STANFORD UNIVERSITY LIBRARI
BRARIES NIVERSITY LIBRARIES STANFO

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

MATHESIS

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1993. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRETON

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VI. — JANVIER 1906.

(TOME XXVI DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1906

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRETON

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VI. — JANVIER 1906.

(TOME XXVI DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1906

ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME., (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS de 1881 à 1897, ensuite par G. MARIAUD de 1897 à 1901.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER etc. (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-332 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 332.

STANFORD LIBRARY
OCT 1960
MATHEMATICS

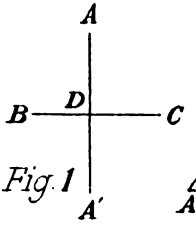


Fig. 1

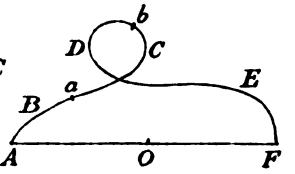


Fig. 2.

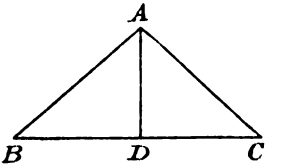


Fig. 3.

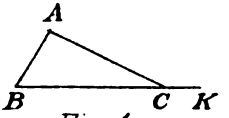


Fig. 4

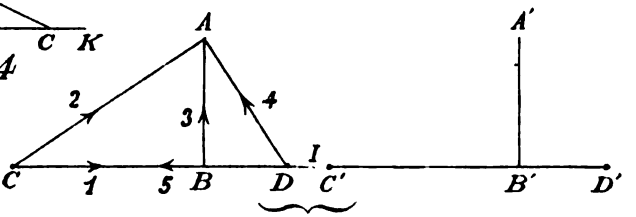


Fig. 6.

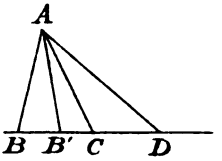


Fig. 5.

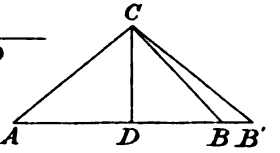


Fig. 7.

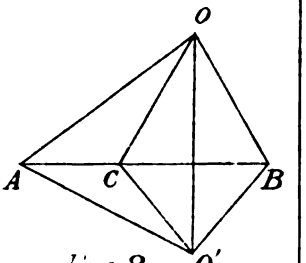


Fig. 8.

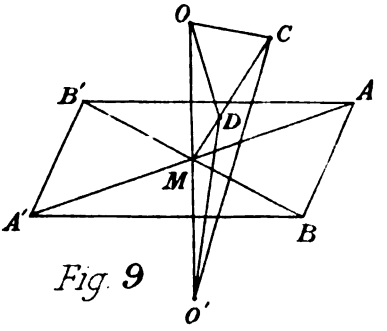


Fig. 9

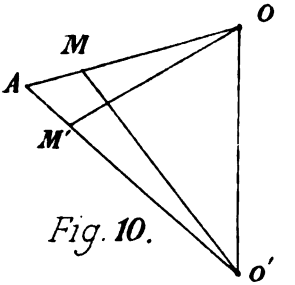


Fig. 10.

MATHESIS

LES PREMIERS PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE(*).

par M. De Tilly.

1. *Objet de cette note.* Dans le cours de ce travail, nous admettons sans discussion la définition de la droite donnée par Euclide (I, Déf. 4) et complétée par les postulats 1, 2 et 6(**). Nous n'examinons pas la question de savoir jusqu'à quel point ces postulats pourraient être démontrés. Le 6e ne le peut certainement pas. Cependant nous l'adoptons, excluant ainsi la géométrie riemannienne, pour ne pas augmenter la complication, déjà assez grande, des déductions qui vont suivre.

Pour la même raison de simplification, nous remplacerons le texte du postulat 6 par cet énoncé équivalent : la ligne droite est infinie. On peut constater l'équivalence dont il s'agit en démontrant que chacun des deux énoncés implique l'autre. Mais, quoique la double démonstration nécessaire à cet effet puisse être établie dès le début de la géométrie, elle n'entre pas dans le cadre de l'article élémentaire que nous écrivons aujourd'hui. C'est pourquoi nous nous bornons ici à *remplacer* le postulat 6 par celui de la droite infinie.

L'étude qui suit a pour objet principal de prouver que le postulat 4 (égalité des angles droits) et la définition 7 (existence du plan) peuvent être transformés rigoureusement en théorèmes, même dans l'ordre où nous les citons, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire de connaître le plan pour démontrer le postulat 4. Mais il faut invoquer constamment le principe de continuité, sans lequel on ne peut faire aucune géométrie, à moins d'augmenter outre mesure le nombre des postulats.

2. *Egalité des angles.* Un angle rectiligne est la figure formée par deux demi-droites supposées limitées à leur point d'intersection. Deux droites qui se coupent forment quatre angles. Deux angles sont dits

---

(*) Exposés rigoureusement et avec le nombre minimum de postulats, en admettant la définition de la droite donnée par Euclide.

(**) La ligne droite est celle qui repose également sur tous ses points (Déf. 4). De tout point on peut mener une droite à un autre point (Post. 1) et la prolonger au-delà de ce point (Post. 2). Deux droites ne peuvent enclore un espace (Post. 6). (*Réd.*).

égaux lorsqu'ils peuvent-être amenés en coïncidence (*). Mais l'égalité de deux angles exige quelques explications.

Lorsque nous disons que BAC = B'A'C', nous entendons d'abord que A et A' sont les lettres placées aux sommets, les autres lettres étant placées sur les côtés, et ensuite que, lors de la mise en coïncidence des angles, le côté B'A' coïncide avec BA et A'C' avec AC. Nous n'admettons pas à priori que la coïncidence puisse également s'obtenir par retournement de l'un des deux angles. Lorsque deux angles sont égaux, leurs adjacents le sont aussi. Cela résulte de la coïncidence même. Mais ici encore il faut remarquer que chaque angle a deux adjacents, et que les adjacents égaux s'obtiennent en prolongeant deux côtés homologues. De même, quand deux angles sont égaux, leurs opposés par le sommet sont aussi égaux, en ayant soin de conserver la correspondance des côtés homologues, mais il ne faut pas dire que deux angles opposés par le sommet sont égaux (avec ou sans retournement), car cela ne résulte pas directement de la coïncidence.

Toutes ces restrictions pourront être écartées à partir du n° 7.

3. *Premier cas d'égalité des triangles.* Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun et semblablement placés. Cette dernière restriction pourra être écartée à partir du n° 7.

4. *Définition de la perpendiculaire.* AD est perpendiculaire à BC (fig. 1) lorsque ADB = ADC. On peut écrire aussi BDA = CDA. De plus, la mise en coïncidence des angles montre que l'on a encore A'DB = A'DC, ou BDA' = CDA', c'est-à-dire que le prolongement de la perpendiculaire est aussi une perpendiculaire. Ces quatre égalités sont, jusqu'à présent, les seules que l'on puisse écrire pour cette figure.

Il n'est pas prouvé non plus qu'il n'y ait qu'une seule perpendiculaire de A sur BC, ni qu'il y en ait une, mais toute droite menée de A vers BC et qui n'est pas perpendiculaire à BC s'appellera oblique.

(*) Cette définition suppose la notion de l'*invariabilité des figures* (ou des intervalles des couples de points) pendant le déplacement de l'une d'elles, notion déjà comprise implicitement, d'ailleurs, dans la définition de la ligne droite. On peut aussi supprimer le déplacement et ne faire que de la géométrie instantanée. Mais alors l'invariabilité est remplacée par la congruence, ou l'égalité deux à deux de toutes les distances homologues.

5. *Inégalité de deux angles.* Pour continuer l'exposition de la géométrie, il faut posséder non seulement la notion de l'égalité des angles, mais aussi celle de leur inégalité, et du sens de cette inégalité.

Nous conviendrons que le plus petit de tous les angles est l'angle formé par une demi-droite avec elle-même et nous lui assignerons la valeur zéro ; nous conviendrons aussi que le plus grand de tous les angles est l'angle formé par une demi-droite avec son prolongement.

Entre ces deux limites, la convention de mesure pourra être arbitraire, pourvu qu'elle ne soit contradictoire ni en elle-même, ni avec les notions précédemment admises, ni avec le principe de la continuité géométrique. Voici le système de mesure que nous adopterons. Considérons une demi-droite OA (fig. 2) et faisons la tourner autour du point O jusqu'à ce qu'elle vienne s'appliquer sur son prolongement OF, l'extrémité A ayant décrit la ligne ABCDEF, qui ne rencontre la droite AOF qu'aux deux points A et F. Soit maintenant à comparer deux angles α et β.

Recommençons la rotation de OA autour de O, le point A décrivant la ligne ABCDEF jusqu'à ce que l'angle formé par la demi-droite mobile avec la demi-droite fixe OA devienne égal, une première fois (*), à l'angle α. Supposons que cela arrive quand le point A sera venu en a. Opérons ensuite de même pour l'angle β, ce qui nous fera trouver un second point b. Le point a se présentant avant le point b sur la ligne ABCDEF, on dira, par définition, que $\alpha < \beta$. On peut remarquer que ce mode de mesure n'est employé dans ce qui suit qu'implicitement, comme donnant un sens précis à la relation de grandeur entre deux angles.

6. *Propriétés du triangle isoscèle.* Soit ABC (fig. 3) un triangle isoscèle. Imaginons qu'un point D se meuve sur la base, de B en C. Au début du mouvement on a BAD (0) < CAD (CAB); à la fin, BAD (BAC) > CAD (0); donc, à cause de la continuité, il y a un point D, au moins, pour lequel BAD = CAD. L'égalité des deux

(*) *Une première fois*, car il ne faut pas supposer que l'angle variera toujours dans le même sens et qu'un même angle ne se répétera pas ; ces propositions, manifestement fausses quand la ligne ABCDEF est arbitraire parmi celles qui sont possibles (c'est-à-dire dont tous les points sont équidistants de O), ne pourraient même être démontrées, au point où nous en sommes, pour aucune forme particulière de cette ligne.

triangles partiels (n° 3) donne alors 1° ABD = ACD, 2° DB = DC, 3° ADB = ADC.

Ainsi, toute droite qui va du point A à la droite BC en formant des angles égaux avec AB et AC est une perpendiculaire au milieu de BC. Comme BC n'a qu'un seul milieu, il n'y a qu'une seule droite formant des angles égaux en A, mais il n'est pas encore prouvé qu'il n'y ait qu'une seule perpendiculaire.

Réciproquement, la médiane est une perpendiculaire et fait des angles égaux en A. Il ne faut pas dire : la perpendiculaire est une médiane, car nous ne savons pas encore s'il n'y a qu'une seule perpendiculaire. On pourrait dire : « l'une des perpendiculaires est une médiane ». Cette restriction sera écartée à partir du n° 10. Il ne faut pas dire non plus que la droite AD (perpendiculaire et médiane) est une bissectrice, ou qu'elle *divise* en deux parties égales l'angle A du triangle BAC, car nous ne savons pas si l'angle BAC est la somme des angles BAD, CAD. Nous ne savons pas même ce que c'est que la somme de deux angles.

7. *Retournement.* Remarque importante : quand on fait coïncider le triangle BAD avec le triangle CAD, on peut supposer que toute la figure suive, de manière que l'on fasse en même temps coïncider CAD de la figure déplacée avec BAD de la figure primitive. Cela résulte de ce que BDC est une ligne droite et DC = DB. Mais alors l'angle CAB de la figure déplacée coïncide avec BAC de la figure primitive, de même que la droite CB de la figure déplacée avec BC de la figure primitive. Donc tout angle et toute droite peuvent coïncider avec eux-mêmes par retournement et les restrictions introduites jusqu'ici dans la notion de leur égalité, notamment celles des n°s 2 et 3, deviennent maintenant sans objet. Ainsi, on peut nommer un angle en commençant par l'un ou l'autre des côtés; les angles opposés par le sommet sont égaux; dans l'égalité des triangles, on ne doit plus se préoccuper de la disposition relative des éléments égaux, etc.

8. *Perpendicularité réciproque.* La perpendicularité est réciproque, c'est-à-dire que si la droite AD est perpendiculaire à BC (fig. 1), réciproquement BC est aussi perpendiculaire à AD ou à AA'. En effet, on a ADB = ADC, et, en vertu du retournement, ADB = CDA. Or, faire coïncider ADB avec CDA revient à faire faire un quart de tour à la figure, ce qui prouve l'égalité de CDA avec A'DC ou avec CDA'.

Ainsi les quatre angles formés par AA' avec BC sont quatre angles

égaux entre eux. On les appelle angles droits. Nous démontrerons bientôt (n° 11) que tous les angles droits sont égaux entre eux.

9. *Existence de la perpendiculaire.* Par un point A, on peut mener une perpendiculaire à une droite donnée BC. Si le point A est sur la droite, on se servira d'une ligne semblable à ABCDEF (fig. 2) et on invoquera la continuité. On trouvera donc une infinité de perpendiculaires.

Supposons que le point A soit hors de la droite BC (fig. 4). Menons AB quelconque. Si, dans le voisinage de AB, il y a des obliques égales à AB, la perpendiculaire existera en vertu du n° 6. S'il n'y en a pas, les obliques à partir de AB doivent augmenter des deux côtés, ou diminuer des deux côtés, ou augmenter d'un côté et diminuer de l'autre(*). Dans les deux premiers cas, on aura dans le voisinage de AB deux obliques égales et entre elles une perpendiculaire (n° 6). Dans le troisième cas, plaçons-nous du côté où les obliques telles que AC diminuent. En marchant dans le sens CK, elles ne pourront pas continuer indéfiniment à diminuer, sans quoi dans le triangle BAC, deux côtés AB, AC, seraient tout au plus égaux à AB, tandis que le troisième côté BC grandirait indéfiniment (**). On trouvera donc un minimum de AC et dans le voisinage de ce minimum, deux obliques égales, d'où une perpendiculaire.

10. *La perpendiculaire est unique.* Par un point extérieur, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite donnée. Soit AB (fig. 5) une perpendiculaire. Supposons qu'il puisse en exister une seconde AB'. Portons B'C = BB' et tirons AC. Les triangles AB'B et AB'C sont égaux (n° 3), donc C = B et AC = AB.

L'angle en C est donc égal à B et les deux angles en C sont égaux. Supprimons la perpendiculaire AB' (qui fait aussi des angles droits, mais d'autres peut-être, car nous n'avons pas encore prouvé que *tous* les angles droits sont égaux) et répétons de même le triangle ACB, à droite de AC, en ACD, on aura encore AD = AB, et D = B = C.

Continuant ainsi, on aurait une suite de triangles dans lesquels deux côtés (AB, AC; AB, AD) resteraient toujours égaux à AB, tandis que le troisième côté (BC, BD) grandirait indéfiniment. Ce fait étant impossible, il en résulte qu'on ne peut mener, par le point A, qu'une seule perpen-

(*) Ce raisonnement n'exclut pas le cas où les augmentations et les diminutions seraient entremêlées.

(**) Si deux côtés d'un triangle sont limités, le troisième ne peut croître indéfiniment. Cette notion primordiale, complètement indépendante du n° 19, est employée trois fois (n°s 9, 10 et 12).

diculaire à la droite BCD. Cela supprime une restriction du n° 6.

11. *Égalité des angles droits.* Tous les angles droits sont égaux entre eux. Soit AB (fig. 6) perpendiculaire à CD, et A'B' à C'D'. On a ABC = ABD, A'B'C' = A'B'D'; mais il faut démontrer que ABC = A'B'C', ou ABD = A'B'D'. Sur BA, BC, BD, prenons trois points A, C, D. Considérons une droite mobile, couchée dans sa position initiale sur CBD (flèche 1) et faisons tourner cette droite mobile autour de C, jusqu'en CA (flèche 2), son point d'intersection avec BA s'élevant de B en A. L'angle formé par la droite mobile (sens de la flèche) et la droite fixe CBD variera par continuité depuis zéro jusqu'à ACB. A partir de ce moment. faisons tourner la droite autour de A (son point d'intersection avec CBD fixe se déplaçant de C en D), jusqu'à la position AD (flèche 4) en passant par la position AB (flèche 3). L'angle formé par la droite mobile (sens de la flèche) avec la droite fixe CBD variera par continuité depuis ACB jusqu'à ADI, en passant par ABI. Enfin faisons tourner la droite autour de D, son point d'intersection avec AB s'abaissant de A en B, jusqu'à la position DB (flèche 5). L'angle formé par la droite mobile (sens de la flèche) avec la droite fixe CBD variera par continuité depuis ADI jusqu'au maximum, c'est-à-dire jusqu'à l'angle formé par une demi-droite avec son prolongement.

Ainsi, en résumé, l'angle de la droite mobile avec la droite fixe aura varié, dans l'ensemble du mouvement, depuis zéro jusqu'au maximum. Donc, à cause de la continuité, il faut que la droite mobile (sens de la flèche) ait fait. dans l'une au moins de ses positions (que nous appellerons Δ), un angle exactement égal à A'B'D' avec la droite fixe CBD.

Leurs adjacents étant aussi égaux, l'égalité A'B'D' = A'B'C' montre que l'angle de Δ avec CBD est égal à son adjacent, c'est-à-dire que Δ est une perpendiculaire à CBD. Dès lors cette position Δ de la droite mobile, formant avec CBD l'angle A'B'D' ne peut être que AB, car la position initiale et la position finale, loin d'être perpendiculaires à CD, coïncident avec cette droite; et dans toutes les positions autres que CB, DB et AB, la droite mobile coupe AB en un point situé au-dessus de B, et ne peut par conséquent être perpendiculaire à CBD (n° 10). Donc enfin les angles droits A'B'D' et ABD peuvent coïncider (*).

(*) Nous avons tenu à démontrer le plus tôt possible ce théorème 11 qui complète les notions de la perpendiculaire et de l'angle droit. Nous aurions pu aussi établir d'abord les propositions 12, 13 et 19 qui en sont indépendantes et alors la démonstration de 11 aurait été simplifiée.

12. *Perpendiculaires et obliques.* Toute perpendiculaire est plus courte que les obliques menées du même point à la même droite ; deux obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire sont égales ; et de deux obliques s'écartant inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus grande.

En effet, quand on s'éloigne de la perpendiculaire, on ne peut jamais rencontrer ni maximum ni minimum, sans quoi dans le voisinage de ce maximum ou de ce minimum, il y aurait deux obliques égales, donc une perpendiculaire (n° 6), ce qui est impossible (n° 10). Donc les obliques doivent augmenter toujours ou diminuer toujours. Mais, dans ce dernier cas, on aurait une suite de triangles ayant deux côtés tout au plus égaux à la perpendiculaire, et dont le troisième côté augmenterait indéfiniment, ce qui est impossible.

Combinant ce qui précède avec le n° 3. pour le cas où les obliques seraient situées de part et d'autre de la perpendiculaire, on voit que toutes les parties de l'énoncé sont établies.

13. *Perpendiculaire sur le plus grand côté.* Si, dans un triangle, on abaisse sur le plus grand côté une perpendiculaire du sommet opposé, son pied tombera entre les deux autres sommets.

Soit AB (fig. 7) le plus grand côté du triangle ABC (sans exclure le cas de l'égalité). Si la perpendiculaire abaissée de C sur AB tombait en dehors de AB, par exemple en B′, on aurait AB′ (perp., n° 8) < AC (oblique) et a fortiori AB < AC, ce qui est contre l'hypothèse. Donc le pied de la perpendiculaire doit tomber entre A et B.

14. *Second cas d'égalité des triangles.* Deux triangles qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun ont aussi les trois angles opposés égaux et sont égaux dans toutes leurs parties. Soit ABC l'un des triangles donnés. Du point C, opposé au plus grand côté, abaissons sur AB la perpendiculaire CD. dont le pied D tombera entre A et B (n° 13). Exécutons la même construction sur le second triangle A′B′C′. Nous avons d'abord CD = C′D′, car si l'on avait par exemple CD < C′D′, il faudrait par compensation, pour que AC pût être égal à A′C′, que AD fût plus grand que A′D′, à cause des propriétés des perpendiculaires et des obliques ; de même pour que BC pût être égal à B′C′, il faudrait que DB fût plus grand que D′B′ ; donc, en ajoutant, on aurait AB > A′B′, ce qui est contre l'hypothèse de l'énoncé. Si l'on supposait CD > C′D′, le raisonnement serait le même. Donc CD = C′D′ et alors, à cause des obliques égales

AC, A'C', on a AD = A'D', et de même DB = D'B'. Il en résulte qu'en superposant les deux angles droits D et D', on amène la coïncidence de tout le triangle A'B'C' avec ABC.

15. *Droite équidistante de deux points.* Si deux points A et B d'une droite (fig. 8) sont l'un et l'autre équidistants de deux points O et O' de l'espace, tous les autres points de la droite sont aussi équidistants de O et de O'.

Soit OA = O'A, OB = O'B. Le troisième point C peut être pris entre B et A, ou en dehors de BA, mais le raisonnement est le même. Les triangles OAB, O'AB, sont égaux comme ayant les trois côtés égaux (n° 14), donc l'angle OBC est égal à l'angle O'BC. Alors les triangles OBC, O'BC, sont égaux (n° 3), donc OC = O'C.

Remarque. Si l'un des points A et B était le milieu de OO', la démonstration se simplifierait.

16. *Génération du plan.* Sur toute ligne allant de O en O' doit exister, à cause de la continuité, au moins un point équidistant de O et de O'. Soient A et B (fig. 9) deux points semblables. M étant le milieu de OO', tous les points de MA et de MB jouissent de la propriété d'être équidistants de O et de O' (n° 15). Portons MA = MB = MA' = MB', et tirons les droites AB, BA', A'B', B'A. Ces quatre droites jouissent aussi de la propriété que tous leurs points sont équidistants de O et de O'. Enfin prenons une demi-droite infinie MA et faisons-la tourner autour du point fixe M en l'appuyant sur le cadre ABA'B'. Elle décrira ainsi une surface infinie dans tous les sens, et dont tous les points seront équidistants de O et de O'. C'est cette surface que nous appellerons le *plan*.

17. *Lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés.* En dehors du plan dont nous venons de définir la génération, il ne peut exister dans l'espace aucun point équidistant de O et de O'.

Soit C (fig. 9) un pareil point. Joignons-le au point M. Tous les points de MC seraient équidistants de O et de O' (n° 15). Tirons OC, O'C, et considérons la ligne brisée OCO' dans ses diverses formes et positions, pendant que le point C se rapproche indéfiniment de M, en parcourant la droite CM. Le point C ne pourra, dans ce mouvement, rencontrer le plan ABA'B' qu'en arrivant en M, car sans cela MC aurait deux points dans le plan et coïnciderait avec l'une des positions de la génératrice MA, donc le point C lui-même serait dans le plan, ce qui est contraire à

l'hypothèse. Mais il faudra qu'un autre point de la ligne brisée OCO′ se trouve dans ce plan, si pas depuis la position initiale OCO′ (ce que nous ne pouvons encore démontrer), du moins *avant* la position finale OMO′, à cause de la continuité (*).

Soit ODO′ la ligne brisée correspondante. L'une des droites DO, DO′, rencontrerait donc le plan en un point D′ différent de D ; mais dès lors elle aurait deux points (D et D′) équidistants de O et de O′. Il en serait donc de même de tous ses points (n° 15), ce qui est absurde, puisqu'elle contient soit O soit O′.

Donc le plan, tel que nous l'avons engendré, est le lieu géométrique de tous les points de l'espace équidistants de O et de O′.

Il ne faudrait pas dire, à propos de ce mode de génération, qu'il suffirait de faire tourner MA autour de OO′, sans avoir besoin de l'appuyer sur le cadre ABA′B′, car on ne sait pas si MA reviendrait à sa position primitive après un tour complet ; on ne sait pas même ce que c'est qu'un tour complet. Mais réciproquement on peut dire que *maintenant* ce retour à la position primitive est démontré, car MA tournant autour de OO′ resterait toujours perpendiculaire au milieu de OO′, donc aurait tous ses points équidistants de O et de O′ (n° 12). Tous ses points seraient donc dans le plan (n° 17) et dès lors, la rotation se faisant dans le plan, la notion du tour complet devient entièrement claire.

18. *Droite qui a deux points dans un plan.* Toute droite qui a deux points dans le plan s'y trouve tout entière. En effet, ces deux points seront équidistants de O et de O′ (n° 16), donc tous les points de la droite seront équidistants de O et de O′ (n° 15), donc ils seront dans le plan (n° 17).

19. *Un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres* (**). Il suffit de démontrer la proposition pour le plus grand côté. Or, la perpendiculaire abaissée sur ce côté du sommet opposé, le divisera en deux segments (n° 13), dont chacun sera plus petit, à cause des propriétés des perpendiculaires et des obliques, que l'un des deux autres côtés du triangle.

(*) Si une droite déterminée perce une surface déterminée, toute ligne se rapprochant *autant qu'on le veut* de cette droite percera aussi la surface.

(**) Ce théorème, que nous aurions pu démontrer depuis longtemps, ne sert en réalité qu'à établir le n° 20, lequel complète la notion du plan.

20. *Division de l'espace en deux régions.* Le plan divise l'espace en deux régions déterminées O et O′, telles qu'on ne peut passer de l'une dans l'autre sans traverser le plan.

Soit A (fig. 10) un point quelconque de l'espace en dehors du plan. Menons la ligne brisée OAO′. Sur cette ligne existe, en vertu de la continuité, un point M équidistant de O et de O′. Mais il ne peut en exister un second M′. En effet, les deux points M, M′, ne pourraient se trouver tous les deux sur OA par exemple, car alors tous les points de OA seraient équidistants de O et de O′ (n° 15), ce qui est absurde. De même pour O′A.

Il devrait donc y avoir un point sur OA et un sur O′A. La figure donnerait alors (n° 19) :

$$\begin{array}{llll} AO' < AM + MO', & \text{ou} & < AM + MO, & \text{ou} \quad < AO, \\ AO < AM' + M'O & \text{ou} & < AM' + M'O', & \text{ou} \quad < AO'; \end{array}$$

ce qui est contradictoire.

Donc l'un des segments AO, AO′, ne rencontre pas le plan. Si c'est AO, par exemple, nous disons, par définition, que A est du côté O.

Si A est du côté O et B du côté O′, le segment AB doit couper le plan, car sans cela, AO et BO′ ne le coupant pas non plus par définition, on aurait une ligne complète OABO′ allant de O et O′ et ne rencontrant pas le plan, donc n'ayant aucun point à égale distance de O et de O′ (n° 17) ce qui est impossible, à cause de la continuité.

On voit, en même temps, que tous les points situés du côté O sont plus près de O que de O′ et réciproquement.

×PROPRIÉTÉS DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE,

par J. Neuberg.

1. Soit ABCD un quadrilatère convexe, inscrit dans la circonférence O. Désignons par D′, D'_a, D'_b, D'_c les centres du cercle inscrit au triangle ABC et des cercles exinscrits, respectivement opposés aux sommets A, B, C; de même, par A′, A'_b, A'_c, A'_d les centres du cercle inscrit au triange BCD et des cercles exinscrits, respectivement opposés aux sommets B, C, D; et ainsi de suite pour les triangles ABD, ACD.

Les rayons des mêmes cercles seront représentés par δ', δ'_a, δ'_b, δ'_c, a', a'_b, ...

D'après un théorème proposé dans les *Archives de Grunert*, 1842, p. 328 et démontré dans la NCM, t. I, p. 199, *les points* A', B', C', D' *sont les sommets d'un rectangle* dont les côtés sont parallèles aux bissectrices des angles des diagonales du quadrilatère.

Ce théorème a été complété par M. L. (Lemoine?) de la manière suivante : *Les centres des seize cercles inscrits ou exinscrits sont les intersections de quatre droites parallèles à la bissectrice de l'angle aigu des diagonales du quadrilatère* ABCD *et de quatre droites parallèles à la bissectrice de l'angle supplémentaire*. La démonstration de cette dernière proposition n'a été donnée, ni dans la NCM qui l'a proposée (t. IV, p. 223), ni dans *Mathesis*.

Le théorème chinois dont il a été question dans *Mathesis* 1905, p. 264 signale la relation $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. On peut déduire celle-ci ainsi que d'autres formules analogues, de la disposition des centres des cercles.

Il nous a paru intéressant de développer ici ces diverses questions.

2. Appelons L, M, N, P les milieux des arcs AB, BC, CD, DA, la circonférence étant parcourue dans le sens ABCD. Les bissectrices $C'D'_c$, $DC'C'_d$ des angles ACB, ADB se coupent en L, et l'on a $LA = LC' = LD' = LC'_d = LD'_c$; par suite, les points C', D', C'_d, D'_c sont les sommets d'un rectangle dont les côtés C'D', $D'_cC'_d$ sont perpendiculaires à la bissectrice LN de l'angle DLC, droite parallèle à la bissectrice de l'angle AQB, Q désignant l'intersection des diagonales. On peut encore dire que les côtés du rectangle $C'D'C'_dD'_c$ sont parallèles aux droites MP, LN.

De même, les couples de triangles qui ont pour côté commun BC, CD ou DA conduisent à trois autres rectangles $A'D'A'_dD'_a$, $A'B'A'_bB'_a$, $B'C'B'_cC'_b$ dont les côtés sont parallèles à LN ou à MP.

Il résulte de là que les systèmes de points (B', C', D'_c, A'_b), (A', D', C'_d, B'_a) sont situés sur deux parallèles à LN, et les systèmes (A', B', C'_b, D'_a), (C', D', A'_d, B'_c) sur deux parallèles à MP.

La bisectrice $C'_bC'_a$ du supplément de l'angle ADB passe par le point L' diamétralement opposé au point L sur la circonférence O, et l'on a $L'C'_b = L'C'_a = L'A = L'B$. Semblablement la droite $D'_aD'_b$ passe par L', et $L'D'_a = L'D'_b = L'A$. On en conclut que les points C'_b, D'_a, C'_a, D'_b sont les sommets d'un rectangle dont les côtés sont parallèles ou perpendi-

laires à la bissectrice de l'angle DL'C, c'est-à-dire parallèles à MP ou à LN. De là, et par analogie, on déduit le tableau suivant :

B'	A'	D'_a	C'_b
C'	D'	A'_d	B'_c
D'_c	C'_d	B'_d	A'_a
A'_b	B'_a	C'_a	D'_b

qui indique la situation de 16 centres : Les points d'une même horizontale sont sur une parallèle à MP, ceux d'une même verticale sur une parallèle à LN.

3. Les diagonales du rectangle A'B'C'D' ont des directions symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BQ'C ; par suite, l'angle de A'C' avec une perpendiculaire à BD est égal à l'angle de B'D' avec une perpendiculaire à BD, et la projection de A'C' sur une perpendiculaire à BD est égale à celle de B'D' sur une perpendiculaire à BD. De là, on conclut aisément, en considérant les rayons des cercles A', B', C', D' perpendiculaires à l'une des diagonales BD, AC,

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

Le même raisonnement appliqué aux rectangles $A'_bB'_aC'_dD'_c$, $C'_bD'_aA'_dB'_c$, $A'_cB'_dC'_aD'_b$ établit les formules :

$$\alpha_b + \gamma_d = \beta_a + \delta_c, \quad \gamma_b + \alpha_d = \delta_a + \beta_c, \quad \alpha_c + \gamma_a = \beta_d + \delta_b.$$

4. Appelons $2l$, $2m$, $2n$, $2p$ les arcs AB, BC, CA, AB, et R le rayon du cercle O. On trouve facilement :

$C'D' = 2LC' \sin n = 2LA \sin n = 4R \sin l \sin n,$

$A'D' = 4R \sin m \sin p,$

$C'_bD'_a = 2L'C'_b \cos n = 2L'A \cos n = 4R \cos l \cos n,$

$A'_bD'_c = 4R \cos m \cos p.$

Les deux premières formules ont été signalées par Catalan.

Les rectangles A'B'C'D', $A'_bB'_aC'_dD'_c$, $C'_bD'_aA'_bB'_c$, $A'_cB'_dC'_aD'_b$ ont pour surfaces :

$16R^2 \sin l \sin m \sin n \sin p$, $\quad 16R^2 \sin l \cos m \sin n \cos p,$

$16R^2 \cos l \sin m \cos n \sin p$, $\quad 16R^2 \cos l \cos m \cos n \cos p.$

5. Les droites LN, MN sont également parallèles aux bissectrices des angles de deux côtés opposés (AD, BC) ou (AB, CD). Par suite, si l'on considère le rectangle $A'B'D'_cB'_d$, l'angle de la diagonale $B'C'_d$ avec une

perpendiculaire à AD est égal à l'angle de $A'D'_c$ avec une perpendiculaire à BC, et la projection de $B'C'_d$ sur la première perpendiculaire est égale à celle de $A'D'_c$ sur la seconde perpendiculaire. En menant les rayons des cercles B', C'_d perpendiculaires à AD et les rayons des cercles A', D'_c perpendiculaires à BC, on trouve la relation :

$$\gamma_d - \beta = \delta_c - \alpha \quad \text{ou} \quad \alpha - \beta = \delta_c - \gamma_d.$$

On pourrait obtenir des relations analogues au moyen des rectangles $A'D'_cB'_dC'_d$, $A'B'_aC'_cD'_a$, etc.

●. Steiner a considéré les cercles tritangents aux côtés des triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet pris trois à trois (*Œuvres complètes*, t. I, p. 223; *Annales de Gergonne*, XVIII, p. 302). Une démonstration des propriétés assez curieuses signalées par le grand géomètre allemand est due à Mention (NAM, 1862, pp. 16 et 65).

×NOTE MATHÉMATIQUE.

×1. *Identités trigonométriques*, par M. E. Barbette. Pour que l'une des égalités

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{bd} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{c-a}{bd}$$

existe, il faut et il suffit que l'on ait respectivement :

$$\frac{a}{c} = \frac{b-1}{d-1} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{c} = \frac{b+1}{d+1}.$$

Cette condition étant vérifiée si on a simultanément

$$\begin{cases} b \mp a = 1, \\ d \mp c = 1, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -b \mp a = 1, \\ -d \mp c = 1, \end{cases} (*)$$

le principe précédent donne immédiatement quelques identités remarquables :

1° De la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, nous tirons

$$\frac{\sin^2 p}{\cos^2 p} - \frac{\sin^2 q}{\cos^2 q} = \frac{\sin^2 p - \sin^2 q}{\cos^2 p \cos^2 q},$$

$$\frac{\cos^2 p}{\sin^2 p} - \frac{\cos^2 q}{\sin^2 q} = \frac{\cos^2 p - \cos^2 q}{\sin^2 p \sin^2 q}.$$

(*) p et q étant quelconques, on a les identités :

$$\frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1} = \frac{p-q}{(p+1)(q+1)} \quad \text{et} \quad \frac{p}{p-1} - \frac{q}{q-1} = \frac{q-p}{(p-1)(q-1)}.$$

2° De la relation $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$, nous déduisons

$$\frac{\operatorname{tg}^2 p}{\sec^2 p} - \frac{\operatorname{tg}^2 q}{\sec^2 q} = \frac{\operatorname{tg}^2 p - \operatorname{tg}^2 q}{\sec^2 p \sec^2 q},$$

$$\frac{\sec^2 p}{\operatorname{tg}^2 p} - \frac{\sec^2 q}{\operatorname{tg}^2 q} = \frac{\sec^2 q - \sec^2 p}{\operatorname{tg}^2 p \operatorname{tg}^2 q}.$$

3° La relation $\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x = 1$ donne

$$\frac{\operatorname{cotg}^2 p}{\operatorname{cosec}^2 p} - \frac{\operatorname{cotg}^2 q}{\operatorname{cosec}^2 q} = \frac{\operatorname{cotg}^2 p - \operatorname{cotg}^2 q}{\operatorname{cosec}^2 p \operatorname{cosec}^2 q},$$

$$\frac{\operatorname{cosec}^2 p}{\operatorname{cotg}^2 p} - \frac{\operatorname{cosec}^2 q}{\operatorname{cotg}^2 q} = \frac{\operatorname{cosec}^2 q - \operatorname{cosec}^2 p}{\operatorname{cotg}^2 p \operatorname{cotg}^2 q}.$$

4° De la relation $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$, on conclut

$$\frac{\cos p}{2 \sin^2 \frac{p}{2}} - \frac{\cos q}{2 \sin^2 \frac{q}{2}} = \frac{\cos p - \cos q}{4 \sin^2 \frac{p}{2} \sin^2 \frac{q}{2}},$$

$$\frac{\sin^2 \frac{p}{2}}{\cos p} - \frac{\sin^2 \frac{q}{2}}{\cos q} = \frac{\sin^2 \frac{p}{2} - \sin^2 \frac{q}{2}}{\cos p \cos q}.$$

5° La relation $2 \cos^2 \frac{x}{2} - \cos x = 1$ donne de même

$$\frac{\cos p}{2 \cos^2 \frac{p}{2}} - \frac{\cos q}{2 \cos^2 \frac{q}{2}} = \frac{\cos p - \cos q}{4 \cos^2 \frac{p}{2} \cos^2 \frac{q}{2}},$$

$$\frac{\cos^2 \frac{p}{2}}{\cos p} - \frac{\cos^2 \frac{q}{2}}{\cos q} = \frac{\cos^2 \frac{q}{2} - \cos^2 \frac{p}{2}}{\cos p \cos q}.$$

6° Des relations $2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin x = 1$ ou $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \sin x = 1$, nous déduisons

$$\frac{\sin p}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right)} - \frac{\sin q}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{q}{2}\right)} = \frac{\sin p - \sin q}{4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{q}{2}\right)},$$

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right)}{\sin p} - \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{q}{2}\right)}{\sin q} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{q}{2}\right)}{\sin p \sin q};$$

$$\frac{\sin p}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)}-\frac{\sin q}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{q}{2}\right)}=\frac{\sin p-\sin q}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{q}{2}\right)},$$

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)}{\sin p}-\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{q}{2}\right)}{\sin q}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{q}{2}\right)}{\sin p\sin q}.$$

Des identités analogues découlent des relations suivantes :

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\sin x=1,$$

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin x=1,$$

$$\sin x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\cos x=1,$$

$$(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x=1,\ \text{etc.}$$

BIBLIOGRAPHIE.

1. **Œuvres de Charles Hermite**, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par Emile Picard, Membre de l'Institut. Tome I. Paris, Gauthier-Villars, 1905. (Grand in-8° de XL-500 pages, avec un portrait). Prix : 18 fr.

2. **Correspondance d'Hermite et de Stieltjes**, publiées par les soins de B. Baillaud et H. Bourget, avec une préface de Emile Picard, membre de l'Institut. Deux volumes grand in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1905. (Grand in-8° de XX-477 pp. et VI-457 pp. avec deux portraits d'Hermite et un de Stieltjes). Prix : 32 frs.

1. « L'œuvre d'Hermite se trouve dispersée dans un grand nombre de journaux scientifiques français et étrangers; elle grandira encore quand elle se trouvera rassemblée et qu'on pourra ainsi mieux juger de sa belle unité. A peu d'exceptions près, les Mémoires sont courts. La marche générale des idées y est toujours mise avec évidence; mais, surtout dans la première partie de la carrière d'Hermite, la rédaction se présente sous une forme synthétique, et le soin d'établir de nombreuses propositions intermédiaires, dont l'énoncé seul est indiqué, est laissé à la charge du lecteur. Quel fructueux exercice que la lecture d'un de ces mémoires fondamentaux pour l'étudiant bien doué qui cherche à en rétablir tous les détails. » (Picard).

Le premier volume des œuvres d'Hermite contient quarante notes ou mémoires publiés par le grand géomètre de 1842 à 1858 (voir Mathesis, 1901, Supplément, n° 1 à 33, les titres de la plupart de ces écrits d'Hermite avec une indication sommaire de leur objet). M. Picard a publié en tête du volume l'admirable leçon qu'il a faite à la Sorbonne en 1901, sur l'œuvre scientifique de son beau-père.

2. Thomas-Jean Stieltjes, né à Zwolle, le 29 décembre 1856, est mort à Tou-

louse le 31 décembre 1894. Il avait été attaché à l'observatoire de Leyde de 1877 à 1883. L'importance de ses recherches, de 1883 à 1885, le firent nommer docteur *honoris causa* de l'Université de Leyde et membre de l'Académie d'Amsterdam. N'ayant pu obtenir une chaire d'analyse infinitésimale à Groningue, Stieltjes vint s'établir à Paris, en 1885, y conquit le grade de docteur en 1886; il fut la même année nommé à l'Université de Toulouse chargé de cours, puis trois ans après, titulaire pour la chaire de calcul différentiel et de calcul intégral. Il ne l'occupa que quelques années. Avant de mourir, il put achever un mémoire sur les fractions continues algébriques qui est son œuvre capitale.

Stieltjes a entretenu avec Hermite pendant douze ans une correspondance assidue qui est publiée aujourd'hui et où les deux géomètres, le maître éminent et le disciple digne du maître, s'occupent des questions les plus ardues de l'analyse et de la théorie des nombres. Nous ne pouvons évidemment en donner une analyse dans *Mathesis*, mais nous devions la signaler. Cette correspondance, dit M. E. Picard, « n'intéressera pas que les analystes. En même temps que deux géomètres de premier ordre, on y voit deux beaux caractères. Quelle simplicité et quelle franchise entre le maître et le disciple, ou plutôt entre les deux amis! Quelle confiance affectueuse chez l'un et chez l'autre! On est réconforté par la lecture de ces pages, où ne se mêle aucune préoccupation personnelle, et où chacun va jusqu'au bout de sa pensée. Il semble aussi, et c'est une curieuse impression laissée par ces lettres, que sous cette forme plus personnelle le langage abstrait de l'Analyse perde de sa sécheresse et que la Mathématique y devienne plus humaine. On n'oubliera pas enfin que c'est à l'amitié développée par cette correspondance que nous devons de pouvoir compter Thomas Stieltjes parmi les géomètres les plus éminents de la seconde moitié du XIX^e^ siècle ».

(P. M.).

Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neuern Methoden nach G. Salmon frei bearbeitet von D^r^ W. Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Sechste Auflage, Leipsig, Teubner. Erster Teil, 1898 (XXV-441 pages, in-8°). Zweiter Teil, 1903 (XXIV et 443-854 pp., in-8°). Prix : broché 9 + 8 marcs, cartonné 10 + 9 marcs.

On connaît la grande influence que le *Treatise on Conic Sections* by the Rev. George Salmon, A. M. Fellow and Tutor, Trinity College, Dublin, a eue sur l'enseignement et le développement de la géométrie analytique pendant la seconde moitié du 19^e^ siècle. La première édition en a paru en 1849, la 10^e^ en 1896; des traductions en ont été publiées dans différentes langues et d'autres manuels également remarquables se sont inspirés du *Treatise*. Le succès extraordinaire de cet ouvrage est dû à ce que l'auteur a toujours su faire passer dans un manuel, sous une forme appropriée, les derniers progrès (coordonnées trilinéaires ou tangentielles, notations abrégées, méthodes de transformation, invariants) et y a mis également beaucoup de science personnelle; le lecteur était rapidement initié aux méthodes modernes, et de nombreux exercices bien choisis lui donnaient l'occasion d'éprouver ses connaissances et l'excitaient au travail personnel.

La première *traduction libre* en allemand par Fiedler date de 1860; elle a paru en un volume de 610 pages in-8°. Le traducteur, d'accord avec l'auteur, y avait

introduit quelques additions importantes et des notes historiques; depuis lors, il n'a cessé de la tenir au courant, et de l'enrichir à tel point que les deux dernières éditions ont dû paraître en deux volumes. Cette *Bearbeitung* du traité magistral de Salmon jouit dans les universités allemandes d'une vogue bien légitime. On y constate, comme dans le Traité de géométrie descriptive de Fiedler, une alliance des deux géométries analytique et projective.

Voici en quels termes l'*Archiv für Mathematik und Physik* caractérise la seconde partie de la sixième édition :

« Le changement que l'on constate, est avant tout une modernisation de « l'exposé de la science. Les matériaux sont restés à peu près les mêmes; mais « dans les différents chapitres, notamment dans celui des propriétés invarian- « tes, on a mis à profit les travaux les plus récents, adopté un meilleur ordre « des propositions et présenté les théories d'une manière plus conforme aux « habitudes d'aujourd'hui. L'excellent ouvrage est maintenu ainsi au niveau « des exigences actuelles ». (J. N.).

Getallenleer, door W. Mantel. Haarlem, Bohn, 1904, IV-101 pp., in-8°.

Ce livre est destiné aux professeurs, aux aspirants-professeurs et à tous ceux qui aiment la *théorie des nombres*. Voici un résumé de la table des matières :

I. Principes fondamentaux. La multiplication est commutative, distributive et associative. Crible d'Eratosthène. Plus grand commun diviseur. Un nombre n'admet qu'une seule décomposition en facteurs premiers.

La suite des nombres premiers est illimitée. II. Diviseurs et restes. Caractères de divisibilité. Restes des puissances successives d'un nombre. Moindre multiple et plus grand commun diviseur. Décomposition de $n!$ en facteurs premiers; conséquences. III. Le nombre $\varphi(n)$. IV. Fractions continues. Propriétés des réduites. Fractions continues périodiques. Équation de Pell. V. Progressions arithmétiques. Équations indéterminées du premier degré. VI. Progressions géométriques. Théorème de Fermat. Fractions décimales périodiques. VII. Progressions arithmétiques d'ordre supérieur. Théorème de Wilson. Restes quadratiques. Symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$. VIII. Questions diverses. Nombres figurés. Binôme de Newton. Nombres polygonaux. Généralisation du théorème de Fermat. Identités.

Chaque chapitre est suivi d'exercices intéressants (voir nos questions d'examen).

Le livre est écrit par un professeur qui joint à la science pure la pratique de l'enseignement. (J. N.).

Orthogonale Axonometrie, Ein Lehrbuch zum Selbststudium von Dr Schussler, Professor an der technischen Hochschule in Graz. Leipzig und Berlin, Teubner 1905 (VIII-170 pp., in-8° et atlas de 200 fig.). Prix : 8 marcs.

Table des matières. I. Le système des trois axes (1-11). II. Représentation du point, de la droite et du plan (12-16). III. Positions mutuelles de ces éléments (17-25). IV. Construction des ombres de polyèdres (26-40). V. Pyramides et prismes (41-59). VI. Droites et plans perpendiculaires (60-67). VII. Problèmes

sur la vraie grandeur (68-75). VIII. Le cercle (76-86). IX. Les sections coniques (87-105). X. Cylindres du second ordre (102-110). XI. Cônes du second ordre (111-118). XII. Intersection de cylindres et de cônes (119-124). XIII. Sphère (124-140). XIV. Hémisphère (141-145). XV. Surfaces de révolution (146-165). — Index alphabétique (166-170).

A l'exemple de C. Pelz, l'auteur traite la représentation axonométrique comme un mode se suffisant à lui même. Il ne suppose pas de connaissances préalables autres que la géométrie élémentaire; en particulier, lorsqu'il traite des sections coniques, il déduit les propriétés de ces courbes de leur représentation graphique ou en esquisse seulement la démonstration. La théorie des ombres a reçu beaucoup de développements. Chaque chapitre renferme des exercices dont la solution est indiquée en quelques mots, ce qui permet au lecteur de se familiariser davantage avec la méthode axonométrique.

L'exécution du texte et de l'atlas font honneur aux presses de la maison Teubner. (J. N.).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours d'admission en 1905.

Composition de géométrie analytique.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *on considère deux cônes* (S) *et* (T), *se coupant à angle droit suivant* Oz *et dont les sommets* S *et* T *sont situés sur la partie positive de* Oz, *de façon que* $OS = \gamma$, $OT = \gamma'$ $(\gamma' > \gamma)$: *leurs bases dans le plan* xOy *sont les circonférences dont les centres et les rayons sont* A (*sur* Ox) *et a pour* (S), B (*sur* Oy) *et b pour* (T).

Les deux cônes ont ainsi en commun, outre l'axe Oz, *une courbe* (Γ).

1° *Former l'équation de la cubique* (C) *projection de* (Γ) *sur le plan* xOy, *et construire cette cubique.*

2° *Soit* PQ *une corde quelconque de* (Γ) [*obtenue, par exemple, en la considérant comme située sur une génératrice* (G) *d'un hyperboloïde passant par l'intersection complète des cônes* (S) *et* (T)] : *soit pq la projection de* PQ *sur le plan* xOy ; *cette projection rencontre la cubique* (C), *outre les points p et q, en un troisième point m.*

On demande le lieu de la droite PQ *dans les cas suivants :*

1° *Le point m est fixe.*

2° *Les droites* Op *et* Oq *font des angles égaux avec* Ox.

3° *La corde pq est vue de l'origine suivant un angle droit.*

Généraliser.

Solution par M. ABSOLONNE (Hasselt). Les équations des cônes (S) et (T) sont

$$(S)\quad \gamma(x^2+y^2)+2ax(z-\gamma)=0,$$
$$(T)\quad \gamma'(x^2+y^2)+2by(z-\gamma')=0.$$

Ces équations prises simultanément représentent l'axe Oz et la courbe (Γ).

La projection de celle-ci sur le plan xOy s'obtiendra en éliminant z entre les deux équations, ce qui donne

$$(C)\quad (x^2+y^2)(a\gamma' x-b\gamma y)+2abxy(\gamma-\gamma')=0.$$

En transformant l'équation de la courbe C en coordonnées polaires, Ox étant l'axe polaire, on obtient, après la disparition de ρ^2,

$$\rho=\frac{2ab(\gamma'-\gamma)\sin\omega\cos\omega}{a\gamma'\cos\omega-b\gamma\sin\omega}=\frac{c\sin 2\omega}{\sin(\varphi-\omega)}$$

avec $$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a\gamma'}{b\gamma}\quad\text{et}\quad c=a\left(\frac{\gamma'}{\gamma}-1\right);$$

φ est l'angle de Ox avec la direction asymptotique et c est la distance du point A au point où la parallèle à AS menée par T rencontre Ox.

Prenant alors pour axe polaire la symétrique de la direction asymptotique OC par rapport à Ox, ω se change en $\omega-\varphi$ et, si $2\varphi=\theta$, il vient

$$\rho=\frac{c\sin(2\omega-\theta)}{\sin(\theta-\omega)},$$

équation de la strophoïde.

Si nous faisons $\omega=\pi$, nous aurons $\rho=c=OM$.

Pour construire la courbe, on mène par M un rayon quelconque qui rencontre OC en D; il suffit alors de porter de part et d'autre de D des longueurs égales à OD pour obtenir les points de la courbe situés sur ce rayon.

Le rayon parallèle à l'asymptote rencontre la courbe au pied de la perpendiculaire abaissée de O sur ce rayon et l'autre point situé à l'infini est sur la droite symétrique du rayon par rapport à O; cette dernière est l'asymptote de la cubique.

1° L'équation d'un hyperboloïde (H) qui passe par l'intersection des cônes est :

$$(H)\quad S-KT\equiv(\gamma-K\gamma')(x^2+y^2)+2ax(z-\gamma)-2Kby(z-\gamma')=0.$$

Pour simplifier l'écriture, faisons $\delta\equiv\gamma-K\gamma'$.

En écrivant pour (H) :

$$x(\partial x + 2az - 2a\gamma) = y(-\partial y + 2Kbz - 2Kb\gamma)$$

on voit que les génératrices des deux systèmes de cet hyperboloïde ont respectivement pour équations :

$$(G_1)\begin{cases} \lambda x = -\partial y + 2Kbz - 2Kb\gamma', \\ \partial x + 2az - 2a\gamma = \lambda y; \end{cases}$$

$$(G_2)\begin{cases} \mu(\partial x + 2az - 2a\gamma) = -\partial y + 2Kbz - 2Kb\gamma', \\ x = \mu y. \end{cases}$$

Les génératrices (G_1) rencontrent, toutes, celle des génératrices (G_2) qui est parallèle à l'axe Oz; leurs projections passeront donc par un point fixe $m(x''', y''')$ qui est le pied de cette génératrice sur le plan xy. La génératrice (G_2) qui est parallèle à Oz correspond à

$$\mu a - Kb = 0, \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{Kb}{a}.$$

D'ailleurs $\mu = \dfrac{x'''}{y'''}$, donc $K = \dfrac{ax'''}{by'''}$ et le lieu des cordes PQ est l'hyperboloïde qui a pour équation

$$S - \frac{ax'''}{by'''}T = 0.$$

2° La projection d'une corde PQ de la cubique gauche (Γ) est représentée par l'équation

$$x(a\lambda + \partial Kb) + y(a\partial - \lambda Kb) = 2abK(\gamma - \gamma')$$

obtenue en éliminant z entre les équations d'une génératrice G_1. Faisons $y = tx$; si t_1, t_2, t_3 sont les trois valeurs de t correspondantes aux coefficients angulaires de Op, Oq, Om, on devra avoir $t_1 = -t_2$ dans l'équation en t à laquelle on arrive après l'élimination de x et de y.

La somme des racines de cette équation est

$$t_1 + t_2 + t_3 = t_3 = \frac{a\gamma - \lambda Kb}{b\gamma K}.$$

D'ailleurs t_3 est le coefficient angulaire $\dfrac{1}{\mu}$ de la génératrice verticale G_2 et $\mu = \dfrac{Kb}{a}$, de sorte que

$$\frac{a}{Kb} = \frac{a\gamma - \lambda Kb}{b\gamma K}$$

ce qui conduit à $K\lambda = 0$, ou $\lambda = 0$, puisque $K = 0$ donnerait pour lieu le cône S.

Faisant $\lambda = 0$ dans les équations de G_1 et éliminant K entre elles et $S - KT = 0$, on obtient le lieu de ces droites; c'est un hyperboloïde représenté par l'équation :

$$F = (\gamma' y + 2bz - 2b\gamma')(\gamma x + 2az - 2a\gamma) - \gamma\gamma' xy = 0.$$

3° Dans le cas où la corde pq est vue de l'origine sous un angle droit, on doit avoir $t_1 t_2 = -1$, $t_3 = \dfrac{a}{Kb}$, donc

$$t_1 t_2 t_3 = -\frac{a}{Kb} = \frac{a\gamma'}{b\gamma} \quad \text{et} \quad K = -\frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Le lieu demandé a pour équation

$$\gamma' S - \gamma T = 0.$$

Pour généraliser, on écrira

$$\operatorname{tg} V = \frac{t_1 - t_2}{1 + t_1 t_2}; \quad t_3 = \frac{a}{bK}.$$

On aura encore

$$t_1 t_2 = \frac{K\gamma'}{\gamma},$$

$$t_1 + t_2 = \frac{a\gamma - Kb\lambda}{Kb\gamma} - \frac{a}{bK} = -\frac{\lambda}{\gamma}.$$

D'où l'on tire :

$$\operatorname{tg} V = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\gamma\gamma' K}}{\gamma + K\gamma'},$$

$$\lambda^2 = (\gamma + K\gamma')^2 \operatorname{tg}^2 V + 4\gamma\gamma' K.$$

En éliminant λ et K entre les équations de G_1 on arrive à

$$\lambda = \frac{F}{T}, \quad K = \frac{S}{T},$$

qu'on remplace dans la dernière égalité pour avoir l'équation du lieu. On trouve

$$F^2 - 4\gamma\gamma' ST = (\gamma T + \gamma' S)^2 \operatorname{tg}^2 V.$$

Note. 1. Si l'on transforme l'équation (C) en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, le résultat est de la forme

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m\cos\theta} + \frac{1}{n\sin\theta}\right).$$

Portons sur Ox la longueur $OA_1 = m$, sur Oy la longueur $OB_1 = n$ et décrivons des points A_1, B_1 comme centres deux circonférences passant par O. Soient K, L les points de rencontre de ces circonférences avec une droite quelconque menée par O. La courbe (C) est le lieu du conjugué harmonique de O par rapport au couple KL.

Cette construction de la strophoïde a été signalée par M. Dewulf (voir *Mathesis*, VII, p. 148 et XI, p. 21).

2. Pour construire la courbe (Γ) et sa projection horizontale (C), menons par Oz un plan quelconque π qui coupe les bases des cônes (S), (T) aux points S′, T′; les génératrices SS′, TT′ des deux cônes se rencontrent en un point P de (Γ), qui se projette sur le plan xy en un point p de (C).

La construction du point p peut s'effectuer dans le plan Oxy. En effet, sur une droite quelconque OU de ce plan, prenons les distances $OS_1 = OS$, $OT_1 = OT$ et cherchons le point de rencontre P_1 des droites S_1S', T_1T'; les transversales T_1T', TT′ des triangles OS_1S', OSS′ déterminent les mêmes segments sur les côtés issus de O; donc elles partagent les troisièmes côtés SS′, S_1S' dans le même rapport. Par suite, la parallèle par P_1 à OU passe par p.

3. Pour obtenir la direction asymptotique de (C), il faut mener le plan π de manière que les droites SS′, TT′ deviennent parallèles ou que $OS' : OT' = OS : OT$. Or, si on multiplie tous les rayons vecteurs de la circonférence B issus de O par le rapport OS : OT, leurs nouvelles extrémités se trouveront sur une circonférence passant par O et ayant son centre B_1 au point où une parallèle par S à la droite BT coupe Oy. Cette circonférence rencontrera la base du cône (S) au point cherché S′, de manière que l'asymptote de (C) est parallèle à la droite OS′. Dans cette construction, les points S et T peuvent être remplacés par S_1 et T_1.

Les tangentes en S′, T′ aux bases des cônes se coupent au point U. L'asymptote de la cubique gauche (Γ) est la parallèle à SS′ par U, et l'asymptote de la strophoïde (C) est la parallèle à OS′ par U.

4. Pour généraliser le 3° de la question, on peut supposer que les droites Op, Oq se correspondent dans deux faisceaux projectifs ou vérifient une relation de la forme

$$At_1t_2 + Bt_1 + B't_2 + C = 0. \qquad \text{(J. N.)}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 876.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 216 et (3), V, p. 30).

Étant donnés un angle xOy et un point P, *une sécante quelconque menée par* P *rencontre* O*x* *en* A, O*y* *en* B. *Sur la droite* AB *qui reste toujours sa propre homologue, on construit une figure* F *de forme invariable.*

1° *Tout point* C *de* F *décrit une hyperbole.* 2° *Le centre de cette hyperbole décrit une figure* F′ *semblable à celle du point* C. 3° *Le centre de similitude des figures* F, F′ *décrit une circonférence.* 4° *Le centre instantané de similitude de la figure* F *décrit une podaire d'hyperbole.*

(SOLLERTINSKY).

Solution par M. P. BASTIN. 1° Prenons pour axes les droites O*x* et O*y*. Soit D la projection de C sur AB, les rapports $\frac{CD}{AB} \equiv \mu$, et $\frac{BD}{AB} \equiv \lambda$ sont constants. Désignons par α et β les coordonnées de P, par a et b les segments OA et OB; λa et $(1-\lambda)b$ seront les coordonnées de D. Nous aurons pour les coordonnées du point C(*) :

$$x = a(\lambda + \mu \operatorname{cotg} OBA) = a\lambda + \mu \frac{b - a\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$y = b(1 - \lambda + \mu \operatorname{cotg} OAB) = b(1-\lambda) + \mu \frac{a - b\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Ces relations peuvent s'écrire :

$$a(\lambda - \mu \operatorname{cotg}\theta) + b\mu \operatorname{cosec}\theta = x,$$
$$a\mu \operatorname{cosec}\theta + b(1 - \lambda - \mu \operatorname{cotg}\theta) = y,$$

ou sous forme abrégée, p, q et r désignant des constantes pour un même point C de F :

$$ap + br = x, \quad ar + bq = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\Delta)$$

Nous en tirons :

$$a = \frac{qx - ry}{pq - r^2}, \quad b = \frac{py - rx}{pq - r^2};$$

(*) Si l'ordonnée du point C (supposé *au-dessus* de AB et à l'intérieur de l'angle xOy) rencontre O*x* en M et AB en N, on a : $\frac{OM}{OA} = \frac{BN}{BA} = \frac{BD - ND}{BA} = \frac{BD}{BA} + \frac{CD \cot OBA}{AB} = \lambda + \mu \cot OBA$, etc.

portant ces valeurs dans l'équation de condition $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=1$, nous obtenons :

$$qrx^2-(pq+r^2)xy+pry^2+(pq-r^2)\{x(q\beta-r\alpha)+y(p\alpha-r\beta)\}=0.$$

Le point C décrit en général une hyperbole passant par l'origine.

2° Un calcul facile nous donne pour coordonnées du centre I de cette hyperbole :

$$x=\alpha p+\beta r,\quad y=\alpha r+\beta q\quad\ldots\quad(\varphi).$$

Soient A′, B′ les pieds des coordonnées du point P. La comparaison des formules (Δ) et (φ) nous montre que I est situé par rapport à A′B′ comme C l'est par rapport à AB; I décrit donc une figure F′ semblable à F, A′B′ étant l'homologue de AB.

3° Soit E le point d'intersection des droites AB, A′B′; le centre de similitude S des figures F et F′ est le second point d'intersection des circonférences AA′E, BB′E. Nous avons les égalités d'angles :

$$A'SB'=A'SE-B'SE=EAx-OBA=B'OA';$$

le point S décrit donc la circonférence B′OA′.

4° Le centre instantané de similitude σ de la figure F est à l'intersection de deux circonférences passant par P, l'une tangente à Ox en A, l'autre tangente à Oy en B; ces deux circonférences ont pour équations :

$$x^2+2xy\cos\theta+y^2-2ax-By+a^2=0,$$
$$x^2+2xy\cos\theta+y^2-Ax-2by+b^2=0,$$

lesquelles donnent

$$A=\frac{a^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2-2b\beta+b^2}{\alpha},\quad B=\frac{\alpha+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2-2a\alpha+a^2}{\beta}.$$

Le point σ appartient également à la circonférence OAB définie par l'équation $x^2+2xy\cos\theta+y^2-ax-by=0$; les droites Aσ et Bσ ont conséquemment pour équations :

$$ax+(B-b)y=a^2,\quad (A-a)x+by=b^2.\ \ldots\ (\varkappa).$$

Si nous représentons la droite AB par l'équation $y-\beta=m(x-\alpha)$, nous avons $a=x-\frac{\beta}{m}$ et $b=\beta-m\alpha$; les équations (ϰ) deviennent dans ce cas :

$$mx(m\alpha-\beta)+y(m^2\alpha+2m^2\alpha\cos\theta+\beta)=(\beta-m\alpha)^2\ \ldots.\ (\varkappa')$$
$$x(m^2\alpha+2m\beta\cos\theta+\beta)+my(\beta-m\alpha)=m(\beta-m\alpha)^2\ \ldots.\ (\varkappa'').$$

Si nous soustrayons celles-ci, après avoir multiplié la première par m, nous obtenons

$$m^2\alpha y - \beta x = 0 \ldots\ldots (\pi)$$

qui représente la droite $O\sigma$.

L'addition des équations (x'') et (π) nous fournit l'équation d'une nouvelle droite passant par σ et dans laquelle l'indéterminée m ne figure plus au troisième degré :

$$\beta y + x(m^2\alpha + 2\beta\cos\theta) = (\beta - m\alpha)^2.$$

Ajoutant à cette dernière équation, l'équation (π) multipliée par $\cos\theta$, nous obtenons :

$$y(\beta + m^2\alpha\cos\theta) + x(m^2\alpha + \beta\cos\theta) = (\beta - m\alpha)^2,$$

qui représente un droite l, passant par σ et perpendiculaire à $O\sigma$.

Ordonnée par rapport à m, l'équation de l s'écrit :

$$m^2\alpha(x + y\cos\theta - \alpha) + 2m\alpha\beta + \beta(y + x\cos\theta - \beta) = 0.$$

L'enveloppe de l a par conséquent pour équation

$$\alpha\beta - (x + y\cos\theta - \alpha)(y + x\cos\theta - \beta) = 0,$$

ou

$$x^2\cos\theta + xy(1 + \cos^2\theta) + y^2\cos\theta - x(\beta + \alpha\cos\theta) - y(\alpha + \beta\cos\theta);$$

c'est donc une hyperbole et le lieu de σ est la podaire de cette hyperbole par rapport à l'origine O.

Solution synthétique. L'intéressante question de M. Sollertinsky concerne un mouvement qui a été peu étudié jusqu'ici. Nous allons la démontrer synthétiquement et indiquer quelques nouveaux résultats.

1. Soient D un point qui divise la droite mobile AB dans un rapport constant $AD : DB = m : n$. Appelons A', B' les pieds des coordonnées de P (PA' est parallèle à Oy, PB' à Ox) et A'', B'' ceux des coordonnées de D. Les ponctuelles (A''), (B'') respectivement semblables aux ponctuelles perspectives (A), (B) sont projectives entre elles. Donc si l'on appelle ξ, η les points à l'infini sur Ox, Oy, le point D est à l'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux projectifs de centres ξ, η; on en conclut que D décrit une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à Ox et Oy, qui passe par O (position de D lorsque AB se confond avec OP) et par P (la tangente en P est la position de AB) qui est divisée en P dans le rapport $(m : n)$.

Pour trouver les asymptotes, transportons A'' et par suite A à l'infini

sur Ox; alors B passe en B′ et B″ devient le point B‴ qui divise OB′ dans le rapport $m : n$, de sorte que B‴ξ est une asymptote. Semblablement l'asymptote parallèle à Oy passe par le point A‴ qui divise OA′ dans le rapport $n : m$. Ces deux asymptotes se rencontrent au point qui divise la droite A′B′ dans le rapport $m : n$.

9. La circonférence circonscrite au triangle OAB est sa propre homologue dans la figure mobile F; en effet, les deux points A, B sont leurs propres homologues et la corde AB sous-tend un angle constant.

Tout point C de cette circonférence se meut sur une droite passant par O; car l'angle $CO x$ est égal à l'angle CBA qui reste constant.

8 Considérons maintenant un point quelconque C de F et appelons R, S les points de rencontre de la circonférence OAB avec les droites AC, BC; ces points étant toujours leurs propres homologues, les droites OR, OS sont fixes. Menons les droites CR′, CS′ parallèles à OR, OS et rencontrant respectivement Ox en R′, Oy en S′. Les rapports CR : RA, CS : SB étant invariables, il en est de même des rapports R′O : OA, S′O : OB; on en conclut aisément que les points R′ et S′ décrivent des ponctuelles projectives, de sorte que C est l'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux projectifs ayant leurs centres à l'infini sur OR, OS. Par conséquent, C décrit une hyperbole passant par O et ayant ses asymptotes parallèles à OR, OS.

Pour trouver l'une des asymptotes, supposons R′ et par suite A à l'infini sur Ox; B passe en B′ et S′ devient le point S″ tel que S″O : OB′ = CS : SB; donc l'asymptote parallèle à OS passe par S″. De même l'asymptote parallèle à OR rencontre Ox en un point R″ tel que R″O : OA′ = CR : RA. Or, si la circonférence circonscrite au triangle OA′B′ coupe OR en R_1 et OS en S_1, et si I est le point d'intersection des droites $A'R_1$, $B'S_1$, l'angle $S_1B'A' = S_1OA' = SBA$. $R_1A'B' = R_1OB' = RAB$; donc le triangle IA′B′ est semblable à CAB, de plus S_1 et R_1 sont les homologues de S et R dans les triangles semblables IA′B′, CAB (c. à. d. $S_1A'B' = SOB' = SAB$, ...). On a donc $IS_1 : S_1B' = CS : SB = S''O : OB$, ce qui montre que S″I est parallèle à OS, concluons de là que I est le centre de l'hyperbole décrite par C.

En particulier, le centre de l'hyperbole décrite par le centre de la circonférence mobile OAB coïncide avec celui de la circonférence OA′B′.

4. On sait que le centre de similitude ω de deux figures semblables

construites sur les droites homologues AB, A'B' est aussi celui de deux figures semblables construites sur les droites AA', BB'; si Q est le point de rencontre des droites AB, A'B', et Q', celui des droites AA', BB', le point φ est l'intersection commune des quatre circonférences QAA', QBB', Q'AB, Q'A'B'.

Cela posé, le point C et le centre I de l'hyperbole (C) sont des points homologues de deux figures semblables F, F' construites sur AB et A'B' (notations du § 3); le centre de similitude est le second point d'intersection des circonférences OAB, OA'B'. Le lieu de ce centre, lorsque C varie dans la figure F, est évidemment la circonférence OA'B'.

5. Soient AB, A_1B_1 deux sécantes de l'angle xOy menées par P et infiniment voisines l'une de l'autre. Le centre de similitude φ de deux figures semblables construites sur ces sécantes est le second point d'intersection des deux circonférences OAB, OA_1B_1; ce point est le symétrique de O par rapport à la ligne des centres de ces cercles. Si l'on fait tendre A_1B_1 vers AB, φ aura pour limite le symétrique σ de O par rapport à la tangente menée par le centre du cercle OAB à l'hyperbole décrite par ce centre lorsque AB tourne autour de P. Donc σ décrit une podaire d'hyperbole par rapport à un point de cette conique.

6. La droite CA entraînée avec AB enveloppe une parabole tangente à Ox et ayant pour foyer le point P.

De même, les droites de F menées par B enveloppent des paraboles ayant pour foyer P et tangentes à Oy.

Une droite quelconque d de F enveloppe une antipodaire oblique de P par rapport à l'hyperbole décrite par le point de rencontre de d avec AB; car ce point divise AB dans un rapport constant et l'angle de d avec AB est invariable.

Si la droite d est parallèle à AB, projetons P en P' sur d et prenons sur BA la longueur PE = BA. Le rapport PP' : AB étant constant, les points E et P' engendrent des courbes semblables. Or, si l'on mène par E une parallèle à Ox qui coupe Oy en E', on a BB' = OE'; donc les ponctuelles (E'), (B) sont égales (opposées). Par suite, le point E est l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux projectifs, de centres P et ξ; on conclut de là que E décrit une hyperbole et comme il en est de même de P', la droite d enveloppe l'antipodaire de P par rapport à une hyperbole passant par P.

(J. Neuberg).

×Question 1517.

(Voir *Mathesis*, (3), V; p. 111).

Démontrer géométriquement les théorèmes suivants :

1° *La circonférence des neuf points d'un triangle est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux sommets, diminuée de leur puissance par rapport au cercle circonscrit, est égale à* $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

2° H *et* O *étant l'orthocentre d'un triangle* ABC *et le centre du cercle circonscrit, pour tout point* M *de la circonférence de diamètre* HO *on a*

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2-\overline{MO}^2=3R^2.$$

(Edm. De Puydt).

Solution par M. J. Rose. La propriété se vérifie aisément pour les milieux des côtés et les pieds des hauteurs. Soient G le centre de gravité et O' le centre du cercle des neuf points. De $OG=\frac{1}{3}OH$, $OO'=\frac{1}{2}OH$, on déduit $O'G=\frac{1}{6}OH=\frac{1}{2}OG$. On sait que pour tout point M :

$$\begin{aligned}\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2&=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{3MG}^2\\&=\tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+\overline{3MG}^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

Si M est un point du cercle des neuf points, on trouve en appliquant le théorème de Stewart au triangle MOO' :

$$\overline{MO'}^2.GO+\overline{MO}^2.GO'=\overline{MG}^2.OO'+OG.O'G.OO'$$

ou, en divisant par GO',

$$\frac{R^2}{2}+\overline{MO}^2=\overline{3MG}^2+\overline{6GO'}^2. \qquad (2)$$

En remplaçant M par O on déduit de (1) :

$$\overline{OG}^2=R^2-\tfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2). \qquad (3)$$

De (1), (2) et (3) on conclut

$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+b^2)+\frac{R^2}{2}+\overline{MO}^2-\frac{3}{2}R^2+\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)$$

ou $$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2+(R^2-\overline{OM}^2)=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Mais $\overline{OM}^2-R^2$ est la puissance du point M par rapport au cercle circonscrit. La propriété est donc démontrée.

2° La propriété se vérifie pour les points O et H. Soit M un point de la circonférence de diamètre OH. En appliquant le théorème de Stewart au triangle HMO, on a :

$$\overline{HM}^2.OG+\overline{MO}^2.HG=\overline{MG}^2.OH+HG.GO.HO;$$

d'où $$\overline{3HG}^2 = \overline{HM}^2 + 2\overline{HO}^2 - \overline{6OG}^2.$$

Par conséquent,

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{HO}^2 = \tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + \overline{3MG}^2 - \overline{MO}^2$$
$$= \tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + \overline{HM}^2 + \overline{MO}^2 - \overline{6OG}^2$$
$$= \tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c) + \overline{HO}^2 - \overline{6OG}^2 = \tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + \overline{3OG}^2$$
$$= \tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + 3R^2 - \tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) = 3R^2.$$

Solutions analogues par MM. Van Dinter, Dupont et Edg. De Meyer.

M. Abramescu a résolu élégamment la question par la géométrie analytique

---

Question 1519.

(Voir *Mathesis*, (3); V, p. 112).

On projette un point quelconque M *du plan d'une ellipse en* D *et* E *sur les diamètres conjugués égaux; les projetantes* MD, ME *rencontrent respectivement les diamètres* OE, OD *aux points* D_1, E_1. *D'après un théorème connu, ces points* D_1, E_1 *appartiennent à l'hyperbole d'Apollonius relative à* M. *Cela posé, le centre de l'hyperbole est le milieu* M' *de la droite* D_1E_1 *et aussi le pôle de la corde* ED *du cercle* ODE; *la tangente en* O *à l'hyperbole passe au milieu de la droite* ED, *et les tangentes en* D_1 *et* E_1 *sont parallèles à* ED. *Pour tout point* P *de l'hyperbole, les angles* PD_1O, PE_1O *sont égaux entre eux.* (Déprez).

Solution analytique par MM. E. N. Barisien et De Backer. L'ellipse étant rapportée à ses axes, l'équation de l'hyperbole d'Apollonius relative à $M(\alpha, \beta)$ est

(1) $$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Les coordonnées de son centre sont

(2) $$x = \frac{a^2\alpha}{c^2}, \qquad y = -\frac{b^2\beta}{c^2}.$$

Les équations des diamètres OD, OE et des projetantes MD, ME sont respectivement

$$bx - ay = 0, \qquad bx + ay = 0;$$
$$a(x-\alpha) + b(y-\beta) = 0, \qquad a(x-\alpha) - b(y-\beta) = 0,$$

de sorte que les coordonnées des points D, E, D_1, E_1 sont

$$\text{D, E} \begin{cases} x = \dfrac{a(a\alpha \pm b\beta)}{a^2+b^2}, \\ y = \pm\dfrac{b(a\alpha \pm b\beta)}{a^2+b^2}; \end{cases} \qquad \text{D}_1, \text{E}_1 \begin{cases} x = \dfrac{a(a\alpha \pm b\beta)}{c^2}, \\ y = \mp\dfrac{b(a\alpha \pm b\beta)}{c^2}; \end{cases}$$

d'où les équations des droites DE, D_1E_1

$$\alpha x - \beta y = \frac{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2}{a^2 + b^2}, \tag{3}$$

$$\alpha x + \beta y = \frac{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2}{c^2}. \tag{4}$$

On voit immédiatement que les coordonnées (2) du centre de l'hyperbole (1) sont celles du milieu M de D_1E_1.

Le cercle circonscrit au triangle ODE ayant pour diamètre OM, son équation est

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0, \tag{5}$$

et l'équation de la polaire du point (x, y) est

$$X(2x - \alpha) + Y(2y - \beta) - \alpha x - \beta y = 0.$$

En y substituant les valeurs (2), on retrouve bien la droite (3).

La tangente en O à l'hyperbole (1) a pour équation

$$b^2\beta x - a^2\alpha y = 0 ; \tag{6}$$

les coordonnées du milieu de DE satisfont bien à cette équation.

La tangente en un point (x, y) de l'hyperbole (1) a pour équation

$$X(c^2y + b^2\beta) + Y(c^2x - a^2\alpha) + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Pour les points D_1 et E_1, on trouve

$$\alpha X - \beta Y = \frac{(a\alpha \pm b\beta)^2}{c^2}. \tag{7}$$

Ces tangentes sont bien parallèles à la droite DE (3).

Les droites PE_1 et PD_1 rencontrent Oy en Q et S. Dans les triangles E_1QO et D_1SO, on a *angle* $E_1OQ = D_1OS$. Si, d'après l'énoncé, on doit trouver *angle* $OE_1Q = OD_1S$, il faut que les troisièmes angles E_1QO, D_1SO des deux triangles soient aussi égaux, ou que les coefficients angulaires des droites PD_1 et PE_1 soient égaux et de signes contraires. Les coordonnées de P étant désignées par x, y, cette condition s'exprime par

$$\frac{y - y_{D_1}}{x - x_{D_1}} = -\frac{y - y_{E_1}}{x - x_{E_1}},$$

ou $$2xy - x(y_{E_1} + y_{D_1}) - y(x_{D_1} + x_{E_1}) + x_{D_1}y_{E_1} + x_{E_1}y_{D_1} = 0.$$

En substituant dans cette relation les valeurs des coordonnées de D_1 et E_1, on trouve bien l'équation (1).

Remarque. Si le point M parcourt l'ellipse donnée, on a les lieux géométriques suivants :

1° *Le lieu de* M′, *centre de l'hyperbole d'Apollonius est l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}=\frac{1}{c^4}.$$

2° *L'hyperbole d'Apollonius enveloppe la kreuzcurve*

$$c^4x^2y^2=b^6x^2+a^6y^2.$$

3° *Le lieu du milieu de* DE *est l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}.$$

4° *Le lieu du point de rencontre des droites* DE *et* D_1E_1 *est la sextique*

$$(a^4-b^4)^2x^2y^2(b^2x^2+a^2y^2)=(b^6x^2-a^6y^2)^2.$$

5° *L'enveloppe de* DE *est une sextique unicursale dont l'aire est*

$$U=\frac{\pi(a^8+b^8+10a^4b^4)}{8ab(a^2+b^2)^2}.$$

6° *L'enveloppe de* D_1E_1 *est une sextique unicursale dont l'aire est*

$$U=\frac{\pi(a^8+b^8+10a^4b^4)}{8abc^4}.$$

Solution analogue par MM. H. Lez et J. Rose.

Solution synthéthique par MM. Van Dinter et Droz Farny. L'hyperbole d'Apollonius relative à M passe par les points M, O, D_1, E_1 et a ses asymptotes parallèles aux axes de l'ellipse, axes qui sont les bissectrices des angles formés par OD et OE. Il résulte de là que les droites OD_1 et OE_1 ayant des directions symétriques par rapport à une asymptote sont des cordes supplémentaires de l'hyperbole, et il en est de même des cordes ME_1, MD_1. Donc D_1E_1 est un diamètre.

Les deux quadrilatères MEOD, E_1D_1DE sont inscriptibles; donc l'angle $D_1E_1D = D_1ED$, et comme le triangle $M'E_1D$ est isoscèle, les angles $M'DE_1$ et OED sont égaux. Par conséquent M′D et par analogie M′E touchent la circonférence OEMD et M′ est le pôle de la corde DE.

Soit Q le milieu de ED. Dans les triangles symétriquement semblables OE_1D_1, OED, les médianes OM′, OQ font des angles égaux avec les lignes homologues OD_1, OD et, par suite, sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle DOD_1 ou ont des directions symétriques par

rapport à une asymptote de l'hyperbole. M'O étant un diamètre, OQ est nécessairement la tangente en O. Les directions de DE, D_1E_1 étant de même symétriques par rapport à une asymptote, les tangentes en E_1 et D_1 sont parallèles à ED. Les droites PD_1 et PE_1 ayant des directions symétriques par rapport à une asymptote, ainsi que les droites E_1D et ED_1, les angles PE_1D, PD_1E sont égaux.

Autre solution synthétique par M. Abramescu et solution mixte par M. Bastin.

Question 1581.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 144).

Si R *est un point quelconque du plan d'un triangle quelconque et* P *la puissance de ce point par rapport au cercle circonscrit à ce triangle, on a*

$$3P = \overline{AB}^2 \frac{CR}{CC'} + \overline{BC}^2 \frac{AR}{AA'} + \overline{CA}^2 \frac{BR}{BB'} - (\overline{AR}^2 + \overline{BR}^2 + \overline{CR}^2),$$

A', B', C' *étant les points de rencontre de* BC, CA, AB *respectivement avec les droites* AR, BR, CR. (Edm. De Puydt).

Solution par M. Abramescu. Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées barycentriques absolues du point R, de sorte que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{x_3}{x_2}, \quad \frac{AR}{AA'} = \frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3} = 1 - x_1, \text{ etc.}$$

Le théorème de Simson-Stewart appliqué au triangle ABC et à la droite AA' donne

$$c^2x_2 + b^2x_3 = \overline{AA'}^2(x_2 + x_3) + a^2 \frac{x_2x_3}{x_2 + x_3}.$$

Remplaçons AA' par [AR : $(1 - x_1)$], il vient

$$c^2x_2 + b^2x_3 = \overline{AR}^2 + \Sigma a^2x_2x_3,$$

d'où l'on tire :

$$\overline{AR}^2 = c^2x_2 + b^2x_3 - \Sigma a^2x_2x_3.$$

D'après un théorème connu, $P = -\Sigma a^2x_2x_3$; par suite :

$$\overline{AR}^2 = c^2x_2 + b^2x_3 - P, \qquad \overline{BR}^2 = a^2x_3 + c^2x_1 - P,$$
$$\overline{CR}^2 = b^2x_1 + a^2x_2 - P$$

d'où l'on conclut en additionnant :

$$3P = \Sigma a^2(x_2 + x_1) - \Sigma\overline{AR}^2 = \Sigma a^2 \frac{AR}{AA'} - \Sigma\overline{AR}^2.$$

M. N. P. nous a adressé une solution incomplète dont l'écriture et la rédaction laissent beaucoup à désirer; ce zélé correspondant devrait rendre plus lisibles les solutions qu'il nous envoie.

×Question 1533.

(Voir *Mathesis*, (3); V, p. 144).

Par un point donné sur la ligne de terre, mener une droite dont les projections horizontale et verticale fassent un angle donné α avant le rabattement des plans de projection l'un sur l'autre, et un autre angle donné β après ce rabattement.

Solution graphique par MM. J. Chanteux (Malonne), Bastin et Droz-Farny. Il suffit de déterminer les angles que forment les projections avec la ligne de terre; cela revient à résoudre un trièdre, connaissant la somme de deux faces angulaires (β), la troisième face angulaire (α) et l'angle dièdre opposé (1 dr.), si l'on suppose que la droite cherchée passe dans le premier dièdre des plans de projection.

Soient, dans un plan, les droites SX, SY et SZ telles que (SX, SY) $= \alpha$, (SY, SZ) $= \beta$. De plus, soit SC (sur SX) = SA (sur SZ).

Avec SA pour diamètre, décrivons une circonférence, coupée aux points M et M' par la perpendiculaire abaissée de C sur SY.

Les droites SM, SM' décomposent β en deux parties, représentant les angles que forment les projections avec la ligne de terre.

Solution trigonométrique par M. F. Majorin (Malonne). — Soient x et y les angles inconnus. On a :

$$x + y = \beta,$$
$$\cos x \cos y = \cos \alpha.$$

D'où, $$2 \cos \alpha = \cos \beta + \cos (x - y),$$

ou $$\cos (x - y) = 2 \cos \alpha - \cos \beta,$$

relation, qui avec la première, permet de trouver x et y.

×Question 1585.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 200).

On donne un triangle ABC *et un plan* P. *Trouver dans ce plan un point* M *tel que les droites* AM, BM, CM *soient également inclinées sur le plan* P. *Discussion.* (A. C.)

Le problème a été bien résolu par MM. Erelav Seam, Abramescu, Dupont, Bastin et F. Majorin (Malonne); nous reproduisons leur solution, en y ajoutant la discussion que ces honorables correspondants ont trop écourtée.

Soient A', B', C' les projections de ABC sur le plan P et appelons α, β, γ les distances AA', BB', CC'. Les triangles AMA', BMB', CMC' étant semblables, on est ramené à cette question classique :

Trouver dans le plan d'un triangle A'B'C' *un point* M *dont les distances aux sommets* A', B', C' *soient proportionnelles aux longueurs données* α, β, γ.

Si l'on divise les côtés B'C', C'A', A'B', additivement et soustractivement, aux couples de points aa', bb', cc' dans les rapports $\beta : \gamma$, $\gamma : \alpha$, $\alpha : \beta$ (trois de ces points sont les points de rencontre des couples de côtés homologues des deux triangles A'B'C', ABC), le point cherché est l'un des deux points d'intersection M, M' des circonférences décrites sur les segments aa', bb', cc' comme diamètres.

Observons immédiatement que les droites A'a, B'b, C'c concourent en un même point D ayant pour coordonnées barycentriques $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ et que les points a', b', c' sont situés sur une même droite d qui est la polaire trilinéaire de D. Les trois circonférences (aa'), (bb'), (cc') étant orthogonales à la circonférence circonscrite au triangle A'B'C', leur corde commune MM' passe par le centre O' de cette circonférence et $O'M.O'M' = R'^2$, R' étant le rayon. Les centres a'', b'', c'' des trois circonférences (aa'), (bb'), (cc') sont sur la droite perpendiculaire au milieu de la corde MM' et divisent B'C', C'A', A'B' soustractivement dans les rapports $\beta^2 : \gamma^2$, $\gamma^2 : \alpha^2$, $\alpha^2 : \beta^2$.

Nous avons supposé que les circonférences a'', b'', c'' se coupent en deux points réels et distincts. Cherchons la condition pour qu'il en soit ainsi.

Soient m, n, p les longueurs des côtés du triangle A'B'C'. Si les points M, M' coïncident en un point de la circonférence A'B'C', on a

un quadrilatère inscriptible ABCM dans lequel, d'après le théorème de Ptolémée,

$$m\alpha = n\beta + p\gamma,$$

en supposant $m\alpha$ plus grand que $n\beta$ et $p\gamma$.

Si M est un point quelconque du plan A'B'C' et que A'', B'', C'' soient les points correspondant à A', B', C' dans une inversion de pôle M, on trouve facilement que les côtés du triangle A''B''C'' sont proportionnels aux produits B'C'.MA, C'A'.MB, A'B'.MC ou à $m\alpha$, $n\beta$, $p\gamma$; donc si $m\alpha$ est le plus grand des derniers produits, la condition cherchée est $m\alpha < n\beta + p\gamma$. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN(*).

1251. $a^7 - a$ est divisible par 42, $a^{11} - a$ par 66.

1252. $a^3 - 9a + 9$ est premier avec 770.

1253. Un nombre est représenté, dans le système décimal, par 33 ... 3, le chiffre 3 étant écrit 200 fois de suite. Trouver le reste de sa division par 27, 37 ou 13. Réponse : 4, 33, 7.

1254. m et p étant des nombres pairs quelconques, le quotient

$$\frac{m(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)(m^2 - 6^2)\cdots(m^2 - p^2)}{1.2.3\ldots(p+1)}$$

est entier.

1255. $a, b, \ldots$ étant des entiers plus petits que 10, quels sont les nombres de la forme $abcba$ qui sont divisibles par 73. — Réponse : $a292a$, $b949b$.

1256. Trouver le reste de la division de $4^{4^{4^4}}$ par 13. Réponse : 9.

1257. Trouver la somme des diviseurs de 999999. — Réponse : 2042880.

1258. Combien de nombres inférieurs à 840 ont avec 840 pour plus grand commun diviseur le nombre 6? — Réponse : 48.

1259. Une racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels étant la fraction continue périodique (1, 2, 3, 4, 5, ...) quel est le développement de la seconde racine? — Réponse : — (0, 5, 4, 3, 2, 1, 5, 4, ...).

1260. Développer en fraction continue chacune des racines de l'équation $26x^2 - 122x + 143 = 0$. — Réponse : (2, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...), (2, 2, 2, 2, 1, 2, 1, ...).

(*) Les questions 1251-1268 sont empruntées à la *Getallenleer* door W. Mantel.

1361. Développer en fraction continue les racines de l'équation $x^2 - ax - 1 = 0$. — Réponse : $(a, a, \ldots)$.

1362. Quels sont les termes de la progression arithmétique 8, 23, 38 ... qui divisés par 121 donnent pour reste 10?

1363. Pour quelles valeurs de n la somme de n nombres entiers consécutifs n'est-elle pas divisible par n?

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1551**. Dans tout triangle ABC dont le périmètre est $2p$, si les rayons des cercles inscrit et circonscrit sont r et R, les valeurs de $\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \operatorname{tg}\frac{C}{2}$ sont racines de l'équation

$$px^2 - (4R + r)x^2 + px - r = 0.$$

(E. N. Barisien).

×**1552**. Soient F, E les points de contact d'une tangente commune à deux cercles qui se coupent en A et D. On mène par D une parallèle à EF qui coupe les deux cercles en B, C; soit G le conjugué harmonique de D par rapport à B et C. Démontrer que la corde commune aux cercles ADG, EFD est perpendiculaire à BC. (Nesbitt).

1553. Étant donnée une cubique plane de la quatrième classe C_4^3, prenons la conique polaire C^2 d'un point arbitraire O de la courbe; cette conique touche C_4^3 au point O, passe par son point double P et la coupe en deux autres points S, A. Démontrer que les tangentes à la cubique en son point double P coupent C^2 aux points doubles de l'involution définie sur cette conique par les deux couples de points conjugués (S, A), (P, O). (V. Retali).

×**1554**. Soient s_a et w_a la médiane et la symédiane issues du sommet A du triangle ABC; démontrer la relation

$$b^2 + c^2 = 4R w_a \sin(s_a, w_a).$$ (A. C).

1555. On considère tous les triangles (de l'espace) qui sont semblables à un triangle donné, dont un sommet A est fixe et dont un second sommet B parcourt une droite donnée b. Trouver le lieu du troisième sommet C.

SUR LA DÉTERMINATION DES NOMBRES AMIABLES,

par M. A. GÉRARDIN.

Les nombres amiables sont des groupes de deux nombres tels que chacun d'eux soit égal à la somme des diviseurs de l'autre, y compris l'unité, mais le nombre lui-même étant exclu.

Par exemple, les deux nombres 284 et 220 sont amiables, car 284 a pour diviseurs 1, 2, 4, 71, 142 dont la somme fait 220, et 220 a pour diviseurs 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 dont la somme est 284.

Cette définition est classique, mais ce qui est moins connu, c'est, croyons nous, l'ouvrage latin suivant ou au moins sa traduction que nous espérons publier sous peu. LÉONARD EULER a, en effet, donné une liste de 61 couples de nombres amiables, et a écrit près de cent pages sur la matière dans les *Opuscula Varii Argumenti* (Berolini, vol. II, 1750, p. 23 à 107).

Cette liste est déjà très intéressante à consulter, car on y remarque des groupes tels que $3^2.5.13.11.19$ et $3^2.5.13.239$, ainsi que $3^5.7^2.13.53.11.211$ et $3^5,7^2.13.53.2543$ dont la forme symétrique suggère l'idée d'une étude plus approfondie du problème général et particulier.

L'Intermédiaire des Mathématiciens a déjà donné une bibliographie du sujet, et parmi les ouvrages à la portée du public nous pouvons citer les *Exercices d'Arithmétique* de FITZ-PATRICK et CHEVREL qui s'occupent de cette question, ainsi que la *Table de Logarithmes* de DUPUIS qui cite 24 groupes d'amiables et la formule générale connue.

La liste des amiables est évidemment infinie, mais parmi les nombres simples nous rencontrerons beaucoup de formes non étudiées ou incomplètement résolues.

Nous proposons aujourd'hui deux problèmes très simples comme application :

I. *Chercher tous les nombres amiables des types* $2^2.5.x$ *et* $2^2.y.z$, x, y, z *étant premiers impairs.* $2^2.5.x$ a pour diviseurs les termes du produit $(1+2+2^2)(1+5)(1+x)$ dont la somme est $22x+42$, en écartant le nombre lui-même.

On devra donc avoir

$$22x+42=4yz. \qquad (1)$$

On trouvera de même,

$$3yz+7(y+z+1)=20x. \qquad (2)$$

Eliminant yz, on a

$$x = 2(y+z)+11.$$

Posant $y+z+5=u$, il viendra successivement

$$yz = 11u+16,$$
$$(y-z)^2 = (u-5)^2 - 4(11u+16),$$

ou

$$u^2 - 54u - 39 = h^2.$$

Cherchons le plus petit entier positif qui rende le trinôme $u^2-54u-39$ positif, et posons

$$u = 55+s,$$

d'où

$$s^2+56s+16 = h^2 = (s+n)^2, \text{ c.-à-d. } s = \frac{n^2-16}{56-2n},$$

n pair, variant de 4 à 28 et s étant positif, il n'y a que 7 solutions : s 0, 4, 10, 24, 39, 70 et 165.

Or, x est premier, d'où $x = 2u+1 = 111+2s$; il n'y a que *deux* solutions convenables :

$$x = 131 \text{ et } 251,$$

s étant 10 ou 70, et u 65 ou 125. On a alors

$$y+z = 60, \qquad y+z = 120,$$
$$yz = 731, \qquad yz = 1391,$$
$$y = 17,\ z = 43 \qquad y = 13,\ z = 107.$$

Il n'y a donc que *deux* solutions, déjà indiquées par Euler :

$$2^2.5.131 \text{ et } 2^2.17.43, \text{ c.-à-d. } 2630 \text{ et } 2924.$$
et
$$2^2.5.251 \text{ et } 2^2.13.107, \text{ c.-à-d. } 5020 \text{ et } 5564.$$

II. *Chercher tous les amiables des types* $2^2.33.x$ et $2^2.y.z$, x, y, z *étant premiers impairs.*

Par une méthode semblable, on aura d'abord les deux équations :

$$17x = 93 \quad 2yz. \tag{1}$$
$$15yz = 51(y+z+1) = 868x, \tag{2}$$

d'où

$$x = 2(y+z)+17-3u+1;$$

x et z étant premiers, $y+z$ sera pair, d'où

$$x = 4r-3,$$
$$y+z = 2(\quad 11),\qquad yz = 34r+117.$$
$$r^2-116r-4 = k^2.$$

Posons $v = 116 + w$;

alors $w^2 + 116w + 4 = k^2$,

équation qui admet les *seize* solutions suivantes :

$w = 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 13,\ 16,\ 24,\ 36,\ 55,\ 69,\ 88,\ 115, 156, 225, 364, 783.$

$v = \mathbf{116, 117, 119}, 120, 129, 132, \mathbf{140, 152}, 171, \mathbf{185}, 204, 231, \mathbf{272, 341}, 480, \mathbf{899}.$

$k = 2.\ 11,\ 19,\ 22,\ 41,\ 46.\ 58,\ 74,\ 97,\ 113, 134, 163, 206, 277, 418, 839.$

v ne peut pas être $3m$, car x ne serait pas premier. Les seules valeurs de v acceptables à première vue sont marquées en chiffres gras.

Il ne reste donc pour x que les huit valeurs : 467, 479, 563, 611, 743, 1091, 1367, 3599 parmi lesquelles *trois* seulement donnent x premier : 467, 479, 1367. On trouve ainsi facilement les *trois* seules solutions du problème :

$$2^4.23.467 \quad \text{et} \quad 2^4.103.107,$$
$$2^4.23.479 \quad \text{et} \quad 2^4.89.127,$$
$$2^4.23.1367 \quad \text{et} \quad 2^4.53.607.$$

Cette analyse élémentaire pourra servir à déterminer des amiables tels que $2^m5^n x$ et $2^m5^n yz$ ou de toute autre forme.

NOTE *de* M. H. BROCARD, *relative à l'équation* $w^2 + 116w + 4 = y^2$.

Cette équation paraît être la plus simple (ou aux coefficients les plus petits, à somme 11^2) et ayant le plus grand nombre de solutions. Elle se change en elle-même si w est négatif; il suffit donc de connaître les solutions positives.

La formule $x = \dfrac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}$, indiquée par TERQUEM (*Exerc. de Math. Élém.*, 1842, p. 246) pour la résolution de l'équation indéterminée $a^2x^2 + bx + c = y^2$, peut s'écrire

$$x = \frac{m^2 - c}{b - 2am}$$

et s'applique avec facilité à la recherche des valeurs de w. On a alors

$$w = \frac{m^2 - 4}{116 - 2m}.$$

Le dénominateur était pair, m sera $2t$; par suite

$$w = \frac{t^2 - 1}{29 - t},$$

d'où les *seize* solutions indiquées dans la méthode précédente.

Il serait intéressant d'étudier le nombre de solutions entières de la formule

$$w = \frac{m^2 - c}{b - 2m}$$

pour des valeurs données de b (paires) et de c (carrées).

NOTES MATHÉMATIQUES.

2. *Sur une enveloppe.* La proposition suivante nous a été communiquée par M. Barisien :

La tangente et la normale en un point M *quelconque d'une ellipse rencontrent le grand axe en* T *et* N, *et le petit axe en* T′ *et* N′. *On considère la parabole* P *tangente aux axes en* T *et* T′, *et la parabole* P′ *tangente aux axes en* N et N′. *Montrer que la troisième tangente commune aux paraboles* P *et* P′ *est normale à une ellipse fixe.*

De simples considérations géométriques ramènent cette question à un théorème connu. En effet, OT et OT′ étant deux tangentes rectangulaires, O appartient à la directrice de P et le foyer F de P est la projection de O sur la corde de contact TT′. Semblablement, le foyer F′ de P′ est la projection de O sur NN′. Or, la circonférence circonscrite au triangle formé par les tangentes communes à P et P′ passe par O, F, F′; comme elle a pour diamètre OM, la troisième tangente commune est la droite qui unit les projections D, D′ du point M sur les axes Ox, Oy. La recherche de l'enveloppe de cette droite est une question classique; d'ailleurs, si l'on projette l'ellipse suivant une circonférence, la projection de DD′ aura une longueur constante. (J. N.)

×**3.** *Sur les cercles tritangents.* Connaît-on cette propriété : *Dans tout triangle* ABC, *les droites qui joignent le milieu de chaque hauteur au point de contact du côté opposé avec le cercle exinscrit correspondant, passent par le centre du cercle inscrit?* (E. N. Barisien).

Ce théorème est très probablement connu; en voici une démonstration simple et une extension.

Soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs; A_1, B_1, C_1 les milieux des hauteurs; A″, B″, C″ les pieds des bissectrices intérieures; A‴, B‴, C‴ les pieds des bissectrices extérieures; I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles tritangents; I′, I″, I‴ les points de contact de BC, CA, AB avec le cercle I; I'_a, I'_b, I'_c les points où ces côtés touchent le cercle I_a, etc.

Les droites BA, BC, BI, BI_b formant un faisceau harmonique, il

en est de même des droites I'_aA, I'_aA'', I'_aI, I'_aI_a. La droite AA′ étant parallèle au rayon I'_aI_a, le rayon I'_aI passe au milieu A_1 du segment AA′ compris entre les deux autres rayons Ainsi, *les droites* $A_1I'_a$, $B_1I''_b$, $C_1I''_c$ *se croisent en* I.

En raisonnant de la même manière sur le faisceau harmonique $I'_1AA''II_a$) coupé par la transversale AA′, on voit que les droites A_1I', $B_1I''_c$, $C_1I''_b$ se croisent en I_a; que $A_aI'_c$, B_1I'', $C_1I''_a$ se croisent en I_b; enfin que $A_1I'_b$, $B_1I''_a$, C_1I''' se croisent en I_c.

Le même genre de raisonnement a été employé pour démontrer que le point de Lemoine est à l'intersection des droites joignant les milieux des hauteurs aux milieux des côtés correspondants. (J. N.).

×**4.** *Sur le pentagone simple.* Soient a et a', b et b', c et c' les trois couples de côtés opposés (AB, CD), (BC, DA), (AC, BD) d'un *quadrangle complet* ABCD. On a les relations :

$$a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 + 4\gamma^2,$$
$$b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 = a^2 + a'^2 + 4\alpha^2,$$
$$c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 + 4\beta^2,$$
$$a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

où α, β, γ sont les longueurs des droites qui joignent les milieux de deux côtés opposés.

Considérons maintenant un pentagone simple ABCDE; pour plus de simplicité, on peut le supposer convexe. Désignons par a, b, c, d, e les côtés CD, DE, EA, AB, BC respectivement opposés aux sommets A, B, C, D, E; par a', b', c', d', e' les diagonales BE, CA, DB, EC, AD respectivement opposées aux mêmes sommets; par α, β, γ, δ, ε les droites joignant les milieux des couples aa', bb', cc', dd', ee'; par α', β', γ', δ', ε' les droites joignant les milieux des couples be, ca, db, ec, ad; enfin par α'', β'', γ'', δ'', ε'' les droites joignant les milieux des couples $c'd'$, $d'e'$, $e'a'$, $a'b'$, $b'c'$. Le quadrangle BCDE donne :

$$b^2 + e^2 + c'^2 + d'^2 = a^2 + a'^2 + 4\alpha^2, \quad (1)$$
$$a^2 + a'^2 + c'^2 + d'^2 = b^2 + e^2 + 4\alpha'^2, \quad (2)$$
$$a^2 + a'^2 + b^2 + e^2 = c'^2 + d'^2 + 4\alpha''^2 \quad (3)$$

Si l'on additionne chacune de ces relations avec les quatre qui s'en déduisent par des permutations tournantes des lettres, on trouve :

$$\Sigma a^2 + \Sigma a'^2 = 4\Sigma\alpha^2. \quad (4)$$
$$3\Sigma a'^2 - \Sigma a^2 = 4\Sigma\alpha'^2, \quad (5)$$
$$3\Sigma a^2 - \Sigma a'^2 = 4\Sigma\alpha''^2. \quad (6)$$

Dans ces égalités, le signe sommatoire s'étend sur les cinq lettres de même espèce.

La relation (6) a été signalée récemment par M. Jahnke (*Archiv für Math. und Phys.*, (3), IX, p. 91). Elle renferme la relation (5) si l'on remplace le pentagone ABCDE par le pentagone ACEBDA, ce qui échange les éléments a, b, c, d, e et a', b', c', d', e'.

Si l'on combine les égalités (4), (5), (6) par addition, on trouve :

$$\Sigma a'^2 = \Sigma(\alpha^2 + \alpha'^2), \quad \Sigma a^2 = \Sigma(\alpha^2 + \alpha''^2), \quad \Sigma a^2 + \Sigma a'^2 = 2\Sigma(\alpha'^2 + \alpha''^2),$$

égalités que l'on pourrait démontrer directement. (J. N.).

BIBLIOGRAPHIE.

L'algèbre de la Logique, par L. Couturat (Collection *Scientia*). Paris, Gauthier-Villars, mars 1905. (Cartonné in-12°, de 109 pp.). Prix : 2 francs.

Algèbre de la Logique de Boole et Schröder, exposée non comme un système représentant les lois de la pensée, mais comme une algèbre reposant sur certains principes arbitrairement posés. Cet opuscule du savant logicien de Toulouse est aussi abstrait que les parties les plus abstraites des mathématiques.

Les principes des Mathématiques, avec un appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant, par Louis Couturat. Paris, F. Alcan, 1905 (In-8° de VIII-311 pp). Prix : 5 francs.

Cet ouvrage, inspiré en grande partie des *Principles of Mathematics* de M. Russell est « une sorte d'enquête sur l'état présent de la philosophie des mathématiques ». Il analyse ou résume les nombreux travaux publiés depuis une douzaine d'années sur les fondements logiques des mathématiques, mais spécialement ceux qui ont été effectués par M. Peano et ses disciples au moyen de la *Logistique* (logique algorithmique). Il aboutit à cette conclusion, que les mathématiques sont entièrement et uniquement fondées sur les principes et les notions premières de la logique. Cette thèse est opposée à l'épistémologie kantienne comme le montre un *Appendice sur la Philosophie des mathématiques de Kant*; elle a donné et donnera encore lieu à de nombreuses discussions.

Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres, par Cl. G. Bachet. Quatrième édition, revue et simplifiée. Paris, Gauthier-Villars, 1905. (In-16° de VI-161 pp.). Prix : 3 fr. 50.

L'éditeur de ces problèmes, M. Labosne, ne nous dit malheureusement pas ce qu'il a retranché, ce qu'il a ajouté au livre de Bachet; il serait d'ailleurs fastidieux de comparer les éditions originales de 1612 et de 1624, à la nouvelle de 1905. Nous nous contentons donc de signaler celle-ci à nos lecteurs sans dire ce qui la caractérise.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. XVIII. Heft. Leipzig, Teubner 1904. In-8 de 196 pp. Prix : 6 marcs.

Ce cahier contient les mémoires suivants : 1. *Heiberg*. Les mathématiques

chez Aristote. 2. *Conrad H. Müller.* Les mathématiques et l'enseignement des mathématiques à Gœttingue au 18e siècle. 3. *R. Lindt.* Le principe des vitesses virtuelles: démonstrations qu'on en a données; impossibilité d'en faire l'inversion au moyen de la notion de l'équilibre d'un système. Le premier de ces trois mémoires donne une idée détaillée et précise de l'état des mathématiques avant Euclide.

Anfangsgründe der darstellenden Geometrie für Gymnasien von Fritz Schülte, Oberlehrer am Gymnasium zu Düren. Leipzig et Berlin, Teubner, 1905 (In-8e de 42 pp. et 45 fig.). Prix : marcs 0.80.

L'introduction des éléments de géométrie descriptive dans le programme des gymnases allemands date de 1901.

Les manuels de géométrie en usage ne développent pas suffisamment ces éléments et les manuels spéciaux sont trop étendus. L'opuscule de M. Schülte me paraît répondre complètement au programme en exposant sous une forme claire et concise les notions essentielles sur les projections orthogonales (20 pages), les projections obliques (9 pages) et les projections centrales (7 pages). Ce n'est pas le cours de géométrie descriptive de notre première scientifique, c'est plutôt une partie importante de l'enseignement du dessin dans nos établissements d'instruction moyenne. (J. N.).

Die Planimetrie für das Gymnasium von Gustave Holzmüller. Erster Teil. Zweite Auflage. Leipzig et Berlin, Teubner, 1905. (In-8e, cartonné de VIII-240 pp. et 149 figures). Prix : 2,40 marcs.

Mathesis a déjà analysé trois autres ouvrages du même auteur (1901, p. 115; 1905, pp. 49 et 69); nous n'avons donc plus à faire ressortir les caractères particuliers de la méthode de M. Holzmuller qui jouit d'une grande réputation en Allemagne.

La première partie de la *Planimétrie* (79 pages) comprend le programme de la quatrième latine; c'est un extrait de la *Vorbereitende Einführung in die Raumlehre* (voir *Mathesis*, 1905, p. 49).

La seconde partie (pp. 79-171) s'adresse à *Untertertia* et *Obertertia :* les deux premiers livres de Legendre; aire d'un polygone; théorème de Pythagore; polygones réguliers.

La troisième partie (pp. 171-237), destinée à *Untersecunda*, renferme la similitude, les lignes proportionnelles dans le cercle, le calcul de π.

Un appendice explique les termes mathématiques d'origine grecque. (J. N.).

Théorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, von Dr Heinrich Wieleitner, Gymnasiallehrer am hum. Gymnasium Speyer (Sammlung Schubert, XLIII). Leipzig. G. J. Göschensche Verlagshandlung, 1905 (In-8e de XXII-313 pp. avec 82 figures dans le texte). Prix : 10 marcs.

Ce livre n'est pas à proprement parler un traité consacré à une exposition méthodique et graduée des propriétés générales des courbes d'ordre supérieur; c'est un ensemble considérable de matières (83 paragraphes), très varié, extrait des meilleures sources et tenant compte des progrès réalisés. Il est accessible au lecteur déjà familiarisé avec le calcul différentiel, l'algèbre supérieure, les déterminants et la théorie générale des courbes du second ordre.

L'auteur rappelle d'abord quelques généralités sur les propriétés projectives et métriques, les imaginaires, les coordonnées tangentielles, le principe de dualité. Le procédé de JOACHIMSTAL pour l'intersection d'une courbe algébrique avec une droite donnée par deux points est le point de départ de l'étude des polaires, des singularités ordinaires, des courbes covariantes d'une courbe donnée (Hessienne, Steinérienne, Cayleyenne), de leurs rapports, et des formules de PLÜCKER. L'auteur distingue, d'après ce dernier géomètre, les singularités ponctuelles et tangentielles et montre leur caractère de nécessité selon le mode de génération par points ou par tangentes de la courbe considérée. Un paragraphe spécial est consacré à la notion du genre, aux courbes rationnelles, en particulier, à celles du troisième ordre. Abordant ensuite le problème de la discussion et du tracé des courbes algébriques, l'auteur développe la théorie des asymptotes, étudie la nature des points singuliers, la forme de la courbe dans le voisinage d'un de ces points supposé en un sommet du triangle de référence. Il établit la règle de CRAMER pour déduire du triangle analytique les équations des courbes (*Näherungskurven*) que l'on substitue aux diverses branches de la courbe se croisant au point multiple. Le procédé est répété jusqu'à ce que toutes les branches soient séparées. On est ainsi amené à la considération des singularités supérieures (*Berührungsknoten*, nœud de tangence, *Schnabelspitze*, point de rebroussement de seconde espèce) et des développements qui les concernent. L'auteur touche ensuite aux transformations quadratiques qu'il utilise pour l'étude des quartiques rationnelles et pour la solution des singularités supérieures. Tous ces paragraphes renferment de multiples exemples, bien choisis pour éclairer les théories générales, esquissés de façon à laisser quelque chose à l'initiative du lecteur, dont la tâche sera facilitée par de nombreuses figures minutieusement dessinées. Les derniers chapitres sont consacrés à l'étude de l'extension du principe de correspondance (Chasles, Cayley, Brill, Zeuthen), de la théorie des résidus (Sylvester, Brill, Noether), des parties essentielles de la théorie des courbes du troisième et du quatrième ordre et enfin des systèmes de courbes. (C. S.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1534.

(Voir *Mathesis*, (3). V. p. 144).

Par un point quelconque M *d'une hyperbole de centre* O, *on mène une parallèle à une asymptote qui coupe l'axe réel de l'hyperbole en* A, *une parallèle à l'autre asymptote qui coupe l'axe imaginaire en* B.

Trouver 1° *l'enveloppe de la droite* AB; 2° *le lieu du point de rencontre des droites* AB *et* OM; 3° *le lieu du milieu de* AB (ABRAMESCU).

Solution par M. V. RETALI. En faisant usage des équations paramétriques

$$x = a \operatorname{ch}\theta, \qquad y = b \operatorname{sh}\theta$$

de l'hyperbole, on trouve immédiatement :

$$OA = a(\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta),$$
$$OB = b(\operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta),$$

et, par suite, $OA.OB = ab$. L'enveloppe de la droite AB est donc l'hyperbole équilatère $4xy = ab$.

Cette hyperbole est aussi le lieu du milieu de AB, car ce point est le point de contact de la droite AB avec son enveloppe. On obtient l'équation de l'enveloppe en écrivant l'équation

(1) $$(bx + ay)\operatorname{ch}\theta + (bx - ay)\operatorname{sh}\theta = ab$$

de la droite AB, et en éliminant θ entre cette équation et sa dérivée par rapport à θ; donc l'enveloppe est

$$(bx + ay)^2 - (bx - ay)^2 = a^2b^2 = 4abxy.$$

Les coordonnées du point P, intersection de (1) avec la droite

$$ay \operatorname{ch}\theta = bx \operatorname{sh}\theta,$$

sont données par

$$x = \frac{a \operatorname{ch}\theta}{1 + \operatorname{sh} 2\theta}, \qquad y = \frac{b \operatorname{sh}\theta}{1 + \operatorname{sh} 2\theta},$$

que l'on peut regarder comme équations paramétriques du lieu cherché. Le lieu de P est donc une courbe rationnelle du quatrième ordre avec un point double d'inflexion à l'origine, ayant pour tangentes les asymptotes de l'hyperbole donnée, et deux autres points doubles réels à l'infini etc. On obtient d'ailleurs l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires en éliminant θ entre les deux dernières équations, comme il suit : multipliant membre à membre nous avons

$$2abxy = \frac{a^2b^2 \operatorname{sh} 2\theta}{(1 + \operatorname{sh} 2\theta)^2},$$

en outre,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = \frac{a^2b^2(\operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta)}{(1 + \operatorname{sh} 2\theta)^2} = \frac{a^2b^2}{(1 + \operatorname{sh} 2\theta)^2};$$

donc :

$$(b^2x^2 - a^2y^2 + 2abxy)^2 = a^2b^2(b^2x^2 - a^2y^2),$$

qui est l'équation cherchée.

Solution analogue par MM. Barisien, Couvert et H. Lez qui représentent les coordonnées de M par a séc φ, b tg φ. MM Erélav Seam et Rose introduisent les coordonnées cartésiennes (x', y'), M. M. Bastin prend pour axes coordonnés les asymptotes de l'hyperbole.

Solution par M. A. Droz-Farny. Les deux parallèles aux asymptotes menées par M, sont des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques ayant leurs centres aux points à l'infini de l'hyperbole. Il en résulte que A et B sont les points correspondants de deux

ponctuelles projectives; AB enveloppe donc une conique qui est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes de l'hyperbole donnée, car au point O, comme appartenant aux deux ponctuelles, correspondent évidemment les points à l'infini des axes. D'après un théorème connu, le lieu du milieu de AB est la même hyperbole équilatère.

A deux points M diamétralement opposés sur l'hyperbole donnée correspondent deux droites AB parallèles et symétriquement disposées par rapport à O. On a donc un faisceau du second ordre de tangentes parallèles d'une conique, homographique au faisceau des droites OM. Le lieu des intersections des droites AB et OM sera une courbe à centre en O du quatrième ordre ayant en O un point double.

Remarque. Le diamètre OM devient une direction asymptotique du lieu dans la position spéciale où il est parallèle à AB. Si l'on désigne par R et R′ les points d'intersection de AB avec les asymptotes de l'hyperbole, la première parallèle à MA, la seconde parallèle à MB, on a OM RA − R′B; donc l'involution (BR, AR′) a un point double à l'infini. Par suite, les directions asymptotiques OM du lieu sont les rayons doubles de l'involution déterminée par l'axe OB et l'asymptote OR, l'axe OA et l'asymptote OR′. (C. S.)

M. Fr. Dupont a donné une solution complète de la question, synthétique et analytique.

Question 1529.

(Voir *Mathesis*, (3); V, p. 168).

Soient P, Q *deux points conjugués par rapport à une conique* U. *La droite* PQ *rencontre les côtés d'un triangle* ABC *inscrit à cette courbe, aux points* A′, B′, C′, *dont on prend les conjugués harmoniques* A″, B″, C″ *par rapport aux points* P *et* Q. *Démontrer que les droites* AA″, BB″, CC″ *concourent en un point de* U.

Solution par MM. J. Sterrens, Retali et Droz-Farny. Soit D le point d'intersection de la droite AA″ avec la conique U. Menons les droites DB et DC; elles coupent PQ en B_1', C_1''. Si X, Y sont les points d'intersection de PQ avec la conique U, les couples de points XY, A′A″, $B'B_1'$, $C''C_1'$ sont en involution, en vertu du théorème de Sturm. Mais les points XY, A′A″, B′B″, C′C″ sont conjugués dans l'involution dont les éléments doubles sont P et Q. Ces deux involutions ayant deux couples, XY, A′A″, communs, sont identiques. Donc B_1'' coïncide avec

B'' et C'' avec C''. Par conséquent les droites AA'', BB'', CC'' concourent en un même point D de U.

Autrement. En prenant pour P. Q les points circulaires à l'infini du plan de la conique, on tombe sur ce théorème connu : *L'orthocentre d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère est sur la courbe.* De ce cas particulier on passe au cas général au moyen d'une transformation linéaire. (V. Retali).

Nous avons été amené à proposer aux lecteurs de *Mathesis* la question 1529 en rencontrant dans quelques périodiques le cas particulier suivant : *Un diamètre de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC *coupe les côtés en* A', B', C'; *soient* A'', B'', C'' *les symétriques de* A', B', C' *par rapport au centre de la circonférence. Les trois droites* AA'', BB'', CC'' *concourent en un point de cette courbe.* (J. N.).

Solution analytique par M. Abramescu. ABC étant le triangle de référence, l'équation de U est

$$Ayz + Bzx + Cxy = 0. \qquad (1)$$

Soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées des points P, Q; nous aurons

$$A(\beta'\gamma + \beta\gamma') + B(\gamma\alpha' + \gamma'\alpha) + C(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = 0. \qquad (2)$$

Les coordonnées d'un point de la droite PQ peuvent être représentées par $m\alpha + m'\alpha'$, $m\beta + m'\beta'$, $m\gamma + m'\gamma'$; si ce point coïncide avec A', on a $m\alpha + m'\alpha' = 0$, de sorte qu'on peut prendre $m = \alpha'$, $m' = -\alpha$. Les coordonnées de A'' étant $m\alpha - m'\alpha'$, $m\beta - m'\beta'$, $m\gamma - m'\gamma'$, l'équation de la droite AA'' est

$$\frac{y}{\alpha\beta' + \alpha'\beta} = \frac{z}{\alpha\gamma' + \alpha'\gamma}.$$

En écrivant par analogie les équations des droites BB'', CC'', on voit que les droites AA'', BB'', CC'' concourent en un point ayant pour coordonnées

$$\frac{1}{\beta\gamma' + \beta'\gamma}, \quad \frac{1}{\gamma\alpha' + \gamma'\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha\beta' + \alpha'\beta}.$$

En portant ces coordonnées dans l'équation (1) mise sous la forme

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} = 0,$$

on obtient l'égalité (2); ce qui démontre le théorème.

Autre solution analytique par M. Bastin qui rapporte la figure au triangle formé par la droite PQ et les tangentes aux points de rencontre de PQ avec la conique.

×Question 1530.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 168).

Trouver les lieux des sommets des triangles A'B'C' *isobariques avec* ABC *et symétriquement semblables à* ABC. (H. Van Aubel).

Solution par M. Abramescu. Deux triangles ABC et A'B'C' inversement (symétriquement) semblables sont à la fois métaparallèles et orthologiques (*Mathesis*, (3), III, p, 200) ; les centres P et P', D et D' de métaparallélisme et d'orthologie sont diamétralement opposés respectivement sur les circonférences ABC et A'B'C'.

Si le triangle A'B'C' est isobarique avec le triangle de référence ABC, les coordonnées barycentriques absolues des points A', B', C' seront (α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β). Il faut écrire que le triangle A'B'C' est symétriquement semblable ou allotrope avec ABC, ce qui revient à exprimer que les triangles ABC et A'B'C' sont métaparallèles.

Les points à l'infini sur les droites B'C', C'A', A'B' ayant pour coordonnées

$(\beta-\gamma, \gamma-\alpha, \alpha-\beta)$, $(\gamma-\alpha, \alpha-\beta, \beta-\gamma)$, $(\alpha-\beta, \beta-\gamma, \gamma-\alpha)$,

la condition qui exprime que les parallèles à B'C', C'A', A'B', menées respectivement par A, B, C, et représentées par

$$\frac{y}{\gamma-\alpha}=\frac{z}{\alpha-\beta}, \quad \frac{z}{\beta-\gamma}=\frac{x}{\gamma-\alpha}, \quad \frac{x}{\alpha-\beta}=\frac{y}{\beta-\gamma},$$

concourent en un point P, est identiquement vérifiée ; il faut seulement écrire que le métapôle P se trouve sur le cercle ABC :

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}=0.$$

On a donc

$$a^2(\beta-\gamma)+b^2(\alpha-\beta)+c^2(\gamma-\alpha)=0,$$

ou

$$\alpha(b^2-c^2)+\beta(a^2-b^2)+\gamma(c^2-a^2)=0;$$

il en résulte que les points A', B', C' sont situés sur les droites joignant le centre de gravité G de ABC aux sommets A_1, B_1, C_1 du premier triangle de Brocard, de sorte que les triangles A'B'C' et $A_1B_1C_1$ sont homothétiques par rapport à G.

Question 1532.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 200).

D'un point M *du plan d'une parabole de foyer* F, *on abaisse les trois normales à la courbe en* N_1, N_2, N_3. *Démontrer que*

$$\frac{FN_1.FN_2.FN_3}{FM^2}=\text{constante}.$$

(E. N. Barisien).

Trouver une relation entre les trois rayons FN_1, FN_2, FN_3 *qui soit indépendante de la position du point* M. (J. N.)

Solution par M. A. Gob. L'équation de l'hyperbole d'Apollonius du point M (α, β) est

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0.$$

En éliminant y entre cette équation et celle de la courbe, on trouve l'équation

$$2x(x + p - \alpha)^2 = p\beta^2$$

qui donne les abscisses des points N_1, N_2, N_3. Pour obtenir l'équation aux rayons vecteurs FN_1, FN_2, FN_3, il suffira de remplacar x par $\rho - \frac{p}{2}$; on obtient

$$8\rho^3 - 4\rho^2(4\alpha - p) + 2\rho(4\alpha^2 - p^2) - 4p\left[\beta^2 + \left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2\right] = 0.$$

On a donc les relations

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = \frac{p.\overline{FM}^2}{2}, \quad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \frac{4\alpha - p}{2}, \quad \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_3 = \frac{4\alpha^2 - p^2}{4}.$$

La première de ces relations démontre la première partie de l'énoncé. Pour résoudre la seconde, il suffit d'éliminer α entre les deux derniers égalités; il vient

$$4(\Sigma\rho_1^2 - 2\Sigma\rho_1\rho_2) + 4p\Sigma\rho_1 - 3p^2 = 0.$$

Remarque. On peut donner de cette relation une interprétation géométrique remarquable. Considérons un triangle ABC dont les côtés soient proportionnels aux racines carrées des vecteurs ρ_1, ρ_2, ρ_3. Posons, par exemple,

$$\rho_1 = \frac{a^2}{p}, \quad \rho_2 = \frac{b^2}{p}, \quad \rho_3 = \frac{c^2}{p}$$

et soit S la surface du triangle ABC, nous aurons

$$4(\Sigma a^4 - 2\Sigma b^2c^2) + 4p^2\Sigma a^2 - 3p^4 = 0$$

ou

$$64S^2 - 4p^2\Sigma a^2 + 3p^4 = 0. \qquad (1)$$

Soit V l'angle de Brocard du triangle ABC, on a $\Sigma a^2 = 4S \operatorname{cotg} V$, et l'équation (1) peut s'écrire

$$64S^2 - 16p^2S \operatorname{cotg} V + 3p^4 = 0,$$

d'où

$$S = \frac{p^2}{8}(\operatorname{cotg} V \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2 V - 3}). \qquad (2)$$

Or, si l'on désigne par φ l'angle que forme, avec le plan ABC, le

plan d'un triangle équilatéral $\alpha\beta\gamma$ qui se projette sur le plan ABC suivant le triangle ABC, on aura (NEUBERG, *Sur les triangles équibrocardiens*, A. F. 1888) :

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\operatorname{cotg} V - \sqrt{\operatorname{cotg}^2 V - 3}).$$

Par conséquent, on a, suivant que l'on prend l'une ou l'autre des racines de l'équation (2),

$$\frac{S}{\cos\varphi} = \frac{p^2\sqrt{3}}{8}, \quad \text{ou} \quad S\cos\varphi = \frac{p^2\sqrt{3}}{8}.$$

La seconde solution est seule admissible. En effet, on a

$$S^2 = \frac{1}{16}[4\Sigma b^2c^2 - (\Sigma a^2)^2] = \frac{p^2}{16}[\Sigma\rho_1\rho_2 - (\Sigma\rho_1)^2] = \frac{p_3}{64}(8\alpha - 5p).$$

Or, les trois normales ne sont réelles à la fois que si l'on a $\alpha > p$, donc S est supérieur à $\frac{3p^3}{64}$. Donc

Si l'on projette le triangle ABC *suivant un triangle équilatéral, ce triangle équilatéral sera de grandeur constante.*

MM. DROZ FARNY, ABRAMESCU et H. LEZ ont également démontré la première partie de la question. M. DROZ FARNY observe que lorsque le point M se meut sur une perpendiculaire à l'axe de la parabole, les sommes $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$, $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2$ restent constantes.

MM. ERÉLAV SEAM, DE BACKER, P. BASTIN et ROSE ont donné une solution complète de la question, un peu moins simple que celle de M. GOB. Cependant, pour résoudre la dernière partie du problème, MM. ROSE et P. BASTIN observent que $\rho_1 = x + \frac{p}{2} = \frac{y_1^2 + 2p^2}{2p}$, d'où $y_1 = \sqrt{2p\rho_1 - 2p^2}$ et comme $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, ils trouvent pour la relations cherchée :

$$\sqrt{\rho_1 - p} + \sqrt{\rho_2 - p} + \sqrt{\rho_3 - p} = 0.$$

M. DUPONT traite la question en coordonnées polaires en partant de l'équation de la normale au point (φ, θ) :

$$r\cos(\omega - \tfrac{1}{2}\theta) = \rho\cos\tfrac{1}{2}\theta,$$

qu'il déduit de ce que la normale fait avec l'axe l'angle $\frac{1}{2}\theta$.

M. COUVERT rappelle que la relation proposée par M. BARISIEN l'a déjà été par ce géomètre dans le JMS, 1894, p. 103 et renvoie aussi à un article du même paru dans ce journal. Il résout la seconde partie de la question comme M. GOB.

M. BROCARD a publié dans les NAM et le JMS, 1892, des formules permettant de déduire des points N_1, N_2 le point N_3 et par suite de vérifier la relation de M. BARISIEN.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1264. Les périodes des fractions décimales provenant de $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{27}, \frac{1}{37}, \cdots$ se terminent toujours par le chiffre 7. A démontrer.

1265. p étant un nombre premier, quand la période de la fraction décimale provenant de $\frac{1}{p}$ a-t-elle 5 chiffres?

Les questions 1264, 1265 sont extraites du livre de M. MANTEL : *Getallenleer.*

1266. Construire le triangle ABC, connaissant l'angle A et les rayons des cercles inscrits aux triangles AIB, AIC, où I désigne le centre du cercle inscrit à ABC. (PAMPUCH).

Si C', B' désignent les centres des cercles inscrits aux triangles AIB, AIC, remarquer qu'il est facile de placer ces cercles dans un angle égal à BAC, et que le point I est à l'intersection de la bissectrice de cet angle avec le segment capable de l'angle $\frac{1}{2}\left[1\,\mathrm{dr} - \left(1\,\mathrm{dr} + \frac{A}{2}\right)\right]$ décrit sur C'B'.

1267. Résoudre le système :

$$3x - ay + 2z = -a - 1,$$
$$2x - 5y + 3z = 1,$$
$$x + 3y - (a - 1)\,z = 0.$$

Vérifier les valeurs des inconnues.

Trouver une valeur de a telle que les valeurs correspondantes des inconnues x, y, z satisfassent à la condition $x^2 = 3yz$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1556.** Soient Ox, Oy deux diamètres rectangulaires d'une circonférence, M et M' les extrémités d'un diamètre quelconque. On projette M en P et Q sur Ox et Oy; on trace la droite PQ qui rencontre la circonférence en A et B. Cela posé :

1° $$\overline{MQ}^2 = QA.QB, \quad \overline{MP}^2 = PA.PB,$$
$$\overline{M'A}^2 + \overline{M'B}^2 + 2\overline{AB}^2 = 12R^2.$$

2° Chercher le maximum de $\overline{M'A}^2 + \overline{M'B}^2 + \overline{AB}^2$.

3° Chercher le maximum de l'aire MAB. (E. N. BARISIEN).

1557. Considérons dans un plan deux coniques tangentes (contact simple) et un point arbitraire O; il y a six coniques qui passent par O,

ont double contact avec une des deux coniques données, et osculent l'autre.

Démontrer que les six points d'osculation sont projetés du point O, sur les cordes de contact correspondantes, en six points d'une conique. Quelle modification faut-il apporter à cet énoncé si le point O appartient à l'une des deux coniques données ? (V. Retali).

1558. En un point quelconque M d'une ellipse ε on mène la normale n et la symétrique ν de n par rapport à l'ordonnée de M ; pour abréger le langage nous dirons que ν est *synormale* à ε en M.

1° Par un point quelconque P on peut mener à ε quatre synormales ; leurs pieds sur ε sont également les points d'incidence de quatre normales concourantes.

2° Les synormales à ε sont normales à une seconde ellipse ε', et les normales à ε sont synormales à une troisième ellipse ε''. ε'' est le lieu des points de Frégier de ε et ε est le lieu des points de Frégier de ε'.

3° Soient ω le centre de courbure de ε en M, ω' celui de ε' au point M' de ε' où ν est normale à cette courbe. Le lieu des points qui divisent le segment $\omega\omega'$ dans un rapport donné est une développée d'ellipse.

4° Trouver l'enveloppe de la droite $\omega\omega'$. (J. Neuberg).

Cette question nous a été suggérée par une question inédite de M. Barisien qui proposait l'enveloppe des droites ν, la podaire centrale de cette enveloppe et l'enveloppe de la corde commune à ε et à l'un de ses cercles osculateurs ; cette dernière enveloppe et des questions qui s'y rattachent ont été étudiées dans les NAM, 1873, pp. 39-47.

1559. Étant données deux coniques dans un même plan, trouver le lieu des points dont les polaires par rapport à ces deux courbes se coupent sur l'une ou l'autre d'entre elles.

Cas particuliers : Une conique et son cercle de Monge ; une ellipse et l'hyperbole d'Apollonius relative à un point de son plan.

(J. Rose).

1560. On donne dans un plan P deux droites parallèles α, β et un point O dont les distances à α, β sont respectivement a, b ; sur la perpendiculaire menée en O au plan P on prend une longueur $OS = h$.

Trouver un point A sur la droite α et un point B sur la droite β de telle sorte que l'angle ASB soit droit et que le plan ASB forme avec le plan P un angle donné φ.

Le cas particulier de $a = b$ a été proposé au baccalauréat lettres-mathématiques, Clermont, 1903.

SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES;

par M. F. Gomes Teixera (Porto).

On sait que si les coordonnées (x, y) et (X, Y) des points de deux courbes U et U′ sont liées par les équations

$$x=\frac{a\mathrm{X}+b\mathrm{Y}+c}{\mathrm{X}+p\mathrm{Y}+q},\quad y=\frac{a'\mathrm{X}+b'\mathrm{Y}+c'}{\mathrm{X}+p\mathrm{Y}+q}, \tag{1}$$

l'une de ces courbes est une perspective de l'autre.

Voici une démonstration bien simple et élémentaire de ce théorème; elle est peut-être nouvelle.

Je remarque premièrement que les égalités (1) peuvent être écrites ainsi,

$$\left.\begin{aligned} x&=\beta\left[\frac{\mathrm{X}\cos\alpha-\mathrm{Y}\sin\alpha+h}{\mathrm{X}+p\mathrm{Y}+q}+x_0\right],\\ y&=\beta\left[\frac{\mathrm{X}\sin\alpha+\mathrm{Y}\cos\alpha+k}{\mathrm{X}+p\mathrm{Y}+q}+y_0\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

En effet, l'identité des formules (1) et (2) exige :

$$\beta(\cos\alpha+x_0)=a,\quad \beta(px_0-\sin\alpha)=b; \tag{3}$$

$$\beta(\sin\alpha+y_0)=a',\quad \beta(py_0+\cos\alpha)=b'; \tag{4}$$

$$\beta(qx_0+h)=c,\qquad \beta(qy_0+k)=c'. \tag{5}$$

Or, en éléminant x_0 entre les égalités (3), y_0 entre les égalités (4), on obtient

$$ap-b=\beta(p\cos\alpha+\sin\alpha),\quad a'p-b'=\beta(p\sin\alpha-\cos\alpha), \tag{6}$$

relations d'où on tire facilement β et tg α en faisant la somme de leurs carrés et en les divisant l'une par l'autre. Les inconnues x_0, y_0 résultent ensuite de l'une des équations (3) et (4). Enfin, les équations (5) font connaître h et k.

Cela posé, les axes coordonnés primitifs étant supposés rectangulaires, je change les axes auxquels est rapportée la courbe U′ en posant

$$h+\mathrm{X}\cos\alpha-\mathrm{Y}\sin\alpha=\mathrm{X}_1,\quad k+\mathrm{X}\sin\alpha+\mathrm{Y}\cos\alpha=\mathrm{Y}_1, \tag{7}$$

et j'aurai

$$x=\frac{\mathrm{X}_1}{a_1\mathrm{X}_1+b_1\mathrm{Y}_1+c_1}+x'_0,\quad y=\frac{\mathrm{Y}_1}{a_1\mathrm{X}_1+b_1\mathrm{Y}_1+c_1}+y'_0. \tag{8}$$

Posons encore

$$a_1=\lambda\cos\alpha_1,\quad b_1=\lambda\sin\alpha_1,\quad c_1=\lambda e,$$

λ, α_1, e seront des quantités bien déterminées. Si nous faisons maintenant

$X_2 = X_1 \cos\alpha_1 + Y_1 \sin\alpha_1 + e, \quad Y_2 = Y_1 \cos\alpha_1 - X_1 \sin\alpha_1,$

ce qui correspond à un second changement d'axes pour U', les formules (8) deviennent

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(X_2 - e)\cos\alpha_1 - Y_2 \sin\alpha_1}{\lambda X_2} + x'_0, \\ y &= \frac{(X_2 - e)\sin\alpha_1 + Y_2 \cos\alpha}{\lambda X_2} + y'_0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Changeons maintenant les axes auxquels est rapportée la courbe U en posant

$$x = x'_0 + \frac{\cos\alpha_1}{\lambda} - x_2 \cos\alpha_1 - y_2 \sin\alpha_1,$$

$$y = y'_0 + \frac{\sin\alpha_1}{\lambda} - x_2 \sin\alpha_1 + y_2 \cos\alpha_1;$$

il vient

$$x_2 = \frac{e}{\lambda X_2}, \quad y_2 = \frac{Y_2}{\lambda X_2}. \qquad (10)$$

Pour achever la démonstration, considérons trois axes rectangulaires OX_2, OY_2, OZ_2, un point $P(0, 0, \gamma)$ sur l'axe OZ_2 et un plan $\pi(X_2 = \delta)$ perpendiculaire à l'axe OY_2. Prenons un point quelconque $A(X_2, Y_2, 0)$ du plan X_2Y_2 et projetons A en B sur le plan π, à partir du point P. Les équations de la droite joignant les points A, P étant

$$\frac{x}{X_2} = \frac{y}{Y_2} = \frac{z - \gamma}{-\gamma},$$

on trouve pour les coordonnées de B :

$$y = \frac{\delta Y_2}{X_2}, \quad z = \gamma - \frac{\gamma\delta}{X_2}, \qquad (11)$$

Rapportons le point B à deux axes du plan π, dont l'un $O'x_2$, est la trace de π sur le plan X_2Z_2 et dont l'autre $O'y_2$ est la trace de π sur le plan $z = \gamma$; les formules (11) prendront la forme

$$y_2 = \frac{\delta Y_2}{X_2}, \quad x_2 = -\frac{\gamma\delta}{X_2}. \qquad (11)$$

La comparaison des formules (10) et (11) établit la proposition que nous avions en vue.

SUR DEUX CAS PARTICULIERS DU PROBLÈME D'APOLLONIUS;

par M. J. Neuberg.

1. Dans *Mathesis*, (3). I, p. 117, nous avons rappelé des formules élégantes données par Rutherford en 1846 et restées jusque là sans démonstration; elles résolvent le problème suivant :

Sur les côtés BC, CA, AB *d'un triangle* ABC *comme diamètres on décrit trois circonférences; calculer les rayons des cercles qui touchent ces trois cercles.*

Nous désignerons par A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC; les circonférences de diamètre BC, CA, AB seront alors représentées par $(A', \frac{1}{2}a)$, $(B', \frac{1}{2}b)$, $(C', \frac{1}{2}c)$.

Les formules de M. Rutherford ont été démontrées par notre zélé collaborateur, M J. Déprez (*Mathesis*, (3), II, p. 64).

A la même époque, M. E. Lemoine nous écrivit qu'il nous enverrait une solution de ce problème se déduisant de la solution du problème proposé au Concours général de 1875 en France, à savoir :

Mener un cercle tangent aux trois cercles tangents entre eux deux à deux et ayant pour centres les sommets d'un triangle ABC.

Cette dernière question a été traitée par M. Aubert (NAM, 1876, p. 318) et par M. Lemoine (NCM, 1880, p. 513; AFAS, 1888, p. 167).

A première vue, les deux questions paraissent être différentes; cependant elles ont des rapports très intimes et nous avons jugé utile de communiquer ici à nos lecteurs la solution remarquable de M. Lemoine.

Le dernier numéro de la *Revista trimestral de Matematicas* publiée par J. Rius y Casas (4e année, n° 13, p. 61), renferme des solutions de la question suivante proposée par M. J. De Vries :

Construire à l'intérieur d'un triangle ABC *un point* D *qui vérifie les relations*

$$AD + BC = BD + CA = CD + AB.$$

Ce problème est au fond celui du Concours général de 1875 (*).

(*) Un correspondant en indique la solution erronée par les centres isodynamiques; pour ceux-ci les produits AD.BC, BD.CA, CD.AB sont égaux.

1. Soient M, N, P les points de contact de BC, CA, AB avec le cercle inscrit au triangls ABC; on a :

$$AN = AP = p - a \equiv p_1, \quad BP = BM = p - b \equiv p_2,$$
$$CM = CN = p - c \equiv p_3.$$

Pour fixer les idées, soit (D, x) le cercle qui touche intérieurement les trois cercles (A, p_1), (B, p_2), (C, p_3) et appelons 2λ, $2\lambda'$, $2\lambda''$ les trois angles BDC, CDA, ADC. Le triangle BDC donne

$$(p_2 + p_3)^2 = (p_2 + x)^2 + (p_3 + x)^2 - 2(p_2 + x)(p_3 + x)\cos 2\lambda,$$

d'où en considérant $(p_2 + x)^2$, $(p_3 + x)^2$ comme termes du carré d'une différence :

$$(p_2 + p_3)^2 = (p_2 - p_3)^2 + 2(p_2 + x)(p_3 + x)(1 - \cos 2\lambda),$$
$$\sin^2 \lambda = \frac{p_2 p_3}{(p_2 + x)(p_3 + x)},$$

et les valeurs analogues pour $\sin^2 \lambda'$, $\sin^2 \lambda''$ que l'on substituera dans l'identité

$$\Sigma \sin^4 \lambda - 2\Sigma \sin^2 \lambda' \sin^2 \lambda'' + 4 \sin^2 \lambda \sin^2 \lambda' \sin^2 \lambda'' = 0.$$

Le lecteur constatera immédiatement que ces calculs ne font que reproduire ceux de M. Déprez (loc. cit.), de sorte que nous pouvons écrire immédiatement pour x et pour le rayon x' du cercle qui touche les trois cercles (A, p_1), (B, p_2), (C, p_3) extérieurement :

$$\frac{1}{x} = \Sigma \frac{1}{p_1} + \frac{2}{r}, \quad \frac{1}{x'} = \Sigma \frac{1}{p_1} - \frac{2}{r}.$$

M. Lemoine écrit ces résultats ainsi :

$$x = \frac{S}{2p + 4R + r}, \quad x' = \frac{S}{2p - 4R - r}.$$

Or, si un cercle (D, δ) touche trois cercles donnés (A, α), (B, β), (C, γ). le cercle (D, $\delta \pm \lambda$) touchera les cercles (A, $\alpha \mp \lambda$), (B, $\beta \mp \lambda$), (C, $\gamma \mp \lambda$), quelle que soit la longueur λ. Cette règle pour être générale exige la convention suivante : Deux cercles qui se touchent extérieurement ont des rayons de même signe; deux cercles qui se touchent intérieurement ont des rayons de signes contraires; de cette façon la distance des centres est égale à la somme algébrique des rayons..

Cela posé, si (D, x) est le cercle qui touche extérieurement les cercles (A, $p - a$), (B, $p - b$), (C, $p - c$), le cercle (D, $x + p$) touchera les cercles (A, $-a$), (B, $-b$), (C, $-c$), de sorte que D est aussi le

centre du cercle qui touche intérieurement les cercles qui ont pour diamètres les côtés du triangle anticomplémentaire de ABC; donc le rayon d'un cercle de Rutherford est $\frac{1}{2}(x+p)$ et son centre s'obtient en prolongeant DG d'une quantité égale à $\frac{1}{2}$ DG, G étant le centre de gravité de ABC.

3. Pour construire le point D, soumettons les cercles (A, p_1), (B, p_2), (C, p_3), (D, x) à une inversion qui a pour pôle le point M et qui transforme le cercle (A, p_1) en lui-même. Les cercles (B, p_2), (C, p_3) se transformeront en les deux tangentes t, t' au cercle (A, p_2) perpendiculaires à BC. Le cercle (D, x) se changera en un cercle (E, p_1) qui touche le cercle (A, p_1) et les droites t, t' et dont le centre E s'obtient en prolongeant la hauteur HA de $AE = 2p_1$. La droite ME passe évidemment par D. En prolongeant de même HB de $BE' = 2p_2$ et HC de $C'E'' = 2p_3$ on peut déterminer le point D par l'intersection des trois droites ME, NE', PE''.

En cherchant les équations de ces droites M. E. Lemoine trouve les coordonnées barycentriques du centre D : $a + r_a$, $b + r_b$, $c + r_c$, ce point est sur la droite qui joint le centre du cercle inscrit (a, b, c) au point de Gergonne (r_a, r_b, r_c), intersection des droites AM, BN, CP.

Pour l'examen des autres cas, c'est-à-dire des cercles touchant les trois cercles (A, p), (B, p_2), (B, p_3) ou les triples analogues, nous renvoyons aux articles de MM. Lemoine et Déprez.

NOTES MATHÉMATIQUES.

5. *Sur un théorème de Laguerre.* Nous avons reçu de M. Nicolesco (Bukarest) la question à proposer suivante :

Par un point de la courbe lieu des pôles des normales à une conique centrée, on peut lui mener quatre tangentes autres que celle dont le point de contact coïncide avec le point considéré. Démontrer que les quatre points de contact sont en ligne droite.

Cette proposition est la transformée par polaires réciproques de la proposition suivante énoncée par Laguerre (C. R., 1877; *Œuvres complètes*, t. II, p. 471).

Si l'on considère une tangente quelconque à la développée d'une ellipse et les quatre points où cette tangente coupe de nouveau la courbe, les tangentes menées en ces points concourent en un même point.

Voici une démonstration analytique du théorème de M. Nicolesco, un peu plus simple que celle de notre honorable correspondant.

L'équation du lieu des pôles des cordes normales à l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ est, en coordonnées cartésiennes homogènes,

$$\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} - \frac{c^6}{z^2} = 0. \tag{1}$$

La tangente au point $p(x, y, z)$ de cette courbe est représentée par

$$\frac{a^6X}{x^3} + \frac{b^6Y}{y^3} - \frac{c^6Z}{z^3} = 0, \tag{2}$$

avec la condition (1). Si cette droite passe par le point P(X, Y, Z) de la courbe (1), on a l'égalité (2) et

$$\frac{a^6}{X^2} + \frac{b^6}{Y^2} - \frac{c^6}{Z^2} = 0. \tag{3}$$

Éliminons a^6, b^6, c^6 entre les relations (1), (2) et (3); il vient

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2} & \frac{1}{z^2} \\ \frac{X}{x^3} & \frac{Y}{y^3} & \frac{Z}{z^3} \\ \frac{1}{X^2} & \frac{1}{Y^2} & \frac{1}{Z^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

En multipliant les colonnes du déterminant (4) respectivement par $\frac{x^3}{X}, \frac{y^3}{Y}, \frac{z^3}{Z}$ et posant par $\frac{x}{X} = \alpha$, $\frac{y}{Y} = \beta$, $\frac{z}{Z} = \gamma$, on trouve

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha + \beta + \gamma) = 0,$$

comme on n'a pas $\alpha = \beta$, ni $\beta = \gamma$ ou $\gamma = \alpha$, il faut que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

ou

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} + \frac{z}{Z} = 0.$$

Ainsi, du point P partent quatre tangentes dont les points de contact se trouvent sur la droite qui joint les projections sur les axes du symétrique de P par rapport à l'origine.

Voici une démonstration du théorème de Laguerre. L'équation de la développée de l'ellipse étant

$$Ax^{\frac{2}{3}} + By^{\frac{2}{3}} = Cz^{\frac{2}{3}}, \tag{5}$$

la tangente en un point M (α, β, γ) de cette courbe est

$$\frac{Ax}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{By}{\beta^{\frac{1}{3}}} = \frac{Cz}{\gamma^{\frac{1}{3}}}, \tag{6}$$

avec la condition

$$A\alpha^{\frac{2}{3}} + B\beta^{\frac{2}{3}} = C\gamma^{\frac{2}{3}}. \tag{7}$$

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point N où cette tangente rencontre la développée; elles vérifient les égalités (5) et (6). La tangente en ce point a pour équation

$$\frac{AX}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{BY}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{CZ}{z^{\frac{1}{3}}}. \tag{8}$$

Si entre (5), (6) et (7) on élimine A, B, C, on trouve

$$\begin{vmatrix} x^{\frac{2}{3}} & y^{\frac{2}{3}} & z^{\frac{2}{3}} \\ \frac{x}{\alpha^{\frac{1}{3}}} & \frac{y}{\beta^{\frac{1}{3}}} & \frac{z}{\gamma^{\frac{1}{3}}} \\ \alpha^{\frac{2}{3}} & \beta^{\frac{2}{3}} & \gamma^{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Multiplions les colonnes du déterminant respectivement par $\frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{x}$, $\frac{\beta^{\frac{1}{3}}}{y}$, $\frac{\gamma^{\frac{1}{3}}}{z}$ et posons $\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \alpha'$, $\left(\frac{\beta}{y}\right)^{\frac{1}{3}} = \beta'$, $\left(\frac{\gamma}{z}\right)^{\frac{1}{3}} = \gamma'$; l'équation (9) deviendra

$$\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha'^3 & \beta'^3 & \gamma'^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\alpha' - \beta')(\beta' - \gamma')(\gamma' - \alpha')(\alpha' + \beta' + \gamma') = 0.$$

On en conclut $\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$, c'est à dire

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{\beta^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} + \frac{\gamma^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Si l'on compare ce résultat à l'équation (8), on voit que celle-ci est vérifiée par

$$X = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{A}, \quad Y = \frac{\beta^{\frac{1}{3}}}{B}, \quad Z = -\frac{\gamma^{\frac{1}{3}}}{C}.$$

Autrement dit, la tangente en M rencontre la courbe en quatre points; les tangentes en ces points concourent en un point dont les coordonnées cartésiennes sont $-\frac{C}{A}\alpha^{\frac{1}{3}}$, $-\frac{C}{A}\beta^{\frac{1}{3}}$.

(J. N.).

×6. *Sur la question proposée* 1466 (*Mathesis*, (3), V, pp. 18 et 123). La condition

$$\frac{a}{p-a} = \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \tag{1}$$

est susceptible de diverses interprétations géométriques.

1. On sait que les droites AD, BE, CD, D, E, F étant les points de contact *intérieurs* des cercles exinscrits au triangle ABC, concourent en un point ν, appelé *point de Nagel;* ce point, anticomplémentaire du centre I du cercle inscrit, a pour coordonnées barycentriques $p-a$, $p-b$, $p-c$.

Soient D', E', F' les intersections des côtés homologues des deux triangles ABC, DEF, et soient D'', E'', F'' les milieux des segments DD', EE', FF'. Les points D', E', F' sont situés sur une même droite, appelée *polaire trilinéaire* de ν. Les droites EF, E'F' ont pour équations barycentriques

$$-\frac{x}{p-a} + \frac{y}{p-b} + \frac{z}{p-c} = 0, \quad \frac{x}{p-a} + \frac{y}{p-b} + \frac{z}{p-c} = 0.$$

La condition (1) exprime que le point I' $(-a, b, c)$ est situé sur la droite E'F' et le point I (a, b, c) sur la droite EF.

On verrait de même que les points I'', I''' appartiennent respectivement aux droites DE, DF; mais cette propriété a déjà été indiquée.

2. Soient P, Q, R les pieds des bissectrices intérieures du triangle ABC, prenons les symétriques P_1, Q_1, R_1 de ces points par rapport aux milieux des côtés correspondants de ABC. L'équation de la droite Q_1R_1 étant $-ax + by + cz = 0$, la condition 1) exprime que cette droite passe par le point de Gergonne $\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right)$.

3. Pour trouver un point U dont les distances aux sommets A, B, C

soient inversement proportionnelles à $\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}$, on décrit les circonférences qui ont pour diamètres les segments DD', EE', FF', car ceux-ci divisent BC, CA, AB harmoniquement dans les rapports $\frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}, \frac{1}{p-c} : \frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b}$.

Ces circonférences ont pour centres les points D'', E'', F'', milieux des diagonales du quadrilatère complet formé par le triangle DEF avec la droite D'E'F'; elles se coupent en deux points U, U', qui sont symétriques par rapport à la droite D''E'' et en ligne droite avec le centre O du cercle ABC, et l'on a $OU.OU' = R^2$.

Dans le triangle particulier qui satisfait à la condition (1), les deux points U, U' se confondent en un seul situé sur la circonférence ABC, et la droite D''E''F'' touche cette circonférence.

En effet, les distances UA, UB, UC étant inversement proportionnelles à $p-a$, $p-b$, $p-c$, l'égalité (1) revient à

$$BC.UA = CA.UB + AB.UC;$$

elle exprime que U est sur la circonférence ABC.

4. L'*Educational Times* a proposé récemment la question suivante :

Les cordes communes au cercle circonscrit à un triangle ABC *et aux cercles exinscrits* I', I'', I''' *rencontrent respectivement* BC, CA, AB *en des points* A', B', C' *qui sont en ligne droite.* (Townsend).

Si l'on observe que

$$A'B.A'C = \overline{A'D}^2, \ldots,$$

on voit immédiatement que les points A', B', C' coïncident avec nos points D'', E'', F''.

5. Pour que les points U, U', dans le cas général, soient réels, le plus grand des produits $\frac{a}{p-a}, \frac{b}{p-b}, \frac{c}{p-c}$ doit être moindre que la somme des autres; car les produits des côtés opposés d'un quadrangle complet réel ABCU sont proportionnels aux côtés d'un certain triangle. Autrement dit, il doit exister un triangle dont les côtés soient proportionnels à $\sin^2\frac{A}{2}, \sin^2\frac{B}{2}, \sin^2\frac{C}{2}$. (J. N.)

7. *Sur le cercle des neuf points d'un triangle.* Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC, et A'', B'', C'' les pieds des hauteurs. La circonférence de diamètre BC passant par B'' et C'', on a AB.AC'' = AC.AB'', et, par suite,

$$AC'.AC'' = AB'.AB''. \qquad (1)$$

Semblablement

$$BC'.BC'' = BA'.BA'', \quad CA'.CA'' = CB.CB''. \qquad (2)$$

Ces égalités montrent qu'il passe une circonférence α par les points B', B'', C', C''; une circonférence β par les points C', C'', A', A''; une circonférence γ par les points A', A'', B', B''.

Ces circonférences se confondent; autrement, leurs axes radicaux qui coïncident avec C'C'', A'A'', B'B'' formeraient un triangle, au lieu de concourir en un même point.

Donc les six points A', A'', B', B'', C', C'' sont situés sur une même circonférence. (MINEUR).

BIBLIOGRAPHIE.

1. **Zahlentheorie.** Fünfter Teil : **Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper**, von P. BACHMANN. Leipzig, Teubner 1905 (In-8 de XXII-548 pp.). Prix : 16 marcs.

2. **Leçons sur l'intégration** et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France, par H. LEBESGUE, maître de conférences à la Faculté de Sciences de Rennes. Paris, Gauthier-Villars, 1904 (In-8 de VII-138 pp.). Prix : 3 fr. 50.

3. **Le calcul des résidus** et ses applications à la théorie des fonctions, par E. LINDELÖF, professeur à l'Université de Helsingfors. Paris, Gauthier-Villars, 1905 (In-8 de VII-144 pp.). Prix : 3 fr. 50.

4. **Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen** von Dr. N. NIELSEN. Leipzig, Teubner, 1904 (In-8, cartonné de XII-408 pp.). Prix : 14 marcs.

5. **Lectures on the Calculus of Variations** by O. BOLZA, of the Departement of Mathematics. Chicago, The University of Chicago Press, 1904 (In-8, cartonné de XV-271 pp.). Prix : 4 dollars.

6. **Pricipios generales de la Teoria de las Funciones**, por el Dr. Z. G. DE GALDEANO, Catedrático de Cálculo infinitesimal en la Universidad de Zaragosa. Zaragoza, Casañal, 1904 (In-8 de 352 pp.). Prix : 7 pesetas.

7. **Einleitung in die Funktionentheorie** von O. STOLZ, o. Prof. a. d. Univers. Innsbrück und J. A. GMEINER, o. Prof. a. d. deutchen Universität Prag. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig, Teubner, 1904-1905 (2 vol. in-8, cartonné de VI-242 pp. et VIII-346 pp.). Prix : 6 + 9 marcs.

Ouvrages excellents sur des parties trop élevées de l'arithmétique et de l'analyse pour qu'il y ait lieu d'en parler dans *Mathesis*. La plupart de ces

ouvrages ont été analysés dans le *Bulletin des sciences mathématiques* de Darboux, auquel nous renvoyons nos lecteurs.

Grundlagen der Geometrie von Dr. D. Hilbert. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Leipzig, Teubner, 1903 (Cartonné in-8 de VI-175 pp.). Prix : 5,60 marcs.

La première édition de ce Mémoire a été publiée en 1899 chez Teubner à Leipzig (92 pp. in-8) dans la *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen* et analysée par M. Poincaré dans le *Bulletin des sciences mathématiques* (1902, (2), XXVI, 1re partie, pp. 249-272). Il en a paru une traduction avec quelques additions et modifications par M. L. Laugel dans les *Annales de l'Ecole normale supérieure* (1900, (3), XVII, pp. 103-209). La seconde édition, qui a obtenu le prix Lobatchefsky en 1903, a été analysée aussi par M. Poincaré dans le *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kazan* (1904, (2), XIV, pp. 10-48).

Les deux éditions du Mémoire de M. Hilbert et les deux analyses de M. Poincaré diffèrent l'une de l'autre sur des points essentiels. Les suppléments de la seconde édition, qui sont aussi analysés par M. Poincaré (ainsi que deux dissertations importantes de disciples de M. Hilbert, MM. Hamel et Dehn) ont pour titre : 1. Sur la ligne droite considérée comme chemin le plus court d'un point à un autre. 2. Sur l'égalité des angles à la base dans le triangle isoscèle. 3. Exposition nouvelle de la géométrie de Bolyai et Labatchefsky. 4. Sur les principes de la Géométrie. 5 Sur les surfaces à courbure constante.

Les *Grundlagen* de M. Hilbert, d'après M. Poincaré, marquent une époque dans l'étude des premiers principes de la géométrie. Malheureusement, ils sont rédigés avec tant de concision et si peu de clarté que la lecture en est presque impossible si l'on n'a pas pour se guider les comptes rendus détaillés de M. Poincaré, et encore ! Nous croyons d'ailleurs, comme nous l'avons dit antérieurement (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1905, t. XXIX, 1re partie, p. 200 ; *Mathesis*, 1905, supplément 2, pp. 1-2) que là où M. Hilbert parle de géométrie non archimédienne, il s'occupe en réalité d'analyse et non de géométrie. (P. M.)

Abstracte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie von K. Th. Vahlen. Leipzig, Teubner, 1905 (In-8 de XII-302 pp., cartonné). Prix : 12 marcs.

Essai d'exposition systématique des principes de la géométrie en n'introduisant les hypothèses et les postulats que lorsqu'ils sont absolument nécessaires, et en tenant compte, en particulier, des recherches de M. Hilbert. La première section est consacrée aux principes de l'arithmétique et de l'algèbre, les trois suivantes aux principes de la géométrie projective, euclidienne ou non ; la dernière aux principes de la géométrie métrique (euclidienne, non euclidienne, hilbertienne) avec un appendice sur la mesure des aires et des volumes, aussi en employant le nombre minimum d'hypothèses. Le livre de M. Vahlen est écrit avec une grande concision, les démonstrations n'étant souvent qu'esquissées ; c'est pourquoi il est difficile de savoir si le système d'exposition de l'auteur est irréprochable au point de vue logique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours de 1905.

Calculer la valeur de e^2 à un dix-millième près (on ne supposera pas connue la valeur du nombre e).

Solution par M. Ch. Brignon (Epinal). Nous partons de la série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots ;$$

en posant

$$s_n = 2 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1.2} + \cdots + \frac{2^n}{n!}, \quad u_n = \frac{2^n}{n!},$$

$$r_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} + \cdots,$$

nous aurons $e^2 = s_n + r_n$. On trouve facilement

$$r_n < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + \frac{2}{n+2} + \frac{2^2}{(n+2)^2} + \cdots\right];$$

d'où en sommant la progression entre crochets

$$r_n < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n} < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n+1}{n-1} = u_n \frac{2}{n-1}.$$

Cela posé, calculons les premiers termes de e^2 à 0,00001 près jusqu'à ce que nous arrivions à un terme u_n tel que $u_n \frac{2}{n-1} < 0{,}00001$. Nous aurons

$$1 + u_1 + u_2 = 5$$
$$u_3 = 1{,}33333\ldots$$
$$u_4 = 0{,}66666\ldots$$
$$u_5 = 0{,}26666\ldots$$
$$u_6 = 0{,}08888\ldots$$
$$u_7 = 0{,}02539\ldots$$
$$u_8 = 0{,}00634\ldots$$
$$u_9 = 0{,}00141\ldots$$
$$u_{10} = 0{,}00028\ldots$$
$$u_{11} = 0{,}00005\ldots$$
$$\text{somme} = 7{,}\ldots$$

On voit que $r_{11} < u_{11} \times \frac{2}{10} < 0{,}00001$; chacun des 9 nombres $u_2, u_4, \ldots, u_{11}$ ayant été calculé à moins de 0,00001 près, la somme précédente comporte de ce chef une erreur inférieure à 0,00009. Par suite.

$$c_2 > 7{,}3890 \text{ et } < 7{,}3891.$$

BONNES ET MAUVAISES DÉSIGNATIONS HISTORIQUES;

d'après M. Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague.

M. Zeuthen a publié dans les *Verhandlungen der III internationalen Mathematiker-Congresses* (Leipzig, Teubner, 1905), sous le titre : *Gebrauch und Missbrauch historischer Benennungen in der Mathematik* (pp. 536-542), de judicieuses observations historiques et critiques que nous résumons brièvement, en y ajoutant çà et là nos vues personnelles.

1. *Théorème de Pythagore.* Il est probable que des cas particuliers, au moins, de la célèbre proposition relative au carré de l'hypoténuse, ont été connus avant Pythagore, en Egypte, en Chine, ou dans l'Inde. Néanmoins il convient de continuer à appeler cette proposition *théorème de Pythagore*, parce que c'est Pythagore et les pythagoriciens qui ont fait de ce théorème la base d'une vraie *science* géométrique.

2. *Logarithmes népériens.* Le logarithme x d'un nombre y est défini par Néper au moyen de considérations cinématiques équivalentes à l'équation différentielle $ry'_x = -y$, avec la condition $x = 0$, pour $y = r$, r étant égal à dix millions. Par suite $(x : r) = -\log.\text{nat.}(y : r)$. Au fond, r est une unité supérieure employée pour éviter les fractions décimales et Néper n'appliquant ses logarithmes qu'à des quantités $(y : r)$ égales à un sinus ou à un cosinus, il a donné le signe — à y dans le second membre pour que x soit toujours positif. Il est si facile de passer de la définition de Néper à la définition actuelle des logarithmes naturels [$y'_x = y$, avec la condition $x = 0$ pour $y = 1$], qu'il semble raisonnable d'appeler comme on le fait depuis longtemps, les logarithmes naturels, *logarithmes népériens, en l'honneur* de Néper, parce qu'il en est virtuellement l'inventeur.

3. *Théorème faussement attribué à Apollonius.* Dans une ellipse ou une hyperbole, le carré d'une demi-corde conjuguée à un diamètre est proportionnelle au rectangle des segments correspondants du diamètre. Ce théorème appartient à Archimède; Apollonius l'a utilisé sous une autre forme, et y a rattaché les noms d'ellipse, d'hyperbole et de parabole par l'intermédiaire de trois problèmes célèbres résolus dans les Éléments d'Euclide (I, 43, VI, 37,38).

5. *Théorème faussement attribué à Pappus ou à Newton.* Pappus attribue explicitement à Apollonius un théorème sur les coniques, que Newton a étendu aux courbes algébriques quelconques : Le rapport (OM. ON : OM'. ON') est constant, O étant un point quelconque et (M, N), (M', N') les intersections d'une conique donnée avec des droites OMN, OM'N' *de direction donnée*, menées par O.

5. ***Théorème de Pascal dans le sens de Hilbert.*** Les points A, B, C étant sur une droite, les points A', B', C' sur une autre, AB' et A'B seront parallèles, si BC' est parallèle à B'C et AC' à A'C; aucun des six points n'est supposé au point de rencontre des deux droites (HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 2e éd. p. 27).

Ce théorème peut être regardé comme un cas très particulier du beau théorème de Pascal sur les coniques. Mais, sans doute, Pascal ne s'est jamais occupé de cette proposition particulière. Il eût donc été préférable de lui donner un autre nom que celui de théorème de Pascal.

6. ***L'axiome d'Archimède, dans le sens de Hilbert, est une définition d'Euclide empruntée à Eudoxe.*** La 4e définition du 5e livre d'Euclide est la suivante : *deux grandeurs sont dites avoir un rapport si un multiple de l'une peut surpasser l'autre.* C'est l'équivalent de la proposition appelée axiome d'Archimède par Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, 2e éd. p. 16). Archimède après, et Aristote avant Euclide, ont employé cette définition précise des grandeurs homogènes; elle est empruntée très probablement à Eudoxe puisque l'admirable théorie des proportions du livre V des *Eléments* est due, comme on le sait, à ce géomètre. La partie des *Eléments* d'Euclide (livres I, II, III, IV, XI) établie sans recourir à cette définition, pourrait être dite appartenir à la *géométrie non eudoxienne*, plutôt qu'à la *géométrie non archimédienne* (De même I, prop. 1-28 d'Euclide, appartient à la géométrie non euclidienne).

Le mot *axiome* employé pour *postulat* est contraire à la terminologie reçue depuis l'antiquité.

7. ***Les postulats d'Archimède d'après Peyrard et M. Zeuthen.*** Peyrard (1807), et après lui M. Zeuthen, ont fait remarquer qu'il est impossible de définir la longueur d'une ligne courbe ou l'aire d'une surface courbe sans les postulats suivants d'Archimède : *Une ligne convexe est plus courte qu'une ligne enveloppante aboutissant aux mêmes extrémités; une surface convexe a une aire moindre qu'une surface enveloppante aboutissant au même contour.* « En appelant ces propositions postulats d'Archimède, dit M. Zeuthen, on rappelle que ce ne sont pas les modernes qui se sont aperçus les premiers que l'on ne pouvait étudier les longueurs des lignes et des surfaces sans introduire de nouvelles définitions ». Nous ajoutons : peut-être aussi si ces désignations si justifiées s'introduisent dans la science classique, ne verra-t-on plus des philosophes (Renouvier, Delbœuf) attribuer à Archimède cette définition qui implique un cercle vicieux : *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre* (*).

(*) Aristote, Euclide, Archimède et Apollonius, selon nous, ont dit tout ce qu'il y a de plus essentiel, sur l'infini, l'indéfini, les infiniment petits, les indivisibles, les tangentes, les incommensurables, les longueurs, les aires et les volumes. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1518.

(Voir *Mathesis*, (3). V, p. 83).

ABCD *étant un tétraèdre quelconque, si un point* M *est tel que les plans* MAB *et* MCD *sont perpendiculaires ainsi que les plans* MAC *et* MBD, *les plans* MAD *et* MBC *seront également perpendiculaires. Trouver le lieu géométrique du point* M. (J. NEUBERG).

Solution par M. P. BASTIN. 1° Prenons le point M pour origine, les plans MAB et MCD pour plans des xz et des yz; nous pourrons représenter comme suit les coordonnées des sommets du tétraèdre : $(a, 0, a'')$, $(b, 0, b'')$, $(0, c', c'')$, $(0, d', d'')$. Le plan MAC sera défini par l'équation

$$\frac{a''}{a}x+\frac{c''}{c'}y-z=0.$$

Par analogie, les équations des plans MBD, MAD, MBC seront :

$$\frac{b''}{b}x+\frac{d''}{d'}y-z=0,\quad \frac{a''}{a}x+\frac{d''}{d'}y-z=0,\quad \frac{b''}{b}x+\frac{c''}{c'}y-z=0.$$

La condition de perpendicularité des plans MAC, MBD s'exprime par la relation $\frac{a''b''}{ab}+\frac{c''d''}{c'd'}+1=0$; celle-ci montre également que les plans MAD, MBC sont perpendiculaires.

2° Le point M appartient à la surface engendrée par la droite d'intersection de deux plans rectangulaires mobiles passant par AB et CD.

Prenons pour axe des z la perpendiculaire commune aux droites AB et CD, pour origine le point milieu de cette perpendiculaire, l'axe des x parallèle à la bissectrice de l'angle aigu des directions AB et CD, l'axe des y parallèle à la seconde bissectrice. Les droites AB, CD pourront être représentées pour les systèmes d'équations $(z=a,\ y=mx)$, $(z=-a,\ y=-mx)$ et nous aurons pour équations des deux plans mobiles

$$y-mx-\lambda(z-a)=0,\quad y+mx-\lambda'(z+a)=0.$$

Exprimant que ces plans sont perpendiculaires, nous trouvons $1-m^2+\lambda\lambda'=0$; l'élimination de λ et λ' donne

$$(1-m^2)(z^2-a^2)+y^2-m^2x^2=0,$$

équation qui définit un hyperboloïde à une nappe passant par AB et CD.

A′, B′, C′, D′ désignant les pieds des hauteurs du tétraèdre, nous voyons facilement que les droites BA′, AB′, DC′, CD′ sont également génératrices.

Le lieu demandé dans l'énoncé est donc la courbe commune d'intersection de trois hyperboloïdes connus ; cette courbe passe par les sommets du tétraèdre et les pieds des hauteurs.

NOTE. M. Dupont démontre la première partie de la question en prenant pour origine des coordonnées le sommet A, pour axe des z l'arête AB et pour plan des xz la face ABD ; quant à la seconde partie, il observe que le lieu demandé est la courbe commune aux trois hyperboloïdes *orthogonaux* ayant pour *génératrices principales* deux couples d'arêtes opposées du tétraèdre ABCD.

Voici avec quelques retouches la solution de M. Abramescu.

L'origine des coordonnées étant placée en M et les coordonnées des points A, B, C, D étant désignées par (x_1, y_1, z_1), ..., les équations des plans MAB, MCD seront

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0;$$

la condition de perpendicularité donne

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_4 & x_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

En exprimant que les plans MAC et MBD, MAD et MBC sont perpendiculaires, on obtient les conditions

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \cdots = 0, \qquad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \cdots = 0.$$

La somme de ces trois équations de condition donne identiquement 0 = 0 ; en effet, la somme des premiers termes

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

comme représentant un développement du déterminant nul

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 & y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 & y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

suivant les produits des déterminants dérivant des deux premières colonnes et des deux dernières colonnes.

En plaçant l'origine en un point quelconque, M. Abramescu déduit des conditions exprimant l'orthogonalité des plans (MAB, MCD), ... que le lieu du point M est une biquadratique gauche.

La première partie de la question se démontre facilement si l'on coupe les droites MA. MB, MC, MD par une sphère de centre M, les quatre points d'intersection sont les sommets d'un quadrangle sphérique dont deux couples de côtés opposés sont perpendiculaires, de manière que la figure sphérique est celle d'un triangle et de ses trois hauteurs.

Lorsque nous avons proposé la question 1567, nous n'avions pas connaissance des recherches de SCHRÖTER (*Crelle*, t. 93, p. 192) et de THIEME (*Zeitschrift für Math. u. Phys.*, t. 27, p. 56) sur la biquadratique lieu du point M.

Question 1518.

(Voir *Mathesis*, (3); V, p. 111).

Étant donnés deux trièdres SABC, S'A'B'C', *appelons* M, N, P *les points de rencontre des arêtes* SA, SB, SC *respectivement avec les faces opposées* S'B'C', S'C'A', S'A'B' *du second, et soient* M', N', P' *les points de rencontre des arêtes du second trièdre avec les faces opposées du premier.*

Cela posé : 1° *Si les points* S', M, N, P *sont situés dans un même plan, il en sera de même des points* S, M', N', P';

2° *Si les plans* S'A'M, S'B'N, S'C'P *se coupent suivant une même droite, il en sera de même des plans* SAM', SBN', SCP'. (DEGUELDRE).

Démonstration analytique. 1° Soient :

$$\alpha \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$
$$\alpha' \equiv \alpha'_1 x_1 + x'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3 + \alpha'_4 x_4 = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0,$$
$$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = 0$$

les équations des plans SBC, SCA, ... S'MNP. Les coordonnées du point M vérifient les égalités :

$$\alpha' = 0, \quad \beta = 0. \quad \gamma = 0, \quad B\beta' + C\gamma' = 0;$$

on en conclut

$$\left| \alpha'_1 \quad B\beta'_1 + C\gamma'_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 \right| = 0,$$

ou

$$B \left| \alpha'_1 \quad \beta'_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 \right| = C \left| \gamma'_1 \quad \alpha'_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 \right|,$$

les déterminants étant dénotés par leur première ligne.

Semblablement, les points N, P donnent

$$C\,|\,\beta_1'\ \gamma_1'\ \gamma_1\ \alpha_1\,| = A\,|\,\alpha_1'\ \beta_1'\ \gamma_1\ \alpha_1\,|,$$
$$A\,|\,\gamma_1'\ \alpha_1'\ \alpha_1\ \beta_1\,| = B\,|\,\beta_1'\ \gamma_1'\ \alpha_1\ B_1\,|;$$

d'où

$$|\,\alpha_1'\ \beta_1'\ \beta_1\ \gamma_1\,|\,|\,\beta_1'\ \gamma_1'\ \gamma_1\ \alpha_1\,|\,|\,\gamma_1'\ \alpha_1'\ \alpha_1\ \beta_1\,|$$
$$= |\,\gamma_1'\ \alpha_1'\ \beta_1\ \gamma_1\,|\,|\,\alpha_1'\ \beta_1'\ \gamma_1\ \alpha_1\,|\,|\,\beta_1'\ \gamma_1'\ \alpha_1\ \beta_1\,|.$$

Comme l'échange des lettres α, β, γ et α', β', γ' transforme le premier membre de cette équation dans le second et réciproquement, la même condition exprime que les points S', M, N, P ou que les points P' S, M', N', sont dans un même plan.

2° Si les plans S'A'M, S'B'N, S'C'P se coupent suivant une même droite, leurs équations sont de la forme

$$B\beta' - C\gamma' = 0, \quad C\gamma' - A\alpha' = 0, \quad A\alpha' - B\beta' = 0.$$

Le point M vérifie alors les équations

$$\alpha' = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad B\beta' - C\gamma' = 0.$$

La démonstration s'achève comme ci-dessus.

Démonstration synthétique. Le théorème de M. Degueldre peut être énoncé ainsi :

Soient a, b, c, a', b', c', s les arêtes de deux trièdres S, S' *et la droite* SS'. *Appelons x, y, z, x', y', z' les lignes d'intersection des couples de plans* (sa', bc), (sb', ca), (sc', ab) $(sa, b'c')$, $(sb, c'a')$, $(sc, a'b')$. *Cela posé :* 1° *si les droites x', y', z', sont dans un même plan, il en sera de même des droites x, y, z ;* 2° *si les plans a'x', b'y', c'z' passent par une même droite, il en sera de même des plans ax, by, cz.*

Faisant abstraction de l'énoncé primitif nous appelons A, B, C, A', B', C', X, Y, Z, X', Y', Z', U les traces des droites $a, b, \ldots z', s$ sur un plan quelconque ; nous aurons évidemment

$$X \equiv (BC, B'C'), \quad X' \equiv (B'C', UA), \text{ etc.}$$

La question 1518 est maintenant ramenée à la suivante :

On donne dans un même plan deux triangles quelconques ABC, A'B'C' *et un point* U. *Les droites* UA $\equiv f$, UB $\equiv g$, UC $\equiv h$ *rencontrent* B'C', C'A', A'B' *aux points* X', Y', Z', *et les droites* UA' $\equiv f$, UB' $= g'$, UC' $= h'$ *rencontrent* BC, CA, AB *aux points* X, Y, Z. *Cela posé :* 1° *si les points* X', Y', Z' *sont en ligne droite, il en sera de même des points* X, Y, Z ; 2° *si les droites* A'X', B'Y', C'Z' *sont concourantes, il en sera de même des droites* AX, BY, CZ.

1° La première partie de ce théorème est bien connue (voir, par exemple, *Mathesis*, 1903, p. 251); nous en indiquerons cependant une démonstration.

Une propriété du quadrilatère complet peut être énoncée ainsi : *Si les côtés d'un triangle* A'B'C' *sont coupés par une transversale aux points* X', Y', Z', *les droites* UA' *et* UX', UB' *et* UY', UC' *et* UZ' (U est un point quelconque du plan A'B'C') *sont en involution.* D'après cela, les couples ff', gg', hh' appartiennent à une involution; il en sera de même des couples de plans sa et sa', sb et sb', sc et sc'.

La réciproque étant exacte, les rayons f', g', h' de l'involution (ff', gg', hh') coupent les côtés du triangle ABC ayant ses sommets sur les rayons f, g, h en trois points collinéaires X, Y, Z.

2° Supposons maintenant les droites A'X', B'Y', C'Z' concourantes, et appelons X_1, Y_1, Z_1 les intersections des côtés homologues des triangles perspectifs A'B'C', X'Y'Z'. Les droites $UX_1 \equiv f_1$, $UY_1 = g_1$, $UZ_1 = h_1$ sont les conjuguées harmoniques de f, g, h par rapport aux couples $g'h'$, $h'f'$, $f'g'$; si l'on considère le triangle A'B'C' coupé par les transversales Y'Z', Z'X', X'Y', $X_1Y_1Z_1$, on trouve les quatre involutions

$$(f_1f', gg', hh'),\ (ff', g_1g', hh'),\ (ff', gg', h_1h'),\ (f_1f', g_1g', h_1h').$$

Réciproquement, si l'on donne l'une de ces involutions, les triangles A'B'C', X'Y'Z' sont perspectifs.

Les deux triples fgh, $f'g'h'$ peuvent échanger leurs rôles. En effet, soit f_1 le rayons conjugué harmonique de f' par rapport au couple fg, et appelons F, G, ... les intersections de f, g, ... avec une sécante quelconque. L'involution (f_1f', gg', hh') donne la relation

$$(GHFH') = (G'H'F_1H),\quad \text{ou}\quad \frac{FG}{\overline{FH}} : \frac{H'G}{\overline{H'H}} = \frac{F_1G'}{\overline{F_1H'}} : \frac{HG'}{\overline{HH'}}.$$

Or, des faisceaux harmoniques ($g'h'f'f_1$), ($ghff_1$) on conclut

$$\frac{F'H'}{\overline{F'G'}} = -\frac{F_1H'}{\overline{F_1G'}},\quad \frac{FH}{\overline{FG}} = -\frac{F_1'H}{\overline{F_1'G}};$$

par suite

$$\frac{F_1'G}{\overline{F_1'H}} : \frac{H'G}{\overline{H'H}} = \frac{F'G'}{\overline{F'H'}} : \frac{H'G'}{\overline{HH'}}\quad \text{ou}\quad (ghf_1'h') = (g'h'f'h)$$

et les couples f_1f, gg, hh' forment une involution. Il résulte de là que les triangles ABC, XYZ sont perspectifs.

Pour reprendre un terme déjà proposé on peut dire que les deux triples fgh, $f'g'h'$ sont en *évolution*. (J. Neuberg).

Solution par M. C. Servais. 1. La première propriété résulte immédiatement du théorème bien connu que les huit points S, S', M, N, P, M', N', P' sont tels que toute quadrique passant par sept d'entre eux, contient le huitième. Par hypothèse, quatre d'entre eux sont dans un même plan, les quatre restants jouissent donc de la même propriété.

2. Voici une démonstration directe : on suppose pour la facilité des notations : $A \equiv M$, $B \equiv N$, $C \equiv P$, $A' \equiv M'$, $B' \equiv N'$, $C' \equiv P'$. Par hypothèse, les quatre points S', A, B, C sont dans un plan. Le plan A'B'C' coupe les droites S'A, S'B, S'C aux points H, K, L et les côtés BC, CA, AB aux points A_2, B_2, C_2. Les droites SA', SB', SC' percent le plan S'ABC aux points A_1, B_1, C_1, qui, s'ils ne sont pas collinéaires, sont les sommets d'un triangle inscrit à ABC et dont les côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 passent par H, K, L. Les côtés opposés du quadrangle S'ABC déterminent sur la droite HKL les couples en involution (HA_2, KB_2, LC_2). Ceux du quadrangle $AA_1B_1C_1$ déterminent sur la même droite les trois couples en involution (HA'_2, KB_2, LC_2), par suite $A'_2 \equiv A_2 \equiv A_1$. De même $B_2 \equiv B_1$, $C_2 \equiv C_1$ et les quatre points S, A', B', C' sont dans un même plan.

3. *Soit* ABC *le triangle diagonal d'un quadrangle* $A_3B_3C_3D_3$; *si d'un point* A_4 *de* BC *on projette les sommets* B_3 *et* C_3 *aux points* B_4 *et* C_4 *respectivement sur* CA *et* AB, *les droites* AA_4, BB_4, CC_4 *sont concourantes*. En effet, on a : $A_4(B_3C_3BA) = -1$, d'où $(VC_4BA) = -1$, V désignant le point (A_4B_3, AB); par suite, dans le quadrangle A_1B_4AB, les droites BB_4 et AA_4 se coupent sur CC_4.

4. *On projette d'un point quelconque* T *les points* A_3, B_3, C_3 *en* A_4, B'_4, C'_4 *respectivement sur* BC, CA, AB (3), *les droites* AA_4, BB'_4, CC'_4 *sont concourantes*. En effet, si le point T se déplace sur la droite A_3A_4 supposée fixe, les faisceaux $B(B'_4)$ et $C(C'_4)$ sont projectifs; la position $T \equiv A_3$ donne un élément uni BC, ces faisceaux sont donc perspectifs. La position $T \equiv (B_3C_3, A_3A_4)$ donne les rayons homologues BA, CA; le point A appartient donc à l'axe de perspectivité. La position $T \equiv A_4$ donne deux rayons homologues se coupant sur AA_4 (3); cette droite AA_4 est donc l'axe de perspectivité et quelle que soit la position de T, les droites AA_4, BB'_4, CC'_4 sont concourantes.

5. Soient A_3, B_3, C_3 les traces des arêtes S'A', S'B', S'C' du second

trièdre sur le plan ABC; les droites B_3C_3, C_3A_3, A_3B_3 passent respectivement par les points A, B, C. L'hypothèse que les plans S'A'A, S'B'B, S'C'C se coupent suivant une même droite, exige que les droites AA_3, BB_3, CC_3 concourent en un même point D_3 et le triangle ABC est le triangle diagonal du quadrangle $A_3B_3C_3D_3$. Les arêtes sur SA', SB', SC' déterminent dans le plan ABC les points A_4, B_4, C_4 respectivement sur BC, CA, AB et les droites A_3A_4, B_3B_4, C_3C_4 passent par le point $T \equiv (SS', ABC)$; donc (4) les droites AA_4, BB_4, CC_4 sont concourantes; ce qui prouve que les plans SAA', SBB', SCC' se coupent suivant une même droite.

Questions 1537 et 1540.

(Voir *Mathesis*, (3), V, 168, 232).

1537. *Mener à deux circonférences données* A, B, *deux tangentes parallèles dont les distances à un point* M *aient un rapport donné.*

1540. *Mener à trois sphères données* A, B, C *trois plans tangents qui soient parallèles entre eux et dont les distances à un point donné* D *soient proportionnelles à trois longueurs données a, b, c.*

Solution par M. Fr. Dupont (Liége). **1537.** Soit $m : n$ le rapport donné. Traçons le cercle A', homothétique de A relativement à M, le rapport d'homothétie étant $m : n$. Si nous menons la tangente commune à A' et B, cette droite et sa parallèle menée par l'homologue sur A du point de contact de A', répondront aux conditions exigées.

Car, en supposant le problème résolu, si nous appelons C et C' les pieds des perpendiculaires abaissées des centres A et A' sur les tangentes cherchées aux cercles A et B, D et D', les intersections de MAA' avec ces droites, la similitude des triangles ACD, A'C'D' donnera

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{m}{n};$$

d'où il suit que A'C' est le rayon du cercle A' et que celui-ci touche la tangente de B.

On aura tracé par ce procédé quatre couples de tangentes répondant à la question. Les perpendiculaires abaissées de M sur deux tangentes sont comptées dans le même sens.

On obtient encore quatre autres solutions en remplaçant le cercle A' par le cercle A'' inversément homothétique de A par rapport au point M;

mais les perpendiculaires abaissées de M sur deux tangentes sont alors comptées dans des sens opposés.

Remarque. Cette méthode est applicable à deux courbes quelconques.

Autre solution. Appelons a, b les tangentes cherchées, A_1, B_1 leurs points de contact; la droite A_1B_1 passe par un centre de similitude des cercles donnés. Soient A_2, B_2 les points de rencontre de a et b avec la droite MS. Les droites A_2A, B_2B sont parallèles, et la parallèle à ces droites par M coupe la ligne des centres AB en un point C tel que $CA : CB = MA_2 : MB_2 = m : n$. De là, la construction suivante :

Diviser la ligne des centres A, B additivement et soustractivement aux points C, C′ dans le rapport donné $m : n$; mener par A une parallèle à la droite MC (ou MC′) qui coupe la droite MS (ou MS′) en A_2, S et S′ étant les centres de similitude des cercles donnés; chacune des tangentes menées de A_2 au cercle A peut être prise pour la tangente cherchée a.

Cette construction indique également huit solutions. La discussion du nombre de solutions réelles et distinctes est assez longue. (J. N.).

1540. Je construis les sphères B′, C′ homothétiques de B et C par rapport à D, les rapports d'homothétie étant $\frac{a}{b}$ et $\frac{a}{c}$; je mène un plan tangent commun aux trois sphères A, B′, C′ et les deux plans parallèles par les points homologues dans B et C des points de contact de B′ et C′. On voit immédiatement que ce terne de plans répond à la question.

On aura de cette manière huit ternes de plans tels que leurs distances au point D aient le même sens. On peut remplacer, ou successivement, ou simultanément, C′ et B′ par les sphères inversément homothétiques à C et B par rapport au point D; on obtiendrait encore par chacune de ces trois nouvelles constructions huit solutions. Mais les distances de D respectivement aux plans tangents à A et à B, à A et à C, et enfin à B et à C, seront dans ces différents cas, seules comptées dans le même sens.

On aura donc en tout trente deux solutions.

Autre solution. Appelons α, β, γ les trois plans cherchés; S_c et S'_c les centres de similitude des sphères A et B; S_b et S'_b ceux des sphères A et C. La droite MS (ou MS′) rencontre les plans α, β en deux points A_α,

B_c tels que les droites AA_c, BB_c sont parallèles. Si la parallèle à ces droites par M coupe la ligne des centres AB en D_c, on a évidemment $D_cA : D_cB = a : b$, ce qui permet de déterminer le point D_c, et par suite les points A_c, B_c en menant par A, B des parallèles à la droite MD_c.

Une construction analogue déterminerait le point de rencontre A_b de α avec la droite MS_b (ou MS'_b). On connaît ainsi deux points du plan α, etc. (J. N.).

Question 1589.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 232).

Si $P(x, y)$ *et* $Q(x, y)$ *homogènes et de même degré d'homogénéité* m, *rendent l'expression*

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

différentielle totale exacte, l'on a

$$x^2\frac{dP}{dx} - y^2\frac{dQ}{dy} = m(xP - yQ)$$

et réciproquement. (S. Chassiotis.)

Solution par MM. G. Verheugen, Rose, Abramescu, Dupont. Janne et Bastin. Puisque P et Q sont homogènes de degré m, on a

$$x\frac{dP}{dx} + y\frac{dP}{dy} = mP, \quad x\frac{dQ}{dx} + y\frac{dQ}{dy} = mQ,$$

d'où aisément,

$$x^2\frac{dP}{dx} - y^2\frac{dQ}{dy} + xy\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = m(xP - yQ). \qquad (1)$$

Or, $Pdx + Qdy$ étant différentielle totale exacte on a

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}. \qquad (2)$$

Donc

$$x^2\frac{dP}{dx} - y^2\frac{dQ}{dy} = m(xP - yQ). \qquad (3)$$

Réciproquement, de (1) et (3), on déduit

$$xy\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0$$

c'est-à-dire (2), puisque xy n'est pas constamment nul.

Question 1541.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 255).

On considère une ellipse E *et un cercle* C.

De chaque point M *de l'ellipse comme centre on décrit un cercle* Σ *tangent au grand axe.*

Le lieu des centres de similitude des cercles C *et* Σ *se compose de deux coniques* Γ *et* Γ'.

Si le centre de C *reste fixe et si son rayon varie, le lieu des points d'intersection de* Γ *et* Γ' *se compose des deux sommets du grand axe de* E, *et d'une hyperbole* H. (E. N. Barisien).

Solution par MM. Abramescu, Fr. Dupont, Dalle, Bastin, Rose, H. Lez et Couvert. Soient (α, β) et λ les coordonnées et le rayon du cercle C; M $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ un point de E. Les coordonnées du centre de similitude externe seront

$$x = \frac{\alpha b\sin\varphi - \lambda a\cos\varphi}{b\sin\varphi - \lambda}, \quad y = \frac{\beta b\sin\varphi - \lambda b\sin\varphi}{b\sin\varphi - \lambda}; \tag{1}$$

De (1) on déduit :

$$\sin\varphi = \frac{\lambda y}{b(\lambda - \beta + y)}, \quad \cos\varphi = \frac{\lambda x - \beta x + \alpha y}{a(\lambda - \beta + y)};$$

comme $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, on obtient pour la conique (Γ) :

$$(\Gamma) \qquad \frac{(\lambda x - \beta x + \alpha y)^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 y^2}{b^2} = (\lambda - \beta + y)^2. \tag{2}$$

En changeant dans (2) λ en $-\lambda$, l'on trouve pour (Γ') :

$$(\Gamma') \qquad \frac{(\lambda x - \alpha y + \beta x)^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 y^2}{b^2} = (\beta + \lambda - y)^2. \tag{3}$$

Retranchant les équations (2) et (3) l'une de l'autre, on trouve pour le lieu des points d'intersection des coniques (Γ) et (Γ') lorsque λ varie, l'hyperbole :

$$(H) \qquad x(\alpha y - \beta x) = a^2(y - \beta)$$

qui passe aux points A$(a, 0)$, A'$(-a, 0)$, les sommets du grand axe de E.

Lorsque M est en A ou A', le cercle variable se réduit à son centre et les centres de similitude coïncident avec ce centre. Donc les coniques (Γ), (Γ') et l'hyperbole (H) passent par A et A'. L'hyperbole (H) passe aussi par C; ce point correspond à $\lambda = 0$. Une asymptote a pour équation $x = \frac{a^2}{a}$; l'autre est parallèle à OC.

La courbe (H) est la même pour toutes les ellipses de même axe AA'.

Solution par M. V. Retali. Résolvons la question plus générale : « On donne dans un plan une droite g, un cercle C et une courbe quelconque Ω ; de chaque point M de Ω comme centre on décrit un cercle Σ tangent à g : trouver le lieu des centres de similitude des cercles C et Σ ».

Appelons O le centre et r le rayon de C ; M' et O' les projections des points M et O sur g ; S et S' les centres de similitude des cercles C, Σ ; soit enfin G l'intersection de la droite OM avec g : la figure donne immédiatement :

$$(MOSG) = \frac{MS}{OS} : \frac{MG}{OG} = -\frac{OO'}{r} = -\frac{\beta}{r}.$$

Le lieu de S est donc une courbe Γ homologique à Ω, O étant le centre et g l'axe d'homologie, la caractéristique (invariant absolu) de l'homologie est

$$(OGMS) = 1 - (MOSG) = 1 + \frac{\beta}{r}.$$

De même, le lieu de l'autre centre S' de similitude est la courbe Γ' qui correspond à Ω dans l'homologie dont O est le centre, g l'axe et $1 - \frac{\beta}{r}$ la caractéristique.

Il s'ensuit que les trois courbes Ω, Γ, Γ' coupent la droite g aux mêmes points, ont mêmes tangentes issues du point O, etc.

Prenons l'origine des coordonnées rectangulaires au centre de C et l'axe des x parallèle à g ; les coordonnées de S' sont données par les formules

$$X = \frac{rx}{y + r - \beta}, \quad Y = \frac{ry}{y + r - \beta},$$

dont les inverses sont :

$$x = (r - \beta)\frac{X}{r - Y}, \quad y = (r - \beta)\frac{Y}{r - Y}. \qquad (1)$$

Au moyen des relations (1) on passe de l'équation de Ω à celle de Γ'. Pour l'homologie (M, S) il suffit de changer r en $-r$. Les droites correspondantes à la droite à l'infini du système (M) dans les homologies (M, S), (M, S') sont respectivement $y = -r$, $y = +r$, savoir les tangentes au cercle C parallèles à l'axe g d'homologie; l'on peut donc construire aisément Γ et Γ' lorsque Ω est donnée.

Dans le cas particulier proposé, Ω est une ellipse E dont le centre (α, β) et ses foyers réels sont sur la droite g; son équation est donc

$$b^2(x-\alpha)^2 + a^2(y-\beta)^2 = a^2b^2.$$

Par les formules (1), on obtient pour Γ, Γ′ :

Γ) $b^2[r(X-\alpha) + (\beta X - \alpha Y)]^2 + a^2r^2(Y-\beta)^2 = a^2b^2(Y+r)^2$

Γ′) $b^2[r(X-\alpha) - (\beta X - \alpha Y)]^2 + ar^2(Y-\beta)^2 = a^2b^2(Y-r)^2$.

Ces deux coniques passent par les sommets $(\alpha \pm a, \beta)$ de E, etc.

Lorsque r varie, les coniques Γ, Γ′ qui correspondent à une même valeur de r, ont en commun, outre les deux sommets de E deux autres points variables; pour avoir le lieu de ces derniers il suffit d'éliminer r entre les équations de Γ, Γ′. En soustrayant membre à membre, et supprimant le facteur $4rb^2$ on trouve l'équation

$$(X-\alpha)(\beta X - \alpha Y) = a^2Y, \qquad (2)$$

qui représente, en général, une hyperbole passant par le centre de C, etc.; mais si le centre de C est sur le petit axe de C, $\alpha = 0$ et (2) devient la parabole $\beta X^2 = a^2Y$; si $\beta = 0$, (2) se décompose en deux droites, etc.

Question 1543.

(Voir *Mathesis*, (3); V, 256).

Deux coniques K^2 *et* C^2 *se touchent au point* P *et se coupent aux points* 3, 4; *on prend sur* C^2 *un point quelconque* O *et l'on détermine sur* C^2 *les deux points* E, F *qui sont séparés harmoniquement par les deux couples* 3, 4; P, O.

Démontrer que les deux coniques qui passent par O *et ont un double contact avec* K^2 *respectivement sur les droites* PE, PF *ont un contact du deuxième ordre avec* C^2 *au point* P. (V. Retali).

Solution par M. Aenden Boom. Soient E_1 et F_1, les points (K^2, PE) et (K^2, PF), Σ_1 la conique ayant un double contact avec K^2 sur la corde PE_1. Les coniques C^2 et Σ_1 tangentes en P sont homologiques. Elles auront un contact de second ordre si l'axe d'homologie passe par P. Les tangentes à la courbe C^2 aux points E, F se coupent au point $O_1 \equiv (PO, 34)$, car $(POEF) = -1$. Les coniques C^2 et K^2 se correspondent dans l'homologie (P, 34), les tangentes aux points homologues E, E_1 se coupent sur

l'axe d'homologie 34 au point O_1. Le faisceau harmonique P (POEF) est coupé par Σ_1 suivant la ponctuelle harmonique (POE_1F_1) et les tangentes en E_1 et F_1 à cette courbe se coupent sur PO au point O_1. Ainsi la tangente en F à la courbe C^2 et la tangente en F à la conique Σ_1 se coupent au point O_1. Ce point appartient donc à l'axe d'homologie des coniques C^2 et Σ_1, cet axe contient d'ailleurs le point commun O de de C^2 et Σ_1 et passe par P.

M. Sterckens a donné une bonne solution analytique de la même question en rapportant la figure au triangle de référende P34. M. Bastin a aussi résolu analytiquement cette question.

×Question 1543.

(Voir *Mathesis*, (3); V, p. 256).

On mène par les sommets d'un triangle ABC *trois droites* AA_1, BB_1, CC_1 *faisant avec les côtés opposés des angles égaux dans le même sens. Les parallèles menés par le pied* A_1 *de la première droite* AA_1 *aux droites* BB_1, CC_1 *rencontrent respectivement* AC, AB *aux points* B_a, C_a. *Soient* C_b, A_b, A_c, B_c *les points analogues déduits de* BB_1, CC_1.

Démontrer que les six points B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c *sont situés sur un cercle de Tucker.*

Cette construction d'un cercle de Tucker résulte de la question 2922 posée par M. I. Malo dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (juin 1905). Comparez une note de ce journal, 1906, p. 26. (J. N.).

Solution par MM. E. Weber (Liége), Sterckens et Abramescu. Il suffit de démontrer que les droites C_bB_c, B_aA_b, A_bB_a forment un triangle A'B'C' homothétique à ABC par rapport au point de Lemoine K.

1. Des proportions

$$AC_b : AC_1 = AB_1 : AC, \qquad AC_1 : AB = AB_c : AB_1$$

on déduit, par multiplication, $AC_b : AB = AB_c : AC$; donc C_bB_c est parallèle à CB.

2. Des triangles équiangles ABA_1 et AA_1C_c, ACA_1 et AA_1B_a on conclut l'égalité des angles AA_1C_a et B, AA_1B_a et C. Par suite, le quadrilatère $AC_aA_1B_a$ est inscriptible et l'angle $AB_aC_a = AA_1C_a = ABC$. Il en résulte que B_aC_a est antiparallèle à BC dans l'angle A.

3. $AC_aA'B$ étant un parallélogramme, AA' passe par le milieu de l'antiparallèle B_aC_a; c'est donc une symédiane.

Remarques I. Soit θ l'angle $AA_1C = BB_1A = CC_1B$. Dans la circonférence $AC_aA_1B_a$ les cordes AA_1, B_aC_a sous-tendent des angles égaux

à θ et A ; donc

$$\frac{B_aC_a}{\sin A} = \frac{AA_1}{\sin\theta} = \frac{h_a}{\sin^2\theta} = \frac{2R\sin B\sin C}{\sin^2\theta}.$$

On en conclut

$$B_aC_a = C_bA_b = A_cB_c = \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin^2\theta}.$$

Les triangles semblables ABA_1 et AA_1C_a, ACA_1 et AA_1B_a donnent

$$\overline{AA_1}^2 = AC_a.AB = AB_a.AC,$$

d'où l'on déduit

$$AC_a = \frac{\overline{AA_1}^2}{c} = \frac{h_a^2}{c\sin^2\theta} = \frac{4R^2\sin^2 B\sin^2 C}{c\sin^2\theta} = 2R\frac{\sin^2 B\sin C}{\sin^2\theta},$$

$$AB_a = 2R\frac{\sin B\sin^2 C}{\sin^2\theta}, \qquad BC_a = 2R\frac{(\sin^2\theta - \sin^2 B)\sin C}{\sin^2\theta}. \quad (1)$$

II. On sait que les triangles $C_aA_bB_c$, $B_aC_bA_c$ sont directement semblables à ABC et que chacun de leurs côtés fait avec un côté adjacent de ABC un même angle

$$\varphi = C_bA_cB = A_cB_aC = B_aC_bA = B_cA_bC = A_bC_aB = B_aA_cC ;$$

cherchons la relation entre les angles θ et φ. Le triangle BC_aA_b donne

$$\frac{\sin(B+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{BC_a}{BA_b}, \qquad \text{ou} \qquad \sin B\cot\varphi = \frac{BC_a}{BA_b} - \cos B. \quad (2)$$

Or, d'après les formules (1),

$$BC_a = 2R\frac{(\sin^2\theta - \sin^2 B)\sin C}{\sin^2\theta}, \qquad BA_b = 2R\frac{\sin A\sin^2 C}{\sin^2\theta},$$

de sorte que l'égalité (2) se transforme en

$$\cot\varphi = \frac{\sin^2\theta - \sin^2 B}{\sin A\sin B\sin C} - \cot B = \frac{\sin^2\theta}{\sin A\sin B\sin C} - \cot V, \quad (3)$$

V étant l'angle de Brocard de ABC.

III. L'équation d'un cercle en coordonnées barycentriques est

$$\Sigma a^2yz - (ux + vy + wz)\Sigma x = 0,$$

où u, v, w sont les puissances de A, B, C par rapport au cercle. Pour le cercle $A_bB_cC_a$ on a

$$u = -AC_b.AC_a = 2R\frac{(\sin^2\theta - \sin^2 A)\sin C}{\sin^2\theta}\cdot 2R\frac{\sin^2 B\sin C}{\sin^2\theta};$$

on en conclut l'équation de ce cercle

$$\Sigma a^2yz - 4R^2 \frac{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\sin^4 \theta} \Sigma \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 A} - 1 \right) x = 0.$$

IV. Cette équation ne changeant pas quand on remplace θ par $\pi - \theta$, on obtient le même cercle de Tucker en remplaçant les obliques AA_1, BB_1, CC_1 par leurs symétriques par rapport aux hauteurs du triangle ABC.

Cette propriété peut encore s'établir comme il suit. La tangente en A au cercle $AC_cA_1B_c$ est parallèle à BC; car elle fait avec AB un angle égal à $AB_cC_c = ABC$. Il suit de là que la circonférence passe aussi par A_2 et que l'angle $AC_cA_2 = ACA_1 = AA_2A_1$.

V. Cherchons l'angle θ dans quelques cas particuliers.

a. La question 1543 renferme une généralisation intéressante du *cercle de Taylor* lequel correspond à

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

b. Si les antiparallèles B_cC_c, C_aA_a, A_cB_c passent par K, les côtés des triangles $C_cA_aB_c$, $B_cC_aA_c$ sont perpendiculaires à un côté de ABC et le cercle circonscrit à ces triangles prend le nom de *second cercle de Lemoine*. On a alors, par la formule (3),

$$\sin^2 \theta = \cot V \sin A \sin B \sin C = 1 + \cos A \cos B \cos C,$$

d'où

$$\cos^2 \theta = - \cos A \cos B \cos C,$$
$$\operatorname{tg}^2 \theta = - \cot V \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Le triangle doit être obtusangle pour que θ soit réel. Les points A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite, ainsi que les points A_2, B_2, C_2 (Gob. *Mathesis*, 1898, p. 129).

c. Les parallèles aux côtés B_cC_c, C_aA_c, A_aB_a passent par K. Alors $\varphi = V$ et le cercle circonscrit aux deux triangles $C_aA_aB_c$, $B_cC_aA_c$ est le *premier cercle de Lemoine*. On a maintenant

$$\sin^2 \theta = 2 \cot V \sin A \sin B \sin C$$
$$= 2 (1 + \cos A \cos B \cos C) = 2 \sin^2 \theta_1,$$

θ_1 désignant l'angle θ dans le cas précédent. Pour que le premier cercle de Lemoine admette la détermination indiquée ici, le triangle ABC doit être obtusangle et l'angle θ_1 ne peut excéder 45°.

La question 1541 a été également résolue par MM. Bastin et H. Lez. Les

remarques I, II, III, IV, V sont dues en grande partie à M. WEBER; nous les avons complétées par-ci et par-là. Quelques-unes des formules se trouvent aussi dans la solution de M. LEZ. (J. N.).

Question 1545.

(Voir *Mathesis*, 1905, p. 256).

De chaque point $M(x, y)$ *d'une courbe* C, *on déduit un point* $M_1(x_1, y_1)$ *au moyen des formules*

$$x_1 = ax + b, \quad x_1^2 + y_1^2 = a(x^2 + y^2) + c. \tag{1}$$

Le point M_1 *décrit une seconde courbe* C_1. *Démontrer que les normales aux points* M *et* M_1 *se coupent sur l'axe* Ox.

Si l'on remplace les formules (1) *par celles-ci :*

$$x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 = \alpha x + \beta, \quad x^2 + y^2 + 2a'x = \gamma x_1 + \delta, \tag{2}$$

les normales en M *et* M_1 *rencontrent* Ox *en deux points correspondants de deux ponctuelles projectives.* (J. NEUBERG).

Solution par MM. FR. DUPONT et ABRAMESCU. Les abscisses à l'origine des normales aux courbes C et C_1 sont données par les formules :

$$X = \frac{x\,dx + y\,dy}{dx}, \quad X_1 = \frac{x_1 dx_1 + y_1 dy_1}{dx_1};$$

d'où

$$\frac{X_1}{X} = \frac{x_1 dx_1 + y_1 dy_1}{x\,dx + y\,dy} \cdot \frac{dx}{dx_1}.$$

1°) Or, en différentiant les équations (1) on trouve :

$$\frac{dx}{dx_1} = \frac{1}{a}, \quad \frac{x_1 dx_1 + y_1 dy_1}{x\,dx + y\,dy} = = a.$$

Donc $X = X_1$.

2°) En différentiant les équations (2), on obtient

$$x_1 dx_1 + y_1 dy_1 = \tfrac{1}{2}\alpha dx - a\,dx_1 \quad \text{et} \quad x\,dx + y\,dy = \tfrac{1}{2}\gamma dx_1 - a'dx.$$

Donc $$X = \frac{1}{2}\alpha \frac{dx}{dx_1} - a \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{1}{2}\gamma \frac{dx_1}{dx} - a'.$$

Eliminons $\dfrac{dx_1}{dx}$ entre ces équations; nous aurons

$$(X + a')(X_1 + a) = \tfrac{1}{4}\alpha\gamma,$$

ce qui démontre le théorème. Les points d'abscisses $-a'$, $-a$ sont les points de fuite des deux ponctuelles.

Ont résolu la même question MM. SEAM, BASTIN, STERCKENS et ROSE.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1268. On considère une pyramide régulière SABCD à base carrée de côté a, dont la hauteur $SH = h$. Exprimer au moyen de a et de h le rayon R de la sphère circonscrite et le rayon r de la sphère inscrite.

Ensuite, trouver le lieu des points de rencontre des côtés opposés de la section par divers plans menés par C parallèlement à BD ou menés par BC.

1269. Si l'égalité

$$(x-\alpha_1)^2+(x-\alpha_2)^2-2(x-\beta_1)(x-\beta_2)=0$$

est une *identité*, il en est de même de l'égalité

$$(x-\beta_1)^2+(x-\beta_2)^2-2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=0.$$

(Spiess).

1270. Faire tourner autour d'un axe donné d dans le plan horizontal un segment rectiligne AB donné dans le même plan, jusqu'à ce qu'il soit vu sous un angle droit d'un point (C, C') donné dans l'espace par ses deux projections.

(*Bacc. math.*, Clermont, juillet 1905).

Le milieu M de AB décrit une circonférence ω dans un plan π perpendiculaire à d; il appartient aussi à la sphère de centre (C, C') et de rayon AM est à l'intersection de cette sphère avec le plan π; donc il se détermine au moyen de deux cercles qu'on rabattra sur le plan horizontal autour de la trace du plan π.

1271. Résoudre l'équation

$$\frac{\cos^4\theta}{\cos^2 x}+\frac{\sin^4\theta}{\sin^2 x}=1.$$

L'équation se ramène à $(\sin^2 x-\sin^2\theta)^2=0$; la solution $\sin x=\pm\sin\theta$ s'aperçoit immédiatement.

1272. Montrer que toute corde AB d'une ellipse qui est parallèle à la corde d'un quadrant de l'ellipse jouit de la propriété suivante : Si de A et B on abaisse des perpendiculaires sur les axes, les deux rectangles ainsi formés dont l'un a pour sommets opposés A et le centre de l'ellipse, l'autre le sommet B et le centre de l'ellipse, sont équivalents en surface. (E. N. Barisien).

La propriété est évidente lorsqu'il s'agit d'une circonférence; une projection ramène le cas général à ce cas particulier.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1561**. On peut trouver sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC une infinité de triples de points A_1, B_1, C_1 tels que les triangles A_1CB_1, B_1AC_1, C_1BA_1 soient équivalents. Quand on donne le point A_1, il suffit de mener A_1B_2 parallèle à AB et rencontrant AC en B_2, B_2C_1 parallèle à BC et rencontrant AB en C_1, C_1A_2 parallèle à CA et coupant BC en A_2, enfin A_2B_1 parallèle à BA.

Quand on donne la surface A_1CB_1, comment construire le triple $A_1B_1C_1$? (Sanjana).

1562 On forme toutes les permutations distinctes des lettres du mot *parisienne*. On demande le nombre de ces permutations : 1° où cinq lettres consécutives forment le mot *perse*; 2° où cinq lettres consécutives sont celles du mot *perse* (abstraction faite de l'ordre); 3° où il reste le mot *perse* si on supprime les autres lettres; 4° où trois consonnes, et seulement trois, se suivent; 5° où trois voyelles, et seulement trois, se suivent.

(J. Neuberg).

×**1563**. Dans un quadrilatère lobatchefskien ABCD, rectangle en B et C et où le côté AD est asymptote de BC, chercher les relations qui lient les côtés $a = AB$, $c = CD$, 1° au côté $AD = d$; 2° au côté $BC = b$.

1564. Trouver dans le plan du triangle ABC une droite u telle que les trois coniques σ_a, σ_b, σ_c qui touchent u et qui ont pour foyers respectivement B et C, C et A, A et B soient semblables.

Les secondes tangentes communes à ces coniques considérées deux à deux forment un triangle A'B'C'. Etant donné ce triangle A'B'C', en déduire u et le triangle ABC.

L'*Ed. Times*, dans la question 15923 proposée par M. Youngman, dit que ABC est le premier triangle de Brocard de A'B'C'. La direction des côtés de ABC nous paraît être bien indiquée; mais nous avons des doutes sur l'entière exactitude de la proposition. (J. N.).

1565. D'un point M quelconque d'une parabole on abaisse les deux normales à la courbe, dont les pieds sont P et Q.

Trouver : 1° l'enveloppe de la droite qui joint les centres de courbure relatifs à P et Q;

2° Le lieu du point de rencontre de cette droite; *a*) avec PQ; *b*) avec la tangente en M. (E. N. Barisien.)

Rectification. Page 54, ligne 13 et 14, lire :

$$\rho_1 = x_1 + \frac{p}{2} = \frac{y_1^2 + p^2}{2p}, \ldots; \quad \sqrt{2\rho_1 - p} + \sqrt{2\rho_2 - p} + \sqrt{2\rho_3 - p} = 0. \text{ (H. Lez.)}$$

SUR UNE FORMULE APPROCHÉE DONNANT x EN FONCTION DE SIN x ET COS x,

par M. le Professeur Paul Stäckel (Hanovre).

Dans un article de *Mathesis*, (2) VII, p. 130, M. Lampe a traité par la méthode des coefficients indéterminés le problème suivant :

Déterminer les coefficients $a_1, a_2, \ldots a_n$ par la condition que le développement de l'expression

$$L_n(x) \equiv x - (a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx)$$

suivant les puissances de x commence par la plus haute puissance possible de x.

Je vais indiquer ici pour cette question une solution qui conduit presque sans calculs au but cherché et qui met en évidence une propriété remarquable de $L_n(x)$. A cet effet, observons que la dérivée $L_n'(x)$ de $L_n(x)$ par rapport à x jouira de la même propriété de commencer par la plus haute puissance possible de x. Or, les cosinus des multiples de x étant des fonctions rationnelles de cos x, $L_n'(x)$ est une fonction entière du n^e degré de cos x et, par suite, de

$$1 - \cos x = \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{24} x^4 + \cdots$$

On satisfait donc à la condition qu'on s'est imposée, en prenant

$$L_n'(x) \equiv A(1 - \cos x)^n, \qquad (1)$$

où A représente une constante à déterminer. Il résulte de là que

$$L_n(x) \equiv A \int_0^x (1 - \cos x)^n \, dx.$$

Remplaçons maintenant $1 - \cos x$ par $2 \sin^2 \frac{1}{2} x$ et appliquons l'égalité connue (conséquence de la formule de Moivre) :

$$\sin^{2n} u = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{1}{2^{2n-1}} \Sigma (-1)^\alpha C_{2n}^{n-\alpha} \cos 2\alpha u,$$

où le signe sommatoire s'étend aux valeurs $\alpha = 1, 2, \ldots n$. Il vient

$$L_n(x) = \frac{A}{2^n} C_{2n}^n x + \frac{A}{2^{n-1}} \Sigma (-1)^\alpha C_{2n}^{n-\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha}.$$

Le coefficient de x devant être égal à l'unité, on a

$$A = \frac{2^n . n! n!}{(2n)!},$$

et l'on retrouve ainsi le résultat indiqué par M. Lampe, à savoir

$$L_n(x) = x + \frac{2.n!n!}{(2n)!}\Sigma(-1)^\alpha C_{2n}^{n-\alpha}\frac{\sin \alpha x}{\alpha}.$$

Comme la dérivée

$$L_n'(x) = \frac{2^n.n!n!}{(2n!)}(1-\cos x)^n > 0,$$

la formule d'approximation :

$$x = \frac{2.n!n!}{(2n)!}\Sigma(-1)^{\alpha-1} C_{2n}^{n-\alpha}\frac{\sin \alpha x}{\alpha}$$

comporte une erreur qui croît avec x. Lorsque x est petit, on aura une valeur approchée de l'erreur commise en prenant le premier terme du développement de $L_n(x)$ suivant les puissances de x. Ce terme a la forme $c_n x^{2n+1}$; M. Lampe a calculé le coefficient c_n seulement pour $n = 2, 3, 4, 5$. Mais comme le développement de la dérivée $L_n'(x)$ commence par $(2n+1)c_n x^{2n}$, on voit que

$$(2n+1)c_n = A.2^{-n} = \frac{n!n!}{(2n)!}.$$

M. Lampe s'était proposé de trouver des formules desquelles on puisse déduire des valeurs approchées de l'arc en fonction de sin et cos; à cet effet il transforme l'expression de $L_n(x)$ en remplaçant $\sin 2x$, $\sin 3x$, ... par leurs valeurs en $\sin x$ et $\cos x$, ce qui donne une égalité de la forme

$$L_n(x) = x - \sin x(B_0 + B_1\cos x + B_2\cos^2 x + \cdots + B_{n-1}\cos^{n-1} x), \quad (2)$$

et il indique les formules cherchées pour $n = 2, 3, 4, 5$.

Mais notre égalité (1) donne un procédé simple et direct pour obtenir les coefficients $B_0, B_1, B_2, \ldots$ En effet, dérivons l'égalité (2); il vient

$$A(1-\cos x)^n = 1 - \cos x(B_0 + B_1\cos x + \cdots + B_{n-1}\cos^{n-1} x)$$
$$+ \sin^2 x(B_1 + 2B_2\cos x + \cdots + (n-1)B_{n-1}\cos^{n-2} x).$$

Dans cette nouvelle égalité, remplaçons $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, puis identifions les deux membres après avoir effectué les opérations indiquées; nous aurons les formules de récurrence

$$nB_{n-1} = (-1)^{n-1}A,$$
$$(n-1)B_{n-2} = (-1)^{n-2}C_n^1 A,$$
$$(n-2)B_{n-3} = (-1)^{n-3}C_n^2 A + (n-1)B_{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-\alpha+1)B_{n-\alpha} = (-1)^{n-\alpha}C_n^\alpha A + (n+\alpha-2)B_{n-\alpha+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2B_1 = -C_n^2 A + 3B_2,$$
$$B_0 = C_n^1 A + 2B_2;$$

en outre, l'égalité des termes indépendants de cos x donne

$$B_1 = A - 1,$$

relation qui pourrait également servir à déterminer successivement B_3, B_5, B_7...

II.

Dans la suite de son article, M. Lampe établit quelques formules qui sont des cas particuliers du problème suivant :

Déterminer les constantes $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ *et* $c_0, c_1, \ldots c_r$, *où* $n = r$ *ou* $> r$ *par la condition que le développement de l'expression*

$$x(c_0 + c_1 \cos x + \cdots + c_r \cos rx)$$
$$- [b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_{n-1} \sin (n-1)x + \sin nx]$$

suivant les puissances de x *commence par la plus haute puissance possible de* x.

Admettons que la somme $c_0 + c_1 + \cdots + c_r$ soit différente de zéro, hypothèse permise comme on pourra le constater; alors le problème précédent est identique avec celui-ci :

Déterminer les constantes $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ *et* $c_0, c_1, \ldots c_r$ *par la condition que le développement de l'expression*

$$L_{n,r}(x) = x - \frac{b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_{n-1} \sin (n-1)x + \sin nx}{c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_r \cos rx} \quad (3)$$

suivant les puissances de x *commence par la plus haute puissance possible de* x.

Pour les mêmes valeurs des constantes $b_1, b_2, \ldots$ et $c_0, c_1, \ldots$ le développement de la dérivée $L'_{n,r}(x)$ suivant les puissances de x commencera également par la plus haute puissance possible de x, et il en sera encore ainsi du développement du numérateur de la fraction qui représente la dérivée de $L'_{n,r}$ $x)$ déduite de (3), puisque le dénominateur de cette fraction ne s'annule avec x. Mais ce numérateur peut être transformé en une fonction entière de degré $n + r$ de cos x ou de $1 - \cos x$; car cos mx est une fonction entière de degré m de cos x et sin mx est égal au produit de sin x par une fonction entière de degré $m - 1$ de cos x. De là on peut conclure comme ci-dessus que le numérateur de $L'_{n,r}$ a la forme $B(1 - \cos x)^{n+r}$, B étant une constante. En identifiant ce numérateur avec $B(1 - \cos x)^{n+r}$, on trouve pour les $n + r + 1$ constantes $b_1, b_2, \ldots c_0, c_1, \ldots c_r$, B un nombre égal d'équations. Cepen-

dant la résolution de ces équations serait assez pénible, et pour le problème plus général on doit préférer la méthode de M. Lampe, à savoir le développement de l'expression

$$x(c_0 + c_1 \cos x + \cdots + c_r \cos rx)$$
$$-[b_1 \sin x + \cdots + b_{n-1} \sin (n-1)x + \sin nx].$$

Les explications que je viens de donner ont établi la proposition que la dérivée $L'_{n,r}(x)$ se ramène à

$$\frac{B(1-\cos x)^{n+r}}{(c_0 + c_1 \cos x + \cdots + c_r \cos rx)^2},$$

forme qu'il serait pénible d'établir par un calcul direct.

Par exemple, on trouve

$$D\left[x - \frac{28 \sin x + \sin 2x}{6(3+2\cos x)}\right] = -\frac{2}{3}\frac{(1-\cos x)^3}{(3+2\cos x)^2}.$$

Les formules de M. Lampe peuvent ainsi fournir d'intéressants exercices de différentiation.

NOTES MATHÉMATIQUES.

8. *Sur la question* 1534 (*Mathesis*, 1905, pp. 200 et 275). Il s'agit de transformer une courbe quelconque Δ en une autre Δ_1 telle qu'il existe un rapport constant K entre l'abscisse à l'origine de la tangente à Δ et l'ordonnée à l'origine de la normale au point correspondant de Δ_1.

M. P. Bastin nous adresse de ce problème une solution élégante et simple que nous reproduisons malgré une lacune.

L'équation de condition

$$\frac{xdy - ydx}{dy} = K\frac{x_1 dx_1 + y_1 dy_1}{dy_1}$$

peut s'écrire

$$d\left(\frac{x}{y}\right) : d\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}Kd(x_1^2 + y_1^2) : dy_1.$$

On y satisfait en posant

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2}nKd(x_1^2 + y_1^2), \quad d\left(\frac{1}{y}\right) = ndy_1, \qquad (1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} n\mathrm{K}(x_1^2 + y_1^2) + \alpha, \quad \frac{1}{y} = ny_1 + \beta,$$

si n est une constante.

Peut-on établir que dans les formules (1), n ne peut-être fonction de x et y, lorsque Δ est une courbe quelconque(*).

×●. *Corollaire du théorème de Fermat.* Ce théorème peut être énoncé ainsi : *Si n est un nombre premier, $a^n - a$ est toujours divisible par n.* On en déduit facilement la proposition suivante :

Si n est un nombre premier

$$(a + b + \cdots + l)^n - a^n - b^n - \cdots - l^n = \mathrm{M}.n. \qquad (1)$$

En effet,

$$(a + b + \cdots + l)^n - (a + b + \cdots + l) = \mathrm{M}.n,$$
$$a^n - a = \mathrm{M}.n, \quad b^n - b = \mathrm{M}.n, \quad \cdots, \quad l^n - l = \mathrm{M}.n.$$

En soustrayant de la première de ces égalités toutes les autres, on obtient l'égalité (1).

Pour démontrer la proposition on pourrait aussi développer $(a + b + \cdots + l)^n$ et observer que les coefficients des termes autres que a^n, b^n, $\cdots$ l^n sont divisibles par n. (WISSENLINK, *Wiskundig Tijdschrift*, t. I, p. 176)

×●. *Point isopérimétrique.* Soient D, E, F les points où les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC touchent les cercles exinscrits correspondants. Les droites AD, BE, CF se coupent en un même point ν qui est le centre du cercle inscrit au triangle A'B'C' dont les côtés sont les parallèles menées aux côtés de ABC par A, B, C. Le point ν, anticomplémentaire de I, a reçu le nom de *point de Nagel*. Un géomètre hollandais l'a appelé récemment *point isopérimétrique*, à cause de la propriété que les droites AD, BE, CF divisent, chacune, le périmètre

---

(*) Oui, par la méthode de la variation des constantes arbitraires et de même dans maints cas analogues. Différentions les relations intégrales de M. Bastin en regardant n comme une fonction de x. Il viendra

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = n\frac{\mathrm{K}}{2} d(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\mathrm{K}}{2}(x_1^2 + y_1^2)dn, \quad d\left(\frac{1}{y}\right) = n dy_1 + y_1 dn.$$

Substituant dans l'équation différentielle, elle devient, après quelques réductions, $dn = 0$, ou $n =$ constante (P. M.).

du triangle ABC en deux parties égales. Il a calculé les distances de ν aux autres points remarquables du triangle ABC, ce qui lui a fait retrouver les relations connues $\nu G = 2GI$, $\nu H = 2IO$.

Une étude du point de Nagel, par M. Vigarié, a paru dans *Mathesis*, 1887, p. 57.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de géométrie analytique à deux dimensions (sections coniques) par H. MANDART, ancien élève de l'Ecole normale des sciences de Gand, professeur de mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Tongres. Namur, Wesmael-Charlier, 1904. (In-8 de VIII-574 pp.). Prix : 10 fr.

Sommaire. I. *Le point, la droite et le cercle.* 1. Coordonnées cartésiennes. 2. Lignes du premier degré. 3. Ponctuelles et faisceaux. 4. Cercle. II. *Lignes du deuxième degré.* 1. Propriétés principales (centre, diamètres, axes, tangentes et normales, foyers et directrices, réduction de l'équation générale). 2. Ellipse. 3. Hyperbole. 4. Parabole. 5. Coordonnées polaires. 6. Sections planes du cône. III. *Théorie générale des coniques.* 1. Homothétie et similitude. 2. Pôles et polaires. 3. Coordonnées tangentielles. 4. Théorèmes de Chasles, de Newton, de Maclaurin, de Pascal, de Steiner et de Brianchon. 5. Points communs et tangentes communes à deux coniques. 6-7. Faisceaux ponctuels de coniques. 8. Faisceaux tangentiels de coniques. 9. Coniques bitangentes à deux coniques données. 10. Polaires réciproques. IV. *Coordonnées trilinéaires homogènes.* 1. Le point et la droite. 2. Les coniques. 3. Transformation des coordonnées. 4. Pôles et polaires, tangentes, centre, normales, asymptotes, axes de symétrie et foyers. 5. Polaires réciproques. 6 Faisceaux de coniques. 7. Réseaux de coniques. — Nombreuses applications et nombreux exercices dans chaque chapitre.

« Ce nouveau manuel, comme ceux de Salmon et d'Ovidio, se distingue des anciens traités par son plan plus large et par l'introduction des principes de la géométrie moderne (projectivité) et de l'algèbre moderne (invariants) dans l'exposition de la théorie des coniques. L'abondance et la bonne disposition des matériaux mis en œuvre, la clarté du style, l'élégance des calculs feront certainement bien accueillir l'œuvre didactique de M. Mandart par les professeurs et les élèves ». (Extrait d'un article signé G. L., dans le *Bollettino di bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche*, de GINO LORIA, 1905, t. VIII, pp. 86-87).

Nous ne doutons pas que le manuel de M. Mandart, ne devienne classique, *officieusement* au moins, pour les bons élèves des Athénées et Collèges belges, et *officiellement*, pour tous, lorsque l'auteur l'aura revu et simplifié en s'inspirant du cours de M. Servais, plus rigoureux, plus concentré et, par suite, au fond, plus simple. (P. M.)

I. **Lehrbuch der Mathematik** (VIII-236 pp., in-8°). II. **Sammlung von Aufgaben**, (VIII-259 pp., in-8°). Zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrer —

Prüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. Im Anschluss an die Baltin — Maiwaldsche Seminarausgabe des Mullerschen Lehrbuches (der Müller und Kutnewskyschen Aufgabensammlung) und in Verbindung mit Prof. Müller für den Selbstunterricht bearbeitet von Dr Plath, Leipzig und Berlin, Teubner, 1906. Prix de chacun de ces livres : 4 marcs.

Ces deux ouvrages sont destinés aux instituteurs prussiens qui aspirent au brevet exigé des professeurs de mathématiques des écoles moyennes et des écoles supérieures pour filles. Le programme de l'examen pour ce brevet ayant été sensiblement augmenté depuis 1901, les auteurs se sont proposé de publier un manuel théorique et un recueil d'exercices qui soit complètement en rapport avec ce programme.

Voici les parties traitées dans ces ouvrages :

Compléments de géométrie plane: applications des figures semblables; formes harmoniques; pôle et polaire. Algèbre; puissances, racines et logarithmes; nombres imaginaires; équations du second et du troisième degré; calcul approché des racines d'une équation numérique; maxima et minima; séries; combinaisons; formule du binôme. Trigonométrie plane et sphérique. Compléments de géométrie solide : calcul des surfaces et des volumes; règle de Guldin. Introduction à la géométrie analytique : droite, cercle, coniques.

Ces deux livres peuvent rendre des services tant aux aspirants au brevet des écoles moyennes qu'aux élèves préparant l'examen de maturité des Realgymnasiums.

Lehrbuch der praktischen Geometrie bearbeitet für den Unterricht an den Hoch — und Tiefbauabteilungen, der Baugewerkschulen und technischen Mittelschulen sowie für den Gebrauch in der Praxis von Dr Doll und P. Nestle. Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage. Leipzig und Berlin, Teubner, 1905. (In-8° de VII-164 pp. avec 145 figures, cartonné). Prix : 3 marcs 80.

Très bon traité élémentaire d'arpentage et de nivellement, rédigé par des *professeurs ayant pratiqué.*

Initiation mathématique. Ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance par C. A. Laisant, Paris, Hachette, 1906. In-12 de VII-167 pp. et 97 figures.

« Ce petit livre contient le développement de principes exposés sous le même titre dans une conférence faite il y a plusieurs années, et publiée dans l'*Education fondée sur la Science...*

« Depuis la toute première enfance jusqu'au début des études, mettons par exemple de 4 à 11 ans, il est possible de faire pénétrer dans l'esprit de l'enfant vingt fois plus de choses qu'on ne le fait, en matière mathématique; cela en l'amusant, au lieu de le torturer. »

« Les chapitres divers qu'on trouvera ci-après ne forment pas un tout didactique; ils ne sont pas non plus disposés au hasard. C'est un guide remis entre les mains de l'éducateur, dont il pourra s'inspirer, mais qui ne saurait le dispenser de l'étude constante du cerveau qu'il veut développer. »

« Le présent livre n'a rien de commun avec les Récréations mathématiques...

Dans celles-ci, le mot le dit assez, il s'agit d'appliquer à des sujets amusants les théories mathématiques déjà connues... Ici, c'est l'inverse; nous nous servirons de questions amusantes comme moyen pédagogique, pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés, les premières notions mathématiques les plus essentielles. Et la diversité des questions qui pourrait faire croire à un désordre apparent, cache une suite d'idées, voulues, utiles et complètement ordonnées ».

Ces quelques phrases tirées de l'Avant-propos suffisent pour caractériser l'ouvrage de M. Laisant et pour montrer aux professeurs des classes inférieures de nos athénées et collèges le parti qu'ils en peuvent tirer pour rendre leur enseignement à la fois attrayant et instructif(*). (J. N.)

Lehrbuch der Differenzenrechnung von D. Seliwanoff, Privat-Dozent an der Universität und Professor an den höheren Frauenkursen zu St-Petersburg. Leipzig, Teubner, 1904. (Cartonné in-8° de VI-92 pp.). Prix : 4 marcs.

Exposé clair, rigoureux et pratique du calcul des différences et de ses principales applications; on peut regarder ce manuel comme un commentaire et un complément de l'article de l'auteur sur cette partie de la science dans l'*Encyclopédie mathématique* et du traité plus étendu de M. Markof, auquel M. Selivanof renvoie souvent.

Deux remarques : 1° M. Selivanof aurait dû donner non seulement la première formule d'interpolation de Newton, quand les valeurs de la variable sont équidistantes, *mais la seconde, quand ces valeurs sont quelconques.* Cette formule est extrêmement pratique et est équivalente à la formule de Lagrange qui ne l'est pas du tout (voir notre *Resumé d'analyse*, pp. 120-126 ou notre *Cours de calcul intégral*, pp. 191-194). 2° Si l'auteur avait employé les notations $y_1 = \nabla y_0$, $y_2 = \nabla y_1 = \nabla^2 y_0$, etc., maintes formules seraient devenues plus suggestives, par exemple, $\Delta^n u_0 = (\nabla - 1)^n u_0$, $\nabla^n u_0 = (1 + \Delta)^n u_0$; et la théorie des équations linéaires aux différences à coefficients constants aurait été plus simple.

Sommaire I. *Différences*, 1. Principes relatifs aux différences. 2. Interpolation quand on connaît plusieurs valeurs de la fonction et les valeurs correspondantes d'une ou plusieurs dérivées. Détermination du reste. 3. Quadratures approchées par les rectangles, ou par les trapèzes, ou par la formule de Simpson avec détermination de la limite de l'erreur. II. *Sommes* 1 Principes. 2. La fonction de J. Bernoulli. 3-4. La formule sommatoire d'Euler et ses applications : développement de tang x, cot x, $[1 : (e^x - 1)]$ en série; formule de Stirling. III. *Équations aux différences.* 1. Généralités. 2-3. Équations linéaires quelconques ou à coefficients constants. (P. M.)

(*) Nous devons toutefois avertir les lecteurs du petit livre de M. Laisant de ne pas se fier à ses indications historiques : sur l'inventeur du zéro (p. 28), de l'algèbre (p 34), du triangle arithmétique (p. 85), du volume de la pyramide (p. 115), des graphiques (p. 140); sur Lucas (p. 52), sur Fermat (p. 86).

G. Vivanti, ord. Prof. an der K. Universität zu Messina. **Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.** Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch herausgegeben von A. Gutzmer in Halle a. S. Leipzig, Teubner, 1906. (In-8, cartonné de VI-512 pp.). Prix : 12 marcs.

Édition nouvelle développée et complétée (surtout dans la troisième partie où l'on a tenu compte des plus récents travaux des géomètres) de la *Teoria delle funzioni analitiche*, publiée en 1901 (voir *Mathesis*, 1902, (3), II, p. 68).

×TRIANGLE BORDÉ DE TROIS RECTANGLES,

par M. J. Neuberg.

Dans les *Wiskundige Opgaven* (1904, p. 125), MM. Cikot et Schuh démontrent élégamment, le premier par des considérations statiques, le second par la géométrie, un théorème très curieux dû à M. Mantel et qu'on peut énoncer ainsi :

Si trois côtés alternants B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 *d'un hexagone sont équipollents aux côtés d'un triangle, les trois autres côtés* C_2C_1, A_2A_1, B_2B_1 *sont équipollents aux côtés d'un second triangle. Si de plus les perpendiculaires élevées aux milieux des premiers côtés* B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 *concourent en un même point, les perpendiculaires aux milieux des côtés restants sont également concourantes.*

La démonstration de M. Schuh fait intervenir une figure qui généralise une des figures les plus importantes de la géométrie récente. Nous croyons utile de reprendre ici l'étude de la même figure.

1. Pour démontrer la première partie du théorème de M. Mantel, on peut construire, conformément à l'hypothèse, le triangle B_1XC_2 dont les côtés B_1X, C_2X sont respectivement équipollents aux côtés B_2A_1, C_1A_2 de l'hexagone. En joignant A_1 et A_2 à X nous obtenons deux parallélogrammes $B_1B_2A_1X$, $C_2C_1A_2X$; donc les côtés C_2C_1, A_2A_1, B_2B_1 de l'hexagone sont équipollents aux côtés du triangle XA_2A_1.

2. Soit C le point de rencontre des perpendiculaires élevées en C_2 sur B_1C_2 et en C_1 sur C_1A_2; achevons les rectangles B_1C_2CB, CC_1A_2A. Alors, puisque B_1C_2 et BC, C_1A_2 et CA sont équipollents, A_1B_2 doit être équipollent à AB. Par hypothèse, les perpendiculaires aux milieux de B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 concourent en un même point O; or, les deux premières droites sont également perpendiculaires aux milieux de BC, CA. Donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et

la médiatrice de A_1B_2, est encore médiatrice de AB, d'où l'on conclut que A_1ABB_2 est un rectangle.

Nous considérerons maintenant l'hexagone de M. Mantel comme le contour extérieur de la figure obtenue en construisant sur les côtés d'un triangle ABC trois rectangles BCC_2B_1, CAA_2C_1, ABB_2A_1. Pour simplifier, nous supposons ces trois rectangles extérieurs au triangle ABC; le lecteur verra facilement qu'en introduisant la règle des signes on rend les résultats applicables au cas où ces rectangles sont tournés en partie vers l'intérieur de ABC, en partie vers l'extérieur.

Les hauteurs BB_1, CC_1, AA_1 seront désignées par α, β, γ.

3. Les droites B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 suffisamment prolongées déterminent un triangle $A_3B_3C_3$ homothétique à ABC. Le centre de similitude L situé à l'intersection des droites AA_3, BB_3, CC_3 a pour coordonnées normales dans chacun des triangles ABC, $A_3B_3C_3$ les quantités α, β, γ; car ses distances aux côtés de ABC sont proportionnelles à ses distances aux côtés de $A_3B_3C_3$ et par suite proportionnelles aux distances mutuelles des côtés homologues des deux triangles.

4. La perpendiculaire abaissée de A_3 sur A_1A_2 et la droite A_3A sont isogonales par rapport à l'angle $A_1A_3A_2$, car dans le quadrilatère inscriptible $A_1A_3A_2A$, l'angle $A_1A_3A = A_1A_2A = \frac{\pi}{2} - A_3A_2A_1$.

On conclut de là que les perpendiculaires abaissées des points A_3, B_3, C_3 respectivement sur les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concourent en un même point Q', qui est l'inverse du point L dans le triangle $A_3B_3C_3$.

De même, les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concourent en un point Q, inverse de L dans le triangle ABC. Les coordonnées normales de Q sont donc $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$; les points L, Q, Q' sont en ligne droite.

5. Les perpendiculaires élevées aux milieux des droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concourent au milieu Q_1 de la droite QQ'; car elles passent aux milieux des droites AA_3, BB_3, CC_3, centres des cercles circonscrits aux quadrilatères $AA_1A_3A_2$, ... La seconde partie du théorème de M. Mantel est ainsi démontrée d'une nouvelle manière.

Les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 suffisamment prolongées déterminent un triangle $A_4B_4C_4$. On vient de voir que les triangles ABC, $A_3B_3C_3$

sont orthologiques avec $A_4B_4C_4$. Par conséquent, les perpendiculaires abaissées de $A_4B_4C_4$ sur BC, CA, AB concourent en un même point U.

6. Les perpendiculaires élevées en B_1 sur B_1B_2 et C_2 sur C_2C_1 se rencontrant au point A', achevons les rectangles $A'C_2C_1B'$, $A'B_1B_2C'$. En raisonnant comme ci-dessus, on verra que la figure $A_1A_2B'C'$ est un rectangle et que Q_1 est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

Ainsi, l'hexagone de M. Mantel peut être considéré comme provenant soit du triangle ABC bordé de trois rectangles, soit du triangle A'B'C' bordé de trois rectangles.

Les triangles BQC, $B_1A'C_2$ étant équipollents, QA' est équipollent à BB_1. Donc les coordonnées tripolaires du point Q, dans le triangle A'B'C', sont proportionnelles à α, β, γ.

Les distances de Q aux côtés du triangle ABC étant inversement proportionnelles à α, β, γ, les produits de ces distances multipliées respectivement par QA', QB', QC' sont égaux entre eux. Par suite, les droites BC, CA, AB peuvent être regardées comme les polaires des points A', B', C' par rapport à un certain cercle de centre Q. Donc les triangles ABC, A'B'C', polaires réciproques par rapport à ce cercle sont homologiques.

7. Les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ont le même centre de gravité; car on passe du centre de gravité G_1 de $A_1B_1C_1$ au centre G_2 de $B_2C_2A_2$ en menant une ligne brisée G_1MNG_2 dont les côtés sont équipollents à $\frac{1}{3}A_1B_2$, $\frac{1}{3}B_1C_2$, $\frac{1}{3}C_1A_2$ et cette ligne brisée se ferme d'elle-même. G_1 est aussi le centre de gravité de six masses égales placées aux sommets de l'hexagone $B_1C_2C_1A_2A_1B_2$.

8. M étant un point quelconque du plan ABC, on a

$$\overline{MB_1}^2 + \overline{MC_1}^2 + \overline{MA_1}^2 = \overline{MC_2}^2 + \overline{MA_2}^2 + \overline{MB_2}^2. \qquad (1)$$

En effet,

$$\overline{MB_1}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MC_2}^2 + \overline{MB}^2,$$
$$\overline{MC_1}^2 + \overline{MA}^2 = \overline{MA_2}^2 + \overline{MC}^2,$$
$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{MB_2}^2 + \overline{MA}^2.$$

Ajoutons ces égalités membre à membre, etc.

Les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ayant le même centre de gravité, l'égalité (1), d'après un théorème connu, entraîne la suivante :

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{C_1A_1}^2 = \overline{A_2B_2}^2 + \overline{B_2C_2}^2 + \overline{C_2A_2}^2.$$

Pour démontrer celle-ci directement, considérons le triangle rectangle formé par B_1C_1 avec B_1C_2 et la perpendiculaire C_1T abaissé de C_1 sur B_1C_2; nous aurons

$$\overline{B_1C_1}^2 = (a + \beta \sin C)^2 + (\alpha + \beta \cos C)^2$$
$$= a^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\alpha \cos C + 4R\beta \sin A \sin C.$$

De là on déduit

$$\Sigma\overline{B_1C_1}^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma\alpha^2 + 2\Sigma\alpha\beta \cos C + 4R\Sigma\alpha \sin B \sin C.$$

La symétrie du second membre de cette formule démontre la proposition.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1520.

(Voir *Mathesis*, (3); V, 112).

Si ρ, n, d *désignent respectivement le rayon de courbure, la corde normale en un point* M *d'une conique et la distance de* M *au point de Fregier, on a la relation*

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{n}. \qquad \text{(J. Rose).}$$

Solution par MM. Abramescu, Van Dinter, Droz Farny et Bastin. Prenons pour axes ox, oy la tangente et la normale en M à la conique dont l'équation est

$$x^2 + 2axy + by^2 + 2cy = 0. \qquad (1)$$

Elle coupe oy au point d'ordonnée

$$n = y = -\frac{2c}{b}. \qquad (2)$$

Un cercle tangent à ox en M,

$$x^2 + y^2 - 2\rho y = 0, \qquad (3)$$

sera le cercle de courbure, si la corde commune autre que Ox et qui s'obtient en retranchant (3) de (1),

$$2ax + (b - 1)\, y + 2(c + \rho) = 0,$$

passe par M, d'où

$$\rho = -c. \qquad (4)$$

Pour trouver le point de Fregier, exprimons que les droites joignant l'origine M aux points de rencontre de (1) avec la droite $ux + vy + 1 = 0$ et dont l'équation est

$$x^2 + by^2 + 2axy - 2cy\,(ux + vy) = 0,$$

sont rectangulaires; on obtient

$$v = \frac{b+1}{2c},$$

et, par suite,

$$d = -\frac{2c}{b+1}. \qquad (5)$$

Les égalités (2), (4) et (5) démontrent la relation proposée.

MM. Barisien et H. Lez vérifient la même relation au moyen des valeurs suivantes des quantités ρ, n, d au point $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

$$\rho = \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \quad n = \frac{2ab\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi},$$

$$d^2 = \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi).$$

M. H. Lez trouve, dans le cas de la parabole $y^2 = 2px$,

$$\rho = \frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}, \quad n = \frac{p^{\frac{1}{2}}\,(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{x}, \quad d = p^{\frac{1}{2}}\,(p+2x)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit 2δ la longueur du diamètre conjugué avec le diamètre OM de l'ellipse. M. Barisien signale les relations

$$d = \frac{2ab}{a^2+b^2}\delta, \quad n = \frac{2ab\delta^2}{(a^2+b^2)\,\delta^2 - a^2b^2},$$

$$\frac{2\rho}{n} + 1 = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\,\delta^2.$$

Question 1532.

(Voir *Mathesis*, (3), V; p. 200).

La tangente en un point M *d'une courbe rencontre l'axe* Ox *en* T, *la normale rencontre les deux axes en* N *et* N'. *Déterminer cette courbe par la condition qu'il existe un rapport constant* K *entre la distance* NT *et la somme* ON + ON'. (J. Rose.)

Solution par M. A. H. Couvert. La tangente et la normale au point M (x, y) ayant pour équations

$$Y - y = p(X - x), \quad Y - y = -\frac{1}{p}(X - x),$$

où p représente la dérivée y', on trouve facilement

$$OT = x - \frac{y}{p}, \quad ON = x + py, \quad ON' = \frac{x + py}{p},$$

de sorte que l'équation différentielle de la courbe est

$$y(1 + p^2) + K(x + py)(1 + p) = 0.$$

Comme elle est homogène en x et y, on pourrait essayer la substitution $y = xz$; mais elle est du premier degré en x et y, ce qui conduit à essayer l'intégration par différentiation. Ecrivons

$$x + py = -\frac{1}{K} y \frac{1 + p^2}{1 + p}, \tag{1}$$

puis différentions; il vient en remplaçant dx par $dy : p$

$$\frac{dy}{p} + p\,dy + y\,dp = -\frac{dy}{K}\frac{1 + p^2}{1 + p} - \frac{y}{K}\frac{p^2 + 2p - 1}{(p + 1)^2}\,dp,$$

ou

$$dy\left[\frac{1}{p} + p + \frac{1 + p^2}{K(1 + p)}\right] + y\,dp\left(1 + \frac{p^2 + 2p - 1}{K(p + 1)^2}\right) = 0.$$

On peut séparer les variables y et p, ce qui donne

$$\frac{dy}{y} + \frac{p[K(p + 1)^2 + p^2 + 2p - 1]}{(p + 1)(p^2 + 1)[(K + 1)p + K]}\,dp = 0.$$

La décomposition de la dernière fraction en éléments simples conduit à l'égalité

$$ly + \int\left[\frac{A}{p + 1} + \frac{Bp + C}{p^2 + 1} + \frac{D}{(K + 1)p + K}\right]dp = \alpha,$$

où A, B, C, D sont des fonctions connues de K. En achevant l'intégration on trouve, C étant nul

$$ly + Al(p + 1) + \frac{1}{2}Bl(p^2 + 1) + \frac{D}{K + 1}l[(K + 1)p + K] = \alpha,$$

y est ainsi une fonction connue de p; l'équation (1) servira ensuite à exprimer également x en fonction du paramètre variable p.

Question 1536.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 282).

On donne dans un même plan deux parallèles m, n et un point A. *Décrire une circonférence passant par* A, *ayant son centre* O *sur la perpendiculaire abaissée de* A *sur m, n, et qui coupe m en un point* M, *n en un point* N, *tels que l'angle* MON *soit égal à un angle donné* α.

Solution par M. Malaise (Liége). La circonférence cherchée coupe la parallèle n en un deuxième point N_1, tel que MN_1 coupe les parallèles m et n sous l'angle $\frac{1}{2}\alpha$. De plus, la circonférence O est tangente en a à la parallèle A menée par ce point à m et n. Dès lors, on voit que si l'on fait glisser la circonférence O, de façon à ce que son centre reste sur une parallèle à m et n, et que son rayon reste constant, la question se ramène au problème classique bien connu :

Mener une circonférence par deux points (intersections de m et n avec une droite inclinée sur leur direction de l'angle $\frac{1}{2}\alpha$) *et tangente à une droite donnée a.*

On obtient ainsi une circonférence O_1 ; la parallèle à m et n par O_1 coupe la perpendiculaire abaissée de A sur m au centre O de la circonférence cherchée.

Solution par M. Verheugen (Gand). Soient P et Q les pieds de la perpendiculaire abaissée de A sur m et n et supposons les points M, N d'un même côté de cette perpendiculaire. On aura $\overline{AM}^2 : \overline{AN}^2 = AP : AQ$. On pourra déterminer des droites p, q, telles que $p : q = AM : AN$; par exemple, on peut prendre $p = AP$, $q^2 = AP.AQ$. L'angle $MAN = \frac{1}{2}\alpha$. Le triangle déterminé par l'angle $\frac{1}{2}\alpha$ compris entre les côtés p et q sera semblable au triangle MAN, dont on connaîtra donc tous les angles. Or, dans le triangle rectangle AMP, l'angle $AMP = \frac{1}{2}\alpha + AMN$; cet angle est donc connu et l'on peut construire la corde AM, puis trouver le centre O.

Question 1537.

(Voir *Mathesis*, (3). V, p. 282).

Les hyperboles équilatères Σ *qui sont tangentes à une circonférence donnée* O *en un point variable* C *et qui passent par deux points fixes* A, B *de cette courbe, sont tangentes à une seconde circonférence fixe.*

(E. N. Barisien).

Solution géométrique. L'hyperbole Σ passe par l'orthocentre H du triangle ABC, point qui décrit la circonférence symétrique de la première par rapport à la droite AB. Les circonférences ABC, ABH et l'hyperbole Σ ont une corde commune AB; par suite, les trois autres cordes communes de ces courbes prises deux à deux, sont concourantes. L'une d'elles, seconde corde commune aux deux circonférences, est à l'infini; donc les deux autres sont parallèles. Il résulte de là qu'une corde commune à Σ et au cercle ABH est la parallèle HF menée par H à la tangente CE du cercle ABC. Or, si CH coupe la circonférence O en un second point H′, les tangentes en H et H′ sont symétriques par rapport à AB, d'où l'on conclut aisément que FH touche la circonférence ABH, c'est-à-dire que l'hyperbole Σ est tangente à la circonférence fixe ABH. (Cl. Servais).

Le centre de Σ est au milieu L de CH; car si l'on projette A en E′ sur CE et que M désigne le milieu de AC, l'hyperbole peut être considérée comme circonscrite à un triangle ACC dont deux sommets se sont réunis sur le côté CE en C. Le cercle de neuf points de ce triangle ACC passe par C, E′, M; il passe aussi par L. parce que l'angle ME′C = MCE′ = ABC = MLH. L étant un point commun aux cercles des neuf points des deux triangles ABC, ACC inscrits à Σ est le centre de Σ. Donc la tangente à Σ en H est parallèle à CE, et comme elle touche aussi la circonférence ABH, la question 1537 est démontrée. (J. N.).

Solution par M. P. Bastin. Les axes coordonnés étant AB et la perpendiculaire au milieu de AB, soit

$$\Delta \equiv x^2 + (y - \alpha)^2 - R^2 = 0$$

l'équation du cercle. La tangente en un point C(R cos φ, α + R sin φ) est représentée par

$$t \equiv x \cos\varphi + y \sin\varphi - (\alpha \sin\varphi + R) = 0.$$

Toute conique satisfaisant aux conditions de l'énoncé est comprise dans l'équation $\Delta - \lambda yt = 0$; pour une hyperbole équilatère, on a $\lambda \sin\varphi = 2$, de sorte que l'équation générale des hyperboles Σ est

$$x^2 - 2xy \cot\varphi - y^2 + 2Ry \operatorname{cosec}\varphi + \alpha^2 - R^2 = 0. \qquad (1)$$

Celle-ci est indépendante du signe de α; donc les hyperboles Σ sont tangentes au cercle

$$\Delta^2 \equiv x^2 + (y + \alpha)^2 - R^2 = 0,$$

symétrique de Δ par rapport à AB.

M. H. Lez nous a adressé une solution analogue, dans laquelle il remarque que *le lieu des centres des courbes* Σ *est une circonférence qui est égale à la circonférence donnée et a pour centre le milieu de* AB. Ce lieu se déduit analytiquement de l'équation (1) ou géométriquement de ce que CL est égale à la distance du centre du cercle donné au milieu de AB.

Solution par M. Abramescu. Les axes coordonnés étant les diamètres du cercle donné qui sont parallèle et perpendiculaire à AB, l'équation générale des courbes Σ est

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi - a)(y-b) + \lambda(x^2+y^2-a^2) = 0,$$

avec la condition $2\lambda + \sin\varphi = 0$, de sorte que, définitivement,

$$[x^2+y^2-a^2-2y(y-b)]\sin\varphi - 2x(y-b)\cos\varphi = -2a(y-b).$$

Cherchons l'enveloppe de ces hyperboles, φ étant le paramètre variable. La dérivée par rapport à φ est

$$[x^2+y^2-a^2-2y(y-b)]\cos\varphi + 2x(y-b)\sin\varphi = 0.$$

En faisant la somme des carrés de ces équations on obtient

$$[x^2+y^2-a^2-2y(y-b)]^2 + 4x^2(y-b)^2 = 4a^2(y-b^2).$$

Ce résultat peut s'écrire

$$(x^2+y^2-a^2)(x^2+y^2-4by-a^2+4b^2) = 0.$$

Donc l'enveloppe se compose du cercle donné et d'un second cercle

$$x^2+y^2-4by-a^2+4b^2 = 0.$$

Solution analogue par MM. Couvert et Fr. Dupont. Autres solutions géométriques par MM. Van Dinter et Gisolf.

×Question 1544.

(Voir *Mathesis*, (3); V, p. 256 .

Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque M *de la circonférence circonscrite au triangle* ABC *sur les côtés* BC, CA, AB *rencontrent respectivement ces côtés en* α, β, γ *et la circonférence en* A_1, B_1, C_1.

1° *La droite de Simson* $\alpha\beta\gamma$ *rencontre les côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *en des points* α_1, β_1, γ_1 *tels que les droites* $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ *concourent en un même point* N.

2° *Les droites* AM, BM, CM *rencontrent les côtés correspondants du triangle* $A_1B_1C_1$ *en des points* α_2, β_2, γ_2 *situés sur un même parallèle à la droite* $\alpha\beta\gamma$ (Sollertinsky).

Solution par M. P. Bastin. 1° On sait que les droites AA_1, BB_1, CC_1

sont parallèles à la droite de Simson. Soit Δ le diamètre perpendiculaire à ces droites ; on reconnaît immédiatement que les points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont les symétriques des points α, β, γ par rapport à Δ. Or, les droites $A_1\alpha$, $B_1\beta$, $C_1\gamma$ concourent au point M; donc les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ concourent au point N symétrique de M.

2° Il suffit d'établir que $\alpha_2\gamma_2$ est parallèle à $\alpha_1\gamma_1$.

Soient α' le point d'intersection des droites B_1C_1 et BA, γ' celui des droites B_1A_1 et BC; ces points sont symétriques par rapport à Δ et par suite la droite $\alpha'\gamma'$ est parallele à $\alpha_1\gamma_1$. Il faut donc que les rapports anharmoniques $(B_1\alpha'\alpha_1\alpha_2)$ et $(B_1\gamma'\gamma_1\gamma_2)$ soient égaux; or, cette égalité résulte de ce que les faisceaux $(A, B_1\alpha'\alpha_1\alpha_2)$ et $(C, B_1\gamma'\gamma_1\gamma_2)$ sont obtenus en joignant les points B_1, B, N, M de la circonférence ABC successivement aux points A et C.

Pour démontrer la seconde partie, supposons le point M sur l'arc BC. Les angles $M\alpha_1C_1$, $M\beta_1C_1$ sont égaux comme ayant des mesures égales, les arcs AB_1 et A_1B étant égaux. Donc les points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont sur la droite de Simson de M par rapport au triangle $A_1B_1C_1$ qui correspond à des obliques également inclinées sur les côtés de ce triangle. Le quadrilatère $M\alpha_1\beta_1C_1$ est inscriptible; par conséquent l'angle $A\alpha_1\beta_1 = A_1C_1M = A_1AM$, d'où l'on conclut que $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ est parallèle à AA_1 et à $\alpha\beta\gamma$. (J. N.).

Généralisation par M. C. Servais. 1. Soient ABC un triangle inscrit à une conique Σ; A', B', C', E, F les points d'intersection d'une droite quelconque *l* avec les côtés BC, CA, AB et la courbe Σ; A'', B'', C'', les conjugués de A', B', C' relativement au couple EF; M un point pris arbitrairement sur Σ. Les couples de sommets opposés AA', BB', CC' du quadrilatère complet ABC*l* sont projetés de M suivant l'involution $I \equiv M(AA', BB', CC')$ perspective à celle déterminée sur la droite *l*, par la conique Σ et les couples de côtés opposés du quadrangle inscrit ABCM; donc le couple ME, MF fait partie de l'involution (I). Des involutions M(AA', BB', CC', EF) et M(A'A'', B'B'', C'C'', EE, FF) on déduit les faisceaux involutifs : M(AA'', BB'', CC'', EF); par suite, *les rayons* MA'', MB'', MC'' *rencontrent les côtés* BC, CA, AB *en trois points* α, β, γ *en ligne droite et la conique* Σ *en trois points* A_1, B_1, C_1 *tels que les couples* AA_1, BB_1, CC_1, EF *appartiennent à une involution dont le pôle* U *est situé sur l.*

2. De tout point S de la conique Σ on projette les points A_1, B_1, C_1 respectivement sur les côtés BC, CA, AB suivant des points $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

en ligne droite; car les couples $S(AA_1, BB_1, CC_1)$ sont en involution. La projectivité des faisceaux $A_1(S)$ et $B_1(S)$ entraîne celle des ponctuelles (α_2), (β_2), sur les côtés BC, CA. Ces dernières ont un élément uni C, correspondant à la position $S \equiv C$; elles sont donc perspectives et la droite $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ passe par un point fixe. Ce point est U, car les droites $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ correspondant aux positions A, B, C de S sont AA_1, BB_1, CC_1. Si $M \equiv S$ on conclut donc que *la droite* $\alpha\beta\gamma$ *passe par la pôle* U *de l'involution* (AA_1, BB_1, CC_1).

3. Soit N l'homologue de M dans l'involution (AA_1, BB_1, CC_1); dans l'homologie harmonique ayant pour centre U et pour axe la polaire de ce point aux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ et au point M, correspondent respectivement les triangles $A_1B_1C_1$, ABC, et le point N; donc les droites NA, NB, NC rencontrent les côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 en trois points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ de la droite correspondant à $\alpha\beta\gamma$ dans cette homologie. La droite $\alpha\beta\gamma$, passant par U (2) est identique à la droite $\alpha_1\beta_1\gamma_1$; donc *la droite* $\alpha\beta\gamma$ *coupe les côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *en trois points* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *tels que les droites* $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ *concourant en un point* N *de la conique* Σ *homologue de* M *dans l'involution* (AA_1, BB_1, CC_1).

4. Au numéro (2) on peut permuter les rôles des triangles ABC, $A_1B_1C_1$; par suite, *de tout point de* Σ *on projette les points* A, B, C *sur les côtés* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *en des points* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *situés sur une droite passant par le pôle* U *de l'involution* (AA_1, BB_1, CC_1).

5. Si l'on suppose que les points E et F sont les points cycliques on retrouve les propriétés de la droite de Simson.

×Question 1548.

(Voir *Mathesis* (3), V, p. 280).

M étant un point quelconque du plan du triangle ABC, *soient* α, β, γ *les milieux des droites* MA, MB, MC. *La parallèle menée par* α *à* BC *rencontre* AC *en* B_a, AB *en* C_a; *une construction analogue effectuée sur* β *et* γ *détermine les points* C_b, A_b, A_c, B_c. 1° *Démontrer, que les droites* B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c *forment un triangle* $A_1B_1C_1$ *égal à* ABC; 2° *les côtés opposés de l'hexagone* $B_aC_aC_bA_bA_cB_c$ *sont égaux;* 3° *les droites* AA_1, BB_1, CC_1, B_cA_b, C_bA_c, C_bB_c *se coupent en un même point* I, *qui divise la droite* MG *dans le rapport* 3 : 1 (G *est le barycentre de* ABC); 4° *pour que l'hexagone*

$B_2C_2C_3A_3A_2B_2$ *soit circonscriptible à un cercle, il faut et il suffit, que* M *soit situé sur la droite joignant* G *au centre* I *d'un cercle tritangent et que l'on ait* $GM = 4GI$. (SOLLERTINSKY).

Solution par M. EMILE WEBER. Les figures $C_1\alpha\beta\gamma$, $B_1\alpha\beta\gamma$ étant des parallélogrammes, on a tout de suite

$$B_1C_1 = 2\beta\gamma = BC.$$

ABC, $A_1B_1C_1$ sont donc égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

2° Les parallélogrammes $BC_2B_1A_2$ et $C_1B_2CA_3$ donnent :

$$BA_3 + A_3A_2 = C_2B_2 + B_2B_1$$
$$A_3A_2 + A_2C = C_2B_2 + C_2C_1.$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre et en tenant compte de $BC = B_1C_1$, il vient

$$A_3A_2 = C_2B_2.$$

La même démonstration s'applique aux deux autres couples de côtés opposés de l'hexagone considéré.

3° Les figures telles que ABA_1B_1 sont des parallélogrammes comme ayant les côtés opposés AB, A_1B_1 égaux et parallèles. Il s'en suit que les droites AA_1, BB_1, CC_1, diagonales des parallélogrammes, se coupent en un même point Γ, qui est leur point milieu. A_3B_2, par exemple, passe aussi par le milieu de AA_1, car la figure $AB_2A_1A_3$ est un parallélogramme comme ayant A_3A_1 et AB_2 égaux et parallèles ($AC = A_1C_1$, or $B_2C = C_1A_3$, donc $AB = A_3A_1$).

Soit R le point de rencontre de AG avec BC. Désignons par M' le point milieu de RN, N étant le pied de AM. En considérant les deux triangles AC_1B_1 et BA_1C on voit facilement, que AM est parallèle à A_1R. Conséquemment, la parallèle d à AM menée par M' passe par le milieu de A_1N et par suite par le milieu Γ de AA_1. Mais nous avons montré (*Mathesis*, 1905, juin), que les trois parallèles analogues à d se coupent en un même point, qui ici se confond avec Γ; que ce point divise la droite MG dans le rapport 3 : 1 et qu'il est le centre de la conique passant par les pieds des médianes et des droites AM, BM, CM, cette conique passant d'ailleurs par α, β, γ.

4° Pour que l'hexagone considéré soit circonscriptible à un cercle il faut et il suffit, que le point M soit situé sur la droite GI, et, que l'on ait

$GM = 4GI$; en d'autres termes, il faut et il suffit, qu'au point M corresponde un point Γ se confondant avec I. C'est ce que nous allons démontrer.

Remarquons d'abord, que les bissectrices des angles A et A_1 sont parallèles. D'autre part, pour que l'hexagone considéré soit circonscriptible à un cercle, il faut que les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ aient même centre I du cercle inscrit. Conséquemment, il faut que les bissectrices des angles A, A_1 se confondent en une seule droite AA_1 c'est-à-dire, que le point Γ coïncide avec I. La condition est suffisante, car le point Γ est situé au milieu de A_2B_2, par exemple, et les côtés BC, B_1C_1 sont parallèles.

Solution analogue par M. P. Bastin.

Pour démontrer la finale du 3°, observons que les centres de gravité G, G' des triangles ABC, αβγ sont en ligne droite avec leur centre d'homothétie M et que $MG = 2MG'$. G' étant aussi le barycentre du triangle $A_1B_1C_1$ équipollent au triangle ABC, Γ est le milieu de la distance des points homologues G, G'.

Γ est le centre commun d'une conique inscrite à l'hexagone $B_2C_2C_1A_1A_2B_2$, d'une conique circonscrite à ce même hexagone et d'une troisième conique circonscrite aux deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$. (J. N.).

×Question 1551.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 40).

Dans tout triangle ABC *dont le périmètre est* $2p$, *si les rayons des cercles inscrit et circonscrit sont* r *et* R, *les valeurs de* $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$ *sont racines de l'équation*

$$px^3 - (4R + r)x^2 + px - r = 0. \qquad (1)$$

(E. N. Barisien).

Solution par MM. Dupont, Verkaart, Plakhovo, Godeaux, Bastin,, Petcoff, Majorin, Rose et Van Dinter. Les rayons r_a, r_b, r_c des cercles exinscrits sont liés par l'équation

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r;$$

de là, on tire

$$p(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C) = 4R + r.$$

La relation $\Sigma \operatorname{tg}\frac{1}{2}A \operatorname{tg}\frac{1}{2}B = 1$ est une conséquence de

$$\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Enfin, $r = p \operatorname{tg}\frac{1}{2}A \operatorname{tg}\frac{1}{2}B \operatorname{tg}\frac{1}{2}C.$

Ces égalités démontrent le théorème.

Solution par M. Abramescu. Soit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = x$; on a

$$r = (p-a)x, \qquad 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{a(1+x^2)}{2x}.$$

Si l'on élimine a entre ces égalités on trouve l'équation (1).

M. Lez déduit des valeurs

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \ldots$$

les valeurs de

$$\Sigma \operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \frac{r}{p}, \qquad \Sigma \operatorname{tg}\frac{1}{2}A \operatorname{tg}\frac{1}{2}B = 1, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}A \operatorname{tg}\frac{1}{2}B \operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \frac{r}{p}.$$

M. Godeaux remarque que par transformation continue en A (*Mathesis*, 1892, p. 50) on trouverait que $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$, $\cot\frac{1}{2}B$, $\cot\frac{1}{2}C$ sont racines de l'équation

$$(p-a)x^3 + (4R - r_a)x^2 + (p-a)x + r_a = 0,$$

et que la question 1551 ne diffère pas essentiellement d'une question proposée dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (1893-94, p. 326) et résolue par M. Cazamian.

×Question 1554.

(Voir *Mathesis* (3), VI, p. 40).

Soient m_a et n_a la médiane AM *et la symédiane* AN *issues du sommet* A *du triangle* ABC; *démontrer la relation*

$$b^2 + c^2 = 4Rm_a \sin(a, n_a). \qquad \text{(A. C.)}$$

Solution par MM. P. Bastin, Van Dinter, F. Dupont, Verkaart, Abramescu. On a les proportions

$$\frac{\sin(a, n_a)}{\sin(b, n_a)} = \frac{AC}{NC} = \frac{b^2+c^2}{ab}, \qquad \frac{\sin(c, m_a)}{\sin B} = \frac{a}{2m_a}.$$

En les multipliant terme à terme, et en observant que les angles (b, n_a), (c, m_a) sont égaux, on trouve

$$\frac{\sin(a, n_a)}{\sin B} = \frac{b^2+c^2}{2bm_a}.$$

En remplaçant sin B par b : 2R on obtient la relation proposée.

Solution par MM. Plakhovo et Rose. Menons la hauteur AH $= h_a$. Le triangle rectangle AHN donne

$$h_a = n_a \sin (a, n_a).$$

D'après un théorème applicable à deux droites isogonales quelconques menées par A,

$$\frac{n_a^2}{m_a^2} = \frac{BN.CN}{BM.CM} = 4\frac{BN.CN}{a^2}.$$

Or, $$BN = \frac{ac^2}{b^2+c^2}, \qquad CN = \frac{ab^2}{b^2+c^2};$$

donc $$n_a^2 = m_a^2 . 4\frac{a^2b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)^2}, \quad \text{ou} \quad n_a = \frac{2bcm_a}{(b^2+c^2)}.$$

Observons aussi que $bc = 2Rh_a$, etc.

Solution analytique par M. H. Lez.

M. Weber rappelle que M. Lemoine (AFAS, Toulouse, 1887, p. 41) a donné la même relation sous la forme

$$b^2 + c^2 = 4Rm_a \cos \lambda,$$

où λ est l'angle de la médiane m_a avec le rayon OA du cercle circonscrit; cet angle (OA, m_a) est égal à l'angle des isogonales h_a, n_a de ses côtés.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1273. Un tronc de pyramide régulière a deux bases parallèles qui sont des hexagones de côtés a et $\frac{1}{2}a$. Tous ses sommets sont sur une sphère S dont le centre est dans le plan de la grande base. Trouver les expressions :

1° de la hauteur, de la surface totale et du volume du solide;

2° de la surface totale et du volume du tronc de cône dont les bases sont des cercles circonscrits aux deux hexagones;

3° de la surface de la zône de la sphère S comprise entre ces deux cercles ainsi que du volume du segment sphérique limité par leurs plans.

(*Ecole prof. sup. des postes et des télégraphes*; concours de 1905).

1274. Démontrer que

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{3}} \times (1+\sqrt{3}) = 2,$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,(2+\sqrt{3}) = 2. \qquad (J.\ de\ Vuibert).$$

1275. On donne, dans un même plan, une conique Σ et deux faisceaux projectifs de rayons. L'enveloppe de la droite qui joint les pôles P, P′ de deux rayons homologues quelconques p, p' de ces faisceaux par rapport à Σ est une conique. (E. N. Barisien).

En effet, P et P′ marquent sur les polaires des centres des deux faisceaux deux ponctuelles projectives.

QUESTIONS PROPOSÉES (*).

1566. Calculer les coordonnées du point double de la quartique dont les équations paramètriques sont :

$$x = A\cos\varphi + B\cos^2\varphi, \qquad y = C\sin\varphi + D\sin^2\varphi.$$

(E. N. Barisien).

1567. On a

$$\cos x = 4 - \sqrt{9 + 3x^2} + \theta\frac{x^6}{180}, \quad 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\operatorname{ch} x = 4 - \sqrt{9 - 3x^2} - \theta'\frac{3x^6}{400}, \quad 0 \leqq x^2 \leqq 1,$$

θ et θ' étant compris entre zéro et l'unité (Comparez question 1538).

×**1568**. Soient A_1, B_1, C_1 les points de rencontre des côtés du triangle ABC avec une transversale quelconque. On mène par un point quelconque P les droites PA′, PB′, PC′ équipollentes aux droites AA_1, BB_1, CC_1. Démontrer que l'aire A′B′C′ est double de l'aire ABC.

(H. Van Aubel).

Plus généralement, si A_1, B_1, C_1 sont trois points quelconques pris sur les côtés du triangle ABC, on a

$$A'B'C' = 2ABC + A_1B_1C_1.$$

(J. Van de Griend)

×**1569**. Résoudre le système

$$(x - a^2)(y - b^2) = ab(z + ab),$$
$$(x - a^2)(z - c^2) = ac(y + ac),$$
$$(y - b^2)(z - c^2) = bc(x + bc).$$

(H. G. A. Verkaart).

1570. Une conique touche les trois côtés du triangle ABC et passe par l'orthocentre H. Démontrer que la tangente au point H′ de cette courbe qui est diamétralement opposé à H est une droite de Simson du triangle ABC. Trouver le lieu du point H′. (Schäfli).

(*) Le théorème de M. Youngman (Voir Question 1564) est exact; nous avons pu le vérifier. (J. N.).

SUR LES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE $x^2 + y^2 = z^2$.(*)

1. *Le procédé.* Soit (a, b, c) un système de solutions en nombres entiers de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$, de sorte que

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Posons

$$a' = a + c, \quad b' = b + c, \quad c' = a + b + c. \tag{2}$$

Les trois nombres a', b', c' ne satisfont pas à l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. En effet, on trouve sans peine

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 = c^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

Mais si l'on opère sur a', b', c' comme on a opéré sur a, b, c, on trouve trois nombres

$$\begin{gathered} A = a' + c' = 2(a + b + c) - b, \quad B = 2(a + b + c) - a, \\ C = 2(a + b + c) + c, \end{gathered} \tag{3}$$

qui vérifient l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. En effet, posons $s = a + b + c$; nous aurons

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - C^2 &= 4s^2 - 4bs + b^2 + 4s^2 - 4as + a^2 - 4s^2 - 4cs - s^2 \\ &= 4s^2 - 4s(b + a + c) + a^2 + b^2 - c^2 = 0. \end{aligned}$$

L'application répétée du procédé qui permet de passer du système (a, b, c) au système $(a', b' c')$, et de celui-ci au système (A, B, C), donne un nombre indéfini de *solutions* ou *non-solutions* de l'équation indéterminée $x^2 + y^2 = z^2$. On peut, en effet, partir d'une solution évidente où l'un des trois nombres est nul et où les deux autres sont égaux mais quelconques. Ainsi, soit

$$a = 0, \quad b = n, \quad c = n;$$

on trouvera

$$\begin{aligned} a' &= n, \quad b' = 2n, \quad c' = 2n; \\ A &= 3n, \quad B = 4n, \quad C = 5n. \end{aligned}$$

D'ailleurs le procédé est plus fécond qu'il ne paraît au premier abord. Dans les valeurs de A, B, C, à cause de (1), on peut remplacer a par $-a$, b par $-b$, c par $-c$, à part, ou simultanément, sans que

(*) D'après divers articles de Monck, Hopkins, etc.

les valeurs absolues de A, B, C ne cessent de vérifier l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Par suite, d'un seul système (a, b, c) vérifiant (1), on peut tirer, en général, quatre systèmes de solutions vérifiant (3). On a, par exemple,

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

En faisant $a = \pm 12$, $b = \pm 5$, $c = \pm 13$, dans les formules (3), on trouve les relations :

$$\begin{aligned} 46^2 + 55^2 &= 73^2, \\ 7^2 + 24^2 &= 25^2, \\ 28^2 + 45^2 &= 53^2, \\ 3^2 + 4^2 &= 5^2. \end{aligned}$$

2. *Procédé inverse.* Si $A^2 + B^2 = C^2$, on peut tirer des formules (3) des valeurs de a, b, c telles que $a^2 + b^2 = c^2$. On trouve en effet, sans peine

$$a + b + c = A + B - C = S.$$

$$a = 2S - B = 2A + B - 2C, \quad b = 2S - A = A + 2B - 2C, \quad (4)$$

$$-c = 2S - C \quad \text{ou} \quad c = 3C - 2A - 2B.$$

On vérifie aisément que l'on a $a^2 + b^2 - (-c)^2 = 0$, comme une conséquence de $A^2 + B^2 - (-C)^2 = 0$; mais la chose devient évidente, sans nouveau calcul, si l'on observe que les relations (4), qui lient a, b, $-c$ à A, B, $-C$ sont de même forme que les relations (3) qui lient A, B, C à a, b, c.

Si A, B, C sont positifs et si $A < B$, b est positif et inférieur à B, c est positif et inférieur à C, a est positif, nul ou négatif, mais en tout cas $\pm a + b + c$ est inférieur à $A + B + C$.

1° b est positif ou $A + 2B > 2C$. En effet, cette inégalité revient à celles-ci :

$$A^2 + 4AB + 4B^2 > 4C^2 = 4A^2 + 4B^2,$$

$$4AB > 3A^2, \quad 4B > 3A.$$

2° $b < B$ ou $A + 2B - 2C < B$. En effet, cette inégalité équivaut à

$$(A - C) + (B - C) < 0.$$

3° c est positif ou $3C > 2A + 2B$. En effet, cette inégalité équivaut aux suivantes :

$$9C^2 = 9A^2 + 9B^2 > 4A^2 + 4B^2 + 8AB$$

ou

$$5(A - B)^2 + 2AB > 0.$$

4° $c < C$ ou $3C - 2A - 2B < C$. En effet, cette inégalité revient à $C < A + B$ ou $C^2 < A^2 + B^2 + 2AB$, ou encore $0 < 2AB$.

5° a sera positif, nul ou négatif, selon que l'on aura $2A + B$ supérieur égal ou inférieur à $2C$, ou $4A^2 + 4AB + B^2$ supérieur, égal ou inférieur à $4A^2 + 4B^2$, ou enfin $4A$ supérieur, égal ou inférieur à $3B$. *Exemples :*

$A = 48$,	$B = 55$,	$C = 73$	donnent	$a = 5$,	$b = 12$,	$c = 13$.
$A = 3$.	$B = 4$,	$C = 5$	donnent	$a = 0$,	$b = 1$,	$c = 1$.
$A = 7$,	$B = 24$,	$C = 25$	donnent	$a = -12$,	$b = 5$,	$c = 13$.

6° On a toujours $a + b + c = A + B - C$ inférieur à $A + B + C$.

7° Si a est négatif, $-a + b + c$ est inférieur à $A + B + C$. En effet, cette inégalité revient à

$$(-2A - B + 2C) + (A + 2B - 2C) + 3C - 2A - 2B < A + B + C$$

ou $$-3A - B + 3C < A + B + C$$

ou encore $$C < 2A + B.$$

3. *Le procédé direct généralisé appliqué au système* $a = 0$, $b = n$, $c = n$ *donne* TOUTES *les solutions de* $x^2 + y^2 = z^2$. Car soit une solution quelconque $A^2 + B^2 = C^2$. En y appliquant le procédé inverse, on en déduit une solution $a^2 + b^2 = c^2$ où l'on a ou bien $a = 0$, ou bien une solution où $b < B$, $c < C$, $\pm a + b + c < A + B + C$, b et c étant positifs. Donc l'application répétée du procédé inverse permettra d'arriver à une solution de la forme $0 + n^2 = n^2$; par suite, le procédé direct permettra de repasser de $0 + n^2 = n^2$ à $A^2 + B^2 = C^2$.

Exemple. De $49^2 + 1200^2 = 1201^2$, on tire successivement

$$(-1104)^2 + 47^2 = 1105^2 \quad \text{ou} \quad 47^2 + 1104^2 = 1105^2,$$
$$(-1012)^2 + 45^2 = 1013^2 \quad \text{ou} \quad 45^2 + 1012^2 = 1013^2,$$

et, ainsi de suite, jusque

$$(-12)^2 + 5^2 = 13^2 \quad \text{ou} \quad 5^2 + 12^2 = 13^2,$$
$$(-4)^2 + 3^2 = 5^2 \quad \text{ou} \quad 3^2 + 4^2 = 5^2,$$
$$0^2 + 1^2 = 1^2.$$

(P. M.)

EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL,

par M. E. N. Barisien.

I. *La surface de la podaire d'une ellipse par rapport à son centre vaut la moitié de celle du cercle orthoptique.*

La surface de la podaire de la développée d'une ellipse par rapport à son centre est égale à la surface comprise entre les périmètres de l'ellipse et de sa podaire centrale.

Ces deux théorèmes sont connus; nous les reproduisons ici pour rappeler deux principes très féconds dus à Steiner(*) et conduisant rapidement à la quadrature d'un grand nombre de courbes définies géométriquement, sans qu on ait besoin de recourir à leur équation.

1. *Dans un même plan, une droite* AB *de longueur donnée ou variable roule le long d'une courbe fixe convexe* (l'extrémité A restant sur cette courbe); *une seconde droite* OL *toujours égale à* AB *tourne autour de son extrémité fixe* O *avec la même vitesse angulaire que* AB. *Ces deux droites engendrent des aires qui sont constamment équivalentes.*

2. *Dans un même plan, des droites* OA, O_1A_1, O_2A_2 ... *tournent autour de leurs extrémités supposées fixes avec des vitesses angulaires égales ; si entre les carrés des longueurs variables de ces droites il existe une relation linéaire*

$$m.\overline{OA}^2 + m_1.\overline{OA_1}^2 + m_2.\overline{OA_2}^2 + \cdots = 0,$$

la même relation a lieu entre les aires engendrées pendant le même temps par ces droites.

Cela posé, soient MP,MQ deux tangentes rectangulaires à une ellipse; P_1, Q_1, R_1 les projections du centre O sur ces droites et sur la normale en P. On sait que $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$; prenons sur OP_1 la longueur $OM_1 = OM$. Il est facile de voir que

$$\overline{OM_1}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OQ_1}^2.$$

En appliquant le second principe de Steiner, on voit que l'aire du cercle orthoptique vaut deux fois celle de la podaire centrale de l'ellipse. Celle-ci a donc pour expression $\frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)$; elle est moyenne arithmétique entre les deux cercles qui ont pour rayons les demi-axes de l'ellipse.

(*) *Œuvres complètes*, t. II, pp. 169-170.

Les droites OR_1, PP_1 ayant même longueur et des vitesses angulaires égales, elles engendrent des aires égales (Principe I de Steiner). L'aire totale de la podaire centrale de la développée est donc égale à $\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2) - \pi ab = \frac{1}{2}\pi(a-b)^2$.

II. *L'aire du lieu du point de rencontre* N *de deux normales rectangulaires* NP, NQ *à l'ellipse* E *est le double de l'aire de la podaire centrale de la développée de la même ellipse.*

Soient R, S les projections de O sur les normales NP, NQ ; la normale symétrique de NP par rapport à O rencontre NQ en un point N_1 appartenant encore au lieu N. Soient ν, ν_1, σ les inclinaisons de ON, ON_1, OS sur l'axe Ox ; on a

$$\sigma = \frac{\nu+\nu_1}{2}, \quad \overline{ON}^2 = \overline{ON_1}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2,$$

d'où l'on déduit

$$\overline{ON}^2.(d\nu + d\nu_1) = 2d\sigma.(\overline{OR}^2 + \overline{OS}^2),$$

ce que l'on peut écrire

$$\overline{ON}^2.d\nu + \overline{ON_1}^2 d\nu_1 = 2\overline{OR}^2 d\sigma + 2\overline{OS}^2.d\sigma.$$

En intégrant entre les limites 0 et 2π, on aura dans le premier membre deux fois l'aire de la courbe (N), et dans le second membre quatre fois l'aire de la courbe (R)...

Voici une autre méthode. Les tangentes en P et Q se coupent en un point M du cercle de Monge. La droite MN passe par le milieu I de la corde AB et par le centre O ; elle rencontre l'ellipse en deux points K, L. Posons $OK = \alpha$ et observons que $\alpha^2 = OI.OM$; nous aurons

$$\overline{ON}^2 = (IN - OI)^2 = (OM - 2OI)^2 = a^2 + b^2 - 4\alpha^2 + 4\overline{OI}^2.$$

Par conséquent, si U et U_1 désignent les aires totales des courbes (N) et (I), on a (Principe II de Steiner)

$$U = \pi(a^2+b^2) - 4\pi ab + 4U_1.$$

Appelons θ l'angle MOx ; alors

$$OI = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$U_1 = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \overline{OI}^2.d\theta = \frac{2a^4b^4}{a^2+b^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2}.$$

La dernière intégrale s'obtient aisément par la substitution $a \operatorname{tg} \theta = b \operatorname{tg} \omega$; on trouve $U_1 = \frac{1}{2}\pi ab$, ensuite $U = \pi(a-b)^2$.

L'égalité $U_1 = \frac{1}{2}\pi ab$ peut s'établir géométriquement en faisant une contreprojection orthogonale(*) de la figure sur un plan mené par Ox et incliné sur le plan de E de l'angle $\varphi = \arccos \frac{b}{a}$. Les contreprojections de E et du cercle Σ de Monge seront un cercle E′ de rayon a et une ellipse Σ' ayant pour demi-axes $a' = \sqrt{a^2+b^2}$, $b' = \frac{aa'}{b}$; celle du rectangle MPNQ sera un losange M′P′N′Q′. L'enveloppe de la corde P′Q′ sera la polaire réciproque de Σ' par rapport à E′; c'est donc une ellipse ε ayant pour demi-axes $\frac{a^2}{a'}$, $\frac{a^2}{b'} = \frac{ab}{a'}$. Le milieu I′ de P′Q′ décrit la podaire de O par rapport à ε. L'aire de cette courbe est $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a^4}{a'^2}+\frac{a^2b^2}{a'^2}\right) = \frac{1}{2}\pi a^2$, et celle de sa projection (I) $= \frac{1}{2}\pi a^2 \cos\varphi = \frac{1}{2}\pi ab$.

Les équations polaires des courbes (I) et (N) ont été données par M. Jeřábek (*Mathesis*, 1891, p. 76).

III. *Construire la courbe*

$$(x^2+y^2)^2 = ax^3+by^3, \quad \text{ou} \quad \rho = a\cos^3\omega + b\sin^3\omega.$$

et calculer son aire U.

Nous supposons a et b positifs; les autres hypothèses donnent les courbes symétriques de la première par rapport à Ox, Oy ou O. Il suffit de faire varier ω dans l'intervalle $(0, \pi)$; car le changement de ω en $\omega+\pi$ ne fait que changer le signe de ρ.

Aux valeurs $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ correspondent un point A de Ox et un point B de Oy distants de l'origine de a et b. La dérivée

$$\rho' = 3\sin\omega\cos\omega(b\sin\omega - a\cos\omega)$$

s'annule en changeant de signe quand ω passe par les valeurs $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$; les deux premières correspondent à des maxima

(*) Si une figure plane F′ est une projection orthogonale d'une autre figure plane F, nous dirons que F est une *contreprojection* orthogonale de F′.

de ρ en A et B, la dernière à un minimum en un point C, projection orthogonale de O sur la droite AB. En ces points, la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur. Cette circonstance fait supposer que la courbe est entièrement extérieure au triangle OAB et que le contact de la droite AB est au moins du troisième ordre. Effectivement, la différence entre les rayons vecteurs de la courbe et de la droite pour une même valeur de ω est

$$a\cos^2\omega + b\sin^2\omega - \frac{ab}{a\sin\omega + b\cos\omega}$$
$$= \frac{\sin\omega\cos\omega(a\cos\omega - b\sin\omega)^2}{a\sin\omega + b\cos\omega} > 0.$$

ρ s'annule pour $\operatorname{tg}\omega = -\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; soient α cette valeur de ω, et Oz la droite correspondante dans l'angle yOx', Oz' le prolongement de Oz. Dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$, ρ est positif; de là, un arc situé dans l'angle yOz et tangent à Oz. Dans l'intervalle (α, π), ρ est négatif, ce qui donne un dernier arc de notre courbe dans l'angle $z'Ox$. On a

$$2U = \int_0^{\pi}\left(a^2\cos^6\omega + b^2\sin^6\omega - ab\frac{\sin^2 2\omega}{4}\right)d\omega.$$

Les formules

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3}{2n(2n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx = \frac{2n.(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3},$$

ont de fréquentes applications; on en conclut

$$\int_0^{\pi}\sin^6\omega\,d\omega = \int_0^{\pi}\cos^6\omega\,d\omega = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\omega\,d\omega = \frac{5}{16}\pi.$$

Comme $\sin^2 2\omega$ prend les mêmes valeurs, avec des signes contraires, dans les deux intervalles $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, le dernier terme de 2U

s'annule; par conséquent, $U = \frac{5}{16}\pi(a^2 + b^2)$. Si l'on veut avoir l'aire du secteur OACB de la courbe, on observe que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 2\omega d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3},$$

et l'on obtient pour cette aire $\frac{5}{64}\pi(a^2 + b^2) - \frac{ab}{4}$. Le lecteur pourra encore chercher les aires limitées par les arcs de la courbe compris dans les angles yOz, $z'Ox$ et par Oy ou par Ox.

VARIÉTÉS.

Sur la méthode d'enseignement en Amérique.

En Amérique, l'heure durant laquelle le maître entre en contact avec sa classe est communément appelée *la récitation*. William James, de l'Université de Harvard, parlant de la *Méthode de récitation américaine*, la met en contraste avec les cours allemands et écossais et le système anglais des *Tutors*. Une *récitation* américaine typique d'autrefois, soit par exemple pour l'algèbre, peut se décrire comme il suit : lorsque la classe est réunie, le maître s'informe des progrès que les élèves ont faits dans la préparation de leur leçon, et, le cas échéant, il en explique brièvement quelques-unes des difficultés. Il assigne ensuite à la classe un problème pris dans le manuel en usage. Dès que quelques élèves ont terminé, on commence les explications; chaque élève ira à son tour à la planche noire et expliquera sa solution du problème. Peut-être trouvera-t-on assez de temps à la fin de l'heure pour donner quelques explications sur la leçon suivante; mais souvent le temps manque et l'on s'en remet au manuel pour les solutions et les explications types. Ainsi le point saillant de l'ouvrage accompli pendant l'heure est la récitation par l'élève, soit de vive voix, soit écrite, de ce qu'il a appris avant de venir en classe. Cette forme de récitation n'est plus aujourd'hui d'un usage absolument général; elle a subi des transformations sur certains points.

D'après la méthode allemande, le maître doit surtout étudier un nouveau sujet avec sa classe, il développe et étend ses questions en exigeant des explications sur tous les points de la leçon, jusque dans

les détails les plus minimes. Une fois que le sujet est bien compris, il en fait l'objet d'un devoir écrit; puis, dans la leçon suivante, l'élève est soumis à une interrogation permettant de voir si le sujet a été bien compris et retenu.

Dans le système anglais, le manuel est strictement suivi. Lorsque l'élève rencontre quelque point qu'il ne peut pas comprendre, il consulte son *Tutor* privé qui l'aide à surmonter l'obstacle, après quoi il continue comme auparavant.

En France, la méthode de conférences ou de cours est en usage à partir de la classe III et pour les élèves de 14 ans et plus.

La méthode américaine a donné de bons résultats. Du moment où l'on s'en remet complètement aux manuels, ces livres doivent être rédigés avec le plus grand soin. On a souvent reconnu que les livres de classe américains sont les meilleurs du monde, tant au point de vue de la méthode qu'à celui de l'exécution. Ceci ne veut pas dire qu'ils soient supérieurs aux autres au point de vue scientifique. Les ouvrages anglais, surtout ceux qui sont en usage dans les Collèges (gymnases), n'ont pas la même valeur pédagogique; la classification des matières laisse souvent à désirer et leurs explications sont souvent trop condensées.

La méthode allemande essaie de présenter le travail sous une forme facile à comprendre, même pour les élèves les moins doués, tandis que le plan anglais a l'avantage de faciliter beaucoup les progrès pour ceux qui le sont davantage. La méthode américaine ne paraît pas s'occuper plutôt des intérêts de ceux qui ont du talent que de ceux qui n'en ont pas; elle se met à la portée du plus grand nombre.

.... Les formes allemande et française placent le maître au centre de la classe, tandis que d'après la méthode américaine, les élèves prennent tour à tour cette place. La méthode française est l'enseignement didactique, la méthode anglaise celle d'un laboratoire. la méthode américaine se concentre dans le manuel, et la méthode allemande est nettement socratique.

Chacune de ces méthodes présente des avantages ainsi que des défauts; chacune est applicable au cours des études suivant les degrés et les sujets. (Extrait d'un article de Joseph V. Collins, Stevens Point, Wis., Etats Unis; voir *l'Enseignement Mathématique*, 1906, p. 147)

×NOTES MATHÉMATIQUES.

11. *Sur un problème d'arithmétique.* M. G. Petit-Bois nous communique le problème suivant :

Des personnes A, B, C, ... *se partagent une certaine somme déposée dans une caisse.* A *prend d'abord* 10 *frcs, puis remet dans la caisse le tiers de ce qu'elle contient encore après ce prélèvement;* B *prend ensuite* 9 *frcs, et remet dans la caisse le tiers de ce qu'elle contient;* C *prend ensuite* 8 *frcs et remet le tiers de ce que la caisse contient. Il se trouve que toutes les personnes ont eu la même part. Trouver le nombre des personnes et la part de chacun.*

Réponse : La caisse contenait 28 frcs et les partageants sont au nombre de 7.

Le problème a une certaine analogie avec le *problème de l'héritage* qui a été traité dans *Mathesis*, 1891, pp. 111, 136, 187. En voici une généralisation.

Des personnes se partagent une caisse contenant de l'argent, de la manière suivante. La première, après avoir prélevé a frcs, remet les $\frac{p}{q}$ *du reste; la deuxième prend* $a - b$ *frcs et remet dans la caisse les* $\frac{p}{q}$ *du reste; la troisième prend* $a - 2b$ *frcs et remet dans la caisse les* $\frac{p}{q}$ *du nouveau reste. Et ainsi de suite. Sachant que toutes les parts ont été égales, calculer le montant de la somme partagée.*

Soient x la somme partagée, y la part de chaque personne, z le nombre des partageants. D'après l'énoncé, la $(n+1)^e$ personne a eu $a - nb$ moins les $\frac{p}{q}$ de ce qui restait dans la caisse après ce prélèvement de $a - nb$; d'où l'équation

$$a - nb - \frac{p}{q}(x - ny - a + nb) = y,$$

ou

$$a - \frac{p}{q}(x - a) - y - n\left(b - \frac{p}{q}y + \frac{p}{q}b\right) = 0.$$

Cette égalité ayant lieu pour plus d'une valeur de n exige qu'on ait séparément

$$a - \frac{p}{q}(x - a) - y = 0, \quad b - \frac{p}{q}y + \frac{p}{q}b = 0.$$

De là on déduit

$$y = \frac{b(p+q)}{p}, \quad x = \frac{(p+q)(ap-bq)}{p},$$

$$z = \frac{x}{y} = \frac{ap-bq}{pb} = \frac{a}{b} - \frac{q}{p}.$$

Exemple numérique :

$$a = 62, \quad \frac{p}{q} = \frac{5}{7}, \quad b = 5, \quad x = 132, \quad y = 12, \quad z = 11.$$

Si des valeurs de a, b, p, q donnent pour z une valeur entière positive z' plus une fraction, le partage attribue à z' personnes des parts égales, mais il reste encore dans la caisse une certaine somme inférieure à une part. (J. N)

18. *Sur la droite de Simson.* Etant donnés une circonférence de centre O, un point M sur cette ligne et une droite d, on peut se proposer d'inscrire au cercle O un triangle ABC tel que d soit la droite de Simson de M par rapport à ce triangle.

Prenons pour A un point quelconque de la circonférence O et sur la corde AM comme diamètre décrivons une circonférence ω; si celle-ci rencontre la droite d en deux points β, γ, les droites Aβ, Aγ rencontrent la circonférence en deux points B, C qui, avec A, sont les sommets d'un triangle satisfaisant à la question.

On voit que le problème peut admettre une infinité de solutions. L'orthocentre H du triangle variable ABC décrit une parallèle à d; car d passe au milieu de la droite HM. Le centre de gravité G décrit également une parallèle à d, puisque OG $= \frac{1}{3}$OH.

Si la circonférence auxiliaire ω touche la droite d en un point β, le triangle ABC dégénère en un triangle ayant deux côtés confondus avec la droite AβC et pour troisième côté la tangente en C à la circonférence O. Cette tangente doit donc rencontrer d en un point α tel que Mα soit perpendiculaire à Cα. On déduit de là la proposition suivante : *Sur une corde* MA *d'un cercle* O *comme diamètre on décrit une circonférence* ω. *Une droite quelconque menée par* A *rencontre ces deux courbes aux points* C, β; *les tangentes en ces points se coupant en* α, *la droite* Aα *est perpendiculaire à* Cα.

(En partie d'après le *Journal de Vuibert*, 1906, p. 104).

18. *Sur une généralisation de l'orthocentre.* On connaît depuis longtemps la proposition suivante :

Etant donné un quadrilatère inscrit à un cercle, les perpendiculaires abaissées du milieu d'un côté ou d'une diagonale sur le côté opposé ou sur l'autre diagonale concourent en un même point.

M. S. KANTOR l'a généralisée dans les termes suivants (Wiener Sitzungsberichte, 1876) :

Etant donnés n points sur une circonférence, les perpendiculaires abaissées du centre de gravité de $(n-2)$ *quelconques de ces points sur la corde qui passe par les deux points restants concourent en un même point.*

Si $n = 3$, on retrouve ainsi le théorème sur les trois hauteurs d'un triangle.

Considérons par exemple cinq points concycliques A, B, C, D, E. Leur centre de gravité G divise dans le rapport 2 : 3 la distance du centre de gravité F des points A, B, C au milieu M de la distance DE. Par suite, la parallèle à OM par F rencontre OG en un point H tel que $OG : GH = 3 : 2$. Ce point H ne change pas quand on partage les points A, B, C, D, E autrement en deux groupes de 3 et de 2 points.

Plus généralement, étant donnés $p+q$ points, on les partage de toutes les manières en deux groupes de p et de q points ; soient M, N les centres de gravité de deux groupes ainsi associés, et O un point donné quelconque. La parallèle menée par M à la droite ON passe par un point fixe.

BIBLIOGRAPHIE.

A College Algebra, by H. B. FINE, Professor of Mathematics in Princeton-University. New-York, Ginn and C°. London, Matheson, 1906. (Un vol. in-12, cartonné de VII-595 pp.). Prix : 6 sh. 6 d.

Sommaire. Première partie. Nombres. I. Les nombres naturels. Numération, addition, multiplication (pp. 1-16). II. Soustraction et nombres négatifs (16-27). III. Division et fractions (27-38). IV. Nombres irrationnels (39-70). V. Nombres imaginaires (70-78).

Deuxième partie. Algèbre. I. Considérations préliminaires (79-93). II. Opérations fondamentales (93-110). III. Equations simples à une inconnue (110-127). IV. Systèmes d'équations simultanées simples (127-155). V. Division algébrique (155-176). VI. Décomposition en facteurs (176-196). VII. P. q. c. d. et moindre multiple commun (196-213) VIII. Fractions rationnelles (213-245). IX. Fonctions symétriques (245-252). X. Binôme de Newton (252-260). XI. Evolution

(= Puissances et racines) (260-271). XII. Fonctions irrationnelles; calcul des radicaux. Exposants fractionnaires (271-298). XIII. Équations du second degré. (298 304). XIV. Discussion de l'équation du second degré. Maxima et minima 304-309). XV. Équations réductibles au second degré (309 317). XVI. Équations simultanées qu'on peut résoudre par le second degré (317-342). XVII. Inégalités (340-342). XVIII. Équations indéterminées du premier degré (342-347). XIX Rapports et proportions. Fonction d'une ou de plusieurs variables (347-354). XX. Progressions arithmétiques (354-357). XXI. Pr. géométriques (357-362). XXII. Pr. harmoniques (362-364). XXIII. Méthode des différences. Progressions arithmétiques des ordres supérieurs. Interpolation (364-374). XXIV Logarithmes (374-393). XXV. Permutations et combinaisons (393-407). XXVI. Puissance d'un polynôme (408-409). XXVII. Probabilités (409-424). XXVIII. Induction mathématique (424-425). XXIX. Théorie des équations (425-483). XXX. Équations du 3e et du 4e degré (483-492). XXXI. Déterminants et élimination (492-520). XXXII. Convergence des séries (520-589). XXXIII. Opérations sur les séries (539-553). XXXIV. Séries du binôme, exponentielle et logarithmique (553-560). XXXV. Séries récurrentes (560-564). XXXVI. Produits infinis (564-566). XXXVII. Fractions continues (566-577). XXXVIII. Propriétés des fractions continues (577-591). — Index alphabétique (591-595).

Cette table des matières indique suffisamment l'ordre suivi par l'auteur. Dans la première partie, M. Fine a réuni toutes les définitions et les notions qui, à notre avis, sont les plus difficiles, les plus subtiles. Nous ne connaissons pas suffisamment l'enseignement américain pour nous prononcer sur cette marche si opposée à la clarté française. Il nous a semblé également que l'ouvrage est plutôt un canevas de leçons qu'un manuel destiné à des élèves ordinaires(*).

Théorie et pratique des approximations numériques, par Ch. Fassbinder, professeur du Cours préparatoire à l'École navale au Collège Stanislas. Paris, Gauthier-Villars, 1906). In-8 de VI-90 pp.). Prix : 3 fr.

Les trois premiers Chapitres de cet Ouvrage ne sont que le développement de la partie de programmes officiels concernant les erreurs. Pour tout ce qui regarde les erreurs absolues, il a été fait de larges emprunts à la méthode et aux idées exposées par M. Guyou dans sa *Note sur les approximations numériques*. Dans le Chapitre suivant, se trouvent démontrées les règles des opérations arithmétiques abrégées, règles qui ont leur place tout indiquée à la suite d'une théorie élémentaire des erreurs. Le dernier Chapitre, qui ne rentre pas dans les

---

(*) C'est aussi l'avis de M. E. V. Huntington dans un compte rendu de l'Algèbre de Fine qu'il vient de publier dans le *Bulletin of the American mathematical Society* (mars 1906; le vol. XII, n° 6, pp. 305-309), et où il en fait ce grand éloge : « C'est un livre que tout professeur de mathématiques, même s'il ne doit pas enseigner l'algèbre, doit lire et posséder. Si une bibliothèque mathématique ne devait contenir, outre le Traité de Chrystal en deux volumes, qu'un seul manuel d'algèbre en langue anglaise, c'est celui de Fine que je désignerai sans hésiter ».

Le présent compte rendu était rédigé avant la publication de l'article de M. Collins dont nous reproduisons plus haut une partie.

programmes actuels, suppose connus le calcul des dérivées et le théorème des accroissements finis. De nombreux exercices sont traités dans le texte; à la fin du volume on en a indiqué d'autres. Quelques-uns sont empruntés à l'*Arithmétique* de Serret et aux ouvrages de MM. Combette, Humbert, Tannery et Griess. Les derniers exercices sont ceux qui ont été proposés aux concours d'admission à l'École navale et aux Écoles d'arts et métiers depuis 1885.

Sommaire. I. Définitions fondamentales : erreur absolue, erreur relative, nombre de chiffres exacts. II. Calculs approchés; problèmes du premier type : méthode des erreurs absolues, méthode des erreurs relatives, méthode des chiffres exacts. III. Calculs approchés; problèmes du second type : méthode des erreurs absolues, méthode des chiffres exacts; remarques sur le calcul de certaines expressions irrationnelles. IV. Notions sur les opérations abrégées. V. Application de l'Algèbre à la théorie des erreurs. — Exercices. Écoles d'arts et métiers. École navale.

Leçons d'Algèbre et d'Analyse à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales, par Jules Tannery, Sous-Directeur de l'École Normale supérieure. Paris, Gauthier-Villars, 1906 (de VII-423 pages, avec 35 figures et 166 exercices; et de 616 pages, avec 104 figures et 238 exercices). Prix 12 + 12 fr.

Nous ne pouvons donner une meilleure idée de cet important ouvrage qu'en en citant la préface et en reproduisant la table de matières.

Préface. « J'ai essayé de rédiger les présentes *Leçons* dans un esprit conforme à celui des programmes de la classe de Mathématiques spéciales, tels qu'ils ont été arrêtés, en 1904, après entente entre les représentants des Ministères intéressés. Je me suis appliqué, de mon mieux, à rendre les choses visibles, à éviter les détours subtils et l'abus du formalisme, à écarter les propositions particulières qui n'intéressent que les curieux, ou les généralités sans application, à pousser enfin les théories jusqu'à la réalisation numérique.

Toutefois, lorsqu'il m'est arrivé de laisser de côté certains raisonnements, indispensables pour établir un théorème en toute rigueur logique, j'ai cru devoir en avertir le lecteur et lui signaler les difficultés ou les lacunes. J'ai horreur d'un enseignement qui n'est pas toujours sincère : le respect de la vérité est la première leçon morale, sinon la seule, qu'on puisse tirer de l'étude des sciences. Sans doute, il y a des démonstrations qui ne sont pas rigoureuses et qui sont excellentes, parce qu'elles laissent dans l'esprit une image qui ne s'efface pas, que l'on voit en même temps que la proposition, et dont la clarté suffit à guider dans les applications; si elles présentent quelque lacune, il faut le savoir, et il est bon de savoir où est cette lacune. Aussi bien dans la vie pratique que dans la spéculation, il importe de distinguer ce que l'on comprend avec certitude, ce dont on est justement persuadé, ce que l'on croit; il est bon de distinguer les choses que l'on possède entièrement et celles dont on peut user, sous certaines conditions.

Je n'avais ni la place, ni les connaissances nécessaires pour indiquer partout, d'une façon sûre, la filiation historique des idées; je n'ai fait nulle histoire et je le regrette. Sauf quelques noms consacrés par l'usage, j'ai évité les noms propres; l'habitude d'accoler un nom à toutes les propositions me semble un

abus qui n'a rien à faire avec l'histoire. Lors même que cette habitude est consacrée, elle ne va pas sans inconvénient; il est fâcheux qu'un élève de Mathématiques spéciales ne connaisse Descartes que par la règle des signes, Newton que par la méthode d'approximation ou la formule du binome et qu'il soit tenté de regarder Rolle comme aussi grand mathématicien que Descartes ou Newton. Je n'ai point cité davantage, bien qu'ils fussent souvent d'excellents géomètres, les auteurs des démonstrations ou des améliorations à des démonstrations antérieures : il m'aurait été parfois difficile de distinguer entre les souvenirs de mes lectures, de mes conversations avec mes maîtres, mes collègues ou mes élèves. Ne pouvant le faire partout, je ne l'ai fait nulle part.

N'ayant cité personne, je dois m'excuser d'autant plus d'avoir souvent renvoyé le lecteur à mon *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Ce dernier livre a été écrit avec des préoccupations tout autres que les présentes *Leçons*. Je me suis proposé d'y présenter les choses, sous une forme abstraite, avec une entière rigueur logique : cette rigueur est indispensable quand on veut pénétrer dans certains domaines de la Science, où celui qui prétendrait s'en passer commettrait à coup sûr les plus lourdes erreurs; celles-ci ne sont guère à craindre, au moins actuellement, dans les applications des Mathématiques, et il n'est pas mauvais, en commençant, de ne pas se laisser paralyser par la terreur d'y tomber : quelques lecteurs, toutefois, peuvent désirer connaître le complément d'un raisonnement, la suite d'une théorie : c'est à ce désir possible que j'ai voulu répondre.

En achevant la rédaction, j'ai été quelque peu effrayé de la longueur de mon manuscrit : je voudrais me persuader que cette longueur tient à l'abondance des explications et au nombre des exemples : je serai heureux si le lecteur trouve trop facile la lecture de ces Leçons et s'il juge qu'il aurait bien pu traiter seul les exemples que j'ai développés. Toute brièveté a son mérite, même la brièveté verbale, que je n'ai nullement cherchée; mais la véritable brièveté n'est pas celle-là : le parfait enseignement serait, à mon sens, un enseignement tel que celui qui l'a reçu et qui se l'est complètement assimilé s'étonne du peu de place que tiennent dans sa propre pensée les principes fondamentaux, les théories qui s'en déduisent, les méthodes qui en résultent, parce que ces principes sont si clairs, ces déductions si naturelles, ces méthodes si aisées qu'il peut à chaque instant les retrouver sans effort. Est-il besoin de dire que je n'ai nullement la prétention de m'être approché de cet idéal, même de loin? »

TABLE DES MATIÈRES (Tome I). NOTION DE COUPURE. NOMBRES IRRATIONNELS. CALCUL DES RADICAUX. EXPOSANTS FRACTIONNAIRES, NÉGATIFS, IRRATIONNELS. Définition des nombres irrationnels. Opérations sur ces nombres. Calcul des radicaux. Exposants fractionnaires, négatifs, irrationnels. Extension de l'idée de coupure : arc, aires. *Exercices*. Chap. II. POLYNOMES. Préliminaires. Etude d'un polynome à une variable pour les valeurs de la variable voisine de zéro. Polynomes identiques. Etude d'un polynome pour les valeurs de x voisines de a. Dérivées d'un polynome. Puissance d'un binome. Polynomes à plusieurs variables. *Exercices*. Chap. III. DIVISION DES POLYNOMES. Division par un monome. Polynomes ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable. Polynomes ordonnés suivant les puissantes croissantes de la variable. Polynomes à plusieurs variables. *Exercices*. Chap. IV. DES FRACTIONS RATION-

NELLES. Etude d'une fraction rationnelle en x pour les valeurs de x voisines d'une valeur donnée. Fonction homographique. *Exercices.* Chap. V. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR. Définition et recherche du plus grand commun diviseur. Propriétés du plus grand commun diviseur. Divisibilité. Polynomes à plusieurs variables. Condition pour que deux polynomes en x soient premiers entre eux, pour qu'ils aient un diviseur de degré égal ou supérieur à un nombre donné. *Exercices.* Chap. VI. NOMBRES IMAGINAIRES. Définitions: opérations sur les nombres imaginaires. Représentation géométrique des nombres imaginaires. Racines $n^{ièmes}$. *Exercices.* Chap. VII. ETUDE DES POLYNOMES A COEFFICIENTS ET A VARIABLE IMAGINAIRES. Définitions. Interprétation géométrique. Etude d'un polynome pour les valeurs de la variable voisines d'une valeur donnée. Extension de divers résultats. Théorème fondamental de l'Algèbre. *Exercices.* Chap. VIII. ARRANGEMENTS, COMBINAISONS, PERMUTATIONS, INVERSIONS. FORMULE DU BINOME. *Exercices.* Chap. IX. EQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ. *Exercices.* Chap. X. DÉTERMINANTS; ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ. Définition et propriétés fondamentales des déterminants. Equations du premier degré. Multiplication des déterminants. Méthodes d'élimination d'Euler, Sylvester et Bézout. *Exercices.*

(Tome II). Chap. XI. SÉRIES. Séries. *Exercices.* Chap. XII. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE. Généralités. Définition de diverses fonctions. *Exercices.* Chap. XIII. DÉRIVÉES. Définition, calcul des dérivées. Théorèmes fondamentaux sur la variation des fonctions. Fonctions primitives. Dérivées et fonctions primitives de fonctions d'une variable réelle à coefficients imaginaires. Etude de la variation des fonctions primitives. *Exercices.* Chap. XIV. SÉRIES DE FONCTIONS. Séries dont les termes sont des fonctions d'une variable. Séries entières en x. Développements en séries de quelques fonctions simples. Formules de Taylor et de Maclaurin. Cas où la variable est imaginaire. Fonctions exponentielles et circulaires. Fractions rationnelles. Infiniment petits et infiniments grands. *Exercices.* Chap. XV. APPLICATIONS A L'ÉTUDE D'UNE FONCTION, A LA SÉPARATION ET AU CALCUL DES RACINES D'UNE ÉQUATION. Etude de la variation d'une fonction donnée. Séparation des racines. Calcul approché des racines d'une équation. *Exercices.* Chap. XVI. EQUATIONS ALGÉBRIQUES. Relations entre les coefficients et les racines. Fonctions symétriques. Elimination. Equations numériques à une inconnue. *Exercices.* Chap. XVII. NOTATION DIFFÉRENTIELLE. COURBES PLANES. Notation différentielle. Courbes planes. *Exercices.* Chap XVIII. NOTIONS DE CALCUL INTÉGRAL. Intégrale définie. Intégrales indéfinies et intégrales définies. Evaluation approchée d'une intégrale définie. Applications géométriques. Equations différentielles. *Exercices.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1481.

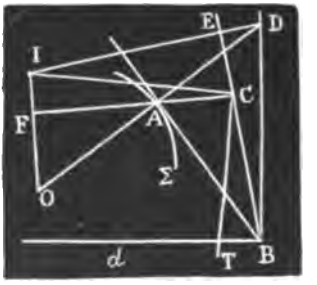
(Voir *Mathesis*, (3); IV, 215).

On donne, dans un même plan, une courbe Σ et une droite d. En un point quelconque A de Σ on mène la tangente qui rencontre d en B, *puis on*

construit le triangle ABC *semblable à un triangle donné* $\alpha\beta\gamma$. *Construire la tangente et le cercle osculateur à la courbe décrite par le point* C *lorsque* A *se déplace sur* Σ. *Trouver l'enveloppe de la tangente en* C, *lorsque* A *restant fixe sur* Σ *l'un des angles* A, B *varie tandis que l'autre conserve sa valeur.* (J. Neuberg).

La méthode employée ici pour trouver la tangente en C est celle de M. Mannheim (*Cours de Géom. descriptive*, p. 173); les principes dont nous nous servons sont les suivants : 1° *Pour une position quelconque d'une figure plane que l'on déplace d'une manière continue sur son plan, les normales, issues des points de la figure, aux trajectoires de ces points passent par le centre instantané de rotation ;* 2° *la projection de ce centre sur une droite de la figure détermine le point de contact de cette droite avec son enveloppe.*

D'après cela : 1° Le centre instantané de rotation de l'angle invariable ABC est à l'intersection D de la perpendiculaire élevée en B sur la trajectoire d de B, avec la normale OA à l'enveloppe Σ de AB; par suite, le point de contact E de BC avec son enveloppe est sur la perpendiculaire abaissée de D sur BC. 2° Le centre instantané de rotation de la droite AB dont le point A décrit la courbe Σ est le centre de courbure O de Σ en A; par suite, le point où la droite AC invariablement liée à la tangente AB touche son enveloppe est la projection F de O sur AC. 3° Si l'on considère maintenant le mouvement de l'angle invariable ACB, on connaît les points de contact de ses côtés avec leurs enveloppes; par conséquent, les normales OF, DE à ces enveloppes déterminent le centre instantané de rotation I de l'angle ACB, de sorte que IC est la normale à la courbe (C), et la perpendiculaire CT est la tangente.



Lorsque, l'angle ABC restant fixe, on fait varier l'angle BAC, le point C parcourt une ponctuelle projective avec le faisceau engendré par AC; ce faisceau est égal à celui qui est engendré par la droite OF perpendiculaire à AC. On en conclut que les points C et I se correspondent dans deux ponctuelles projectives; par suite, la normale IC enveloppe une conique Σ' tangente aux deux droites rectangulaires DE,

BC et à la droite BD. Cette conique est une parabole; car lorsque C est à l'infini sur BE, AC devient parallèle à BE, OF est parallèle à DE et I se transporte également à l'infini; le point E appartient à la directrice de Σ'. Appelons α la droite de l'infini; la tangente mobile IC de Σ' marque sur les tangentes BE et α des ponctuelles projectives; la seconde ponctuelle étant projective avec celle qui est marquée par CT sur α, la tangente CT de la courbe (C) enveloppe également une parabole, laquelle touche les droites BE et d.

Si l'angle CAB est constant et que l'angle ABC varie, le point D et la droite OF ne changent pas; alors le point C, les droites BC, DE et le point I se correspondent dans des formes projectives. Il en résulte que la normale IC à (C) enveloppe une conique Σ'' tangente à AC, OF et OA. On démontre comme ci-dessus que Σ'' est une parabole et qu'il en est de même de l'enveloppe de CT.

La détermination du cercle osculateur en C exige la connaissance du rayon de courbure de la développée de Σ; comme elle est asssz compliquée, nous retirons cette partie de la question 1481.

(J. Neuberg)

Un abonné nous avait adressé une solution dans laquelle il donne la droite DC comme étant la normale en C à la courbe (C); mais il faut remarquer que D est le centre instantané de rotation d'un triangle ABC invariable de forme et de grandeur sans que le côté AB soit assujetti à toucher la courbe Σ.

Question 1509.

(Voir *Mathesis* (3), V, p. 56).

Discuter les racines de l'équation

$$3x^4 + 4px^3 - 12p^2x^2 + p^2(q - q^2) = 0.$$

Considérer p et q comme les coordonnées rectangulaires d'un point M *du plan et distinguer différentes régions de ce plan suivant la nature des racines.* (Faculté des Sciences de Bucarest, 1904).

Solution par M. Abramescu. Posons

$$f(x) = 3x^4 + 4px^3 - 12p^2x^2 + p^2(q - q^2);$$

alors

$$f'(x) = 12x(x - p)(x + 2p).$$

La suite de Rolle est, en supposant $p > 0$,

$$f(-\infty), \qquad f(-2p), \qquad f(0), \qquad f(p), \qquad f(+\infty)$$

ou

$$+, \quad -p^2(32p^2+q^2-q), \quad p^2q(1-q), \quad -p^2(5p^2+q^2-q), \quad +.$$

Les racines de $f(x)=0$ peuvent être séparées par $-\infty$, les racines $f'(x)=0$, et $+\infty$. A cet effet, construisons les ellipses l'axe des p est la perpendiculaire à $0q$, en 0).

$$(c) \quad 32p^2+q^2-q=0, \qquad (c') \quad 5p^2+q^2-q=0.$$

A l'intérieur de (c), on a

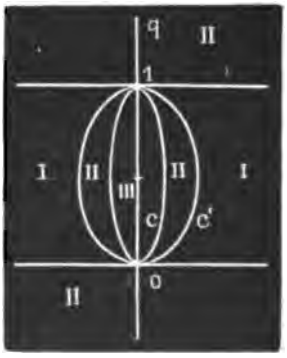
$$f(-\infty)>0, \quad f(-2p)>0, \quad f(0)>0, \quad f(p)>0, \quad f(+\infty)>0,$$

donc aucune variation ; ainsi toutes les racines sont imaginaires.

Dans la région intérieure à (c') et extérieure à (c), on a

$$f(-2p)<0, \quad f(o)>0, \quad f(p)>0;$$

il y a deux variations, donc l'équation $f(x)=0$ a deux racines réelles, l'une comprise entre $-\infty$ et $-2p$, l'autre entre p et 0, et deux racines imaginaires.



A l'extérieur de (c'), dans la région limitée par $q=1$, $q=0$, on a

$$f(-2p)<0, \qquad f(0)>0,$$
$$f(p)<0, \quad f(+\infty)>0,$$

donc quatre racines réelles, les racines sont séparées. Dans les régions situées au-dessus de $q=1$, et au-dessous de $q=0$, on a deux racines réelles, deux imaginaires.

En résumé, dans les régions I, toutes les racines sont réelles, dans les régions II deux réelles, deux imaginaires et à l'intérieur de III toutes les racines imaginaires.

Examinons les limites de ces régions. Les points de (c) donnent pour $f(x)$ une racine double égale à $-2p$ et les deux autres, obtenues en divisant $f(x)$ par $(x+2p)^2$ et résolvant l'équation obtenue, sont

$$x=\frac{2p}{3}(2\pm i\sqrt{2}).$$

Pour les points des droites $q=1$, $q=0$, on a deux racines égales à zéro et deux autres sont

$$\frac{2p}{3}(-1\pm\sqrt{10}).$$

Pour les points de (c') on a une racine double égale à p et deux autres sont

$$\frac{p}{3}(-5 \pm \sqrt{10}).$$

En supposant $p < 0$, on obtient des résultats analogues.

Question 1522.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 144).

On donne une circonférence de centre C *et deux tangentes rectangulaires* Ox, Oy. *Une tangente mobile rencontre* Ox *en* P *et* Oy *en* Q. 1° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* CPQ *est une hyperbole équilatère ;* 2° *le lieu du centre du cercle des neuf points est une droite.*

(E. N. Barisien)

Nous avons reçu cinq solutions intéressantes de cette belle question. Pour abréger, nous uniformisons les notations et évitons les redites.

Le lecteur est prié de faire la figure en faisant passer la tangente PQ entre O et C. A, B et E désigneront les points de contact du cercle C avec les droites Ox, Oy, PQ ; P_1 et Q_1 seront les pieds des hauteurs du triangle CPQ, H l'orthocentre. L'angle PCQ formé par les bissectrices des angles ACE, BCE vaut 45°.

Solution géométrique. Dans le quadrilatère inscriptible APP_1C, l'angle $PAP_1 = PCP_1 = 45°$; donc P_1 est situé sur la diagonale AB du carré OACB et il en est de même de Q_1.

L'angle $HEP_1 = HQP_1 = 45°$ et l'angle $HEQ_1 = HPQ_1 = 45°$. Ainsi, l'angle P_1EQ_1 est droit et le centre du cercle des neuf points du triangle CPQ est sur la droite AB.

Si D est le point de rencontre des droites CE et AB, on a

$$(CHDE) = -1, \qquad \text{ou} \qquad (CDEH) = \tfrac{1}{2}.$$

D'après cela, le lieu de H est la conique homologique du cercle donné, C étant le centre et AB l'axe d'homologie. Ce point C est donc un foyer de la conique (H). Dans cette homologie, la droite limite de la première figure est symétrique de AB relativement au point C ; elle coupe le cercle aux points A′, B′ diamétralement opposés à A et B. Les homologues de A′ et B′ sont les points à l'infini de la conique (H ; l'angle A′CB′ étant droit, la courbe (H) est une hyperbole équilatère.

Remarque. La droite PP_1 enveloppe l'antipodaire d'indice 45° par rapport à Ox; cette antipodaire est une parabole π ayant pour foyer C, pour tangente au sommet la droite AB qui fait l'angle de 45° avec CA perpendiculaire à OA. La droite QQ_1 enveloppe évidemment la même parabole.

Dans l'homologie considérée ci-dessus, les droites PP_1, QQ_1 de la seconde figure ont pour homologues les droites P_1E, Q_1E; donc celles-ci enveloppent la conique Σ' homologique de la parabole π. Le point C et la droite AB sont un foyer et une tangente de ces deux courbes. Les tangentes P_1E et Q_1E étant rectangulaires, le cercle donné, lieu du point E, est le cercle de Monge de la conique Σ'; ainsi le foyer C de Σ' est en même temps son centre, par suite la conique Σ' est le cercle de centre C et tangent à la droite AB. (Cl. Servais)

Plus simplement, CQ et CP sont les bissectrices extérieures des angles P_1, Q_1 du triangle orthique P_1EQ_1 du triangle CPQ; donc C est le centre d'un cercle exinscrit au triangle P_1EQ_1 etc. (J. N.)

Solution par M. E De Backer. 1° Les droites PP_1, QQ_1 touchent une même parabole π (voir la remarque précédente) et elles font entre elles un angle constant de 45°. Donc, d'après un théorème connu, le lieu de H est une hyperbole équilatère qui a le foyer C en commun avec π et même directrice, la parallèle par O à AB.

2° (voir ci-dessus).

Solution analytique par M. Bastin. 1° Soient O' le centre du cercle circonscrit au triangle, M le milieu de PQ. L'angle $PO'M = PCQ = 45°$; d'où $CH = 2O'M = 2MP = PQ$. Projetons H en K sur CB; les triangles CHK, QPO qui ont leurs côtés perpendiculaires et des hypoténuses égales, sont égaux; par suite $CK = OQ$, $KH = OP$. Les coordonnées de H par rapport aux axes CB, CA sont donc $x = CK = OQ$, $y = HK = OP$. Or,

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2, \quad PE = PA, \quad QE = QB;$$

il en résulte

$$(2r - x - y)^2 = x^2 + y^2, \quad \text{ou} \quad xy - 2r(x + y) + 2r^2 = 0.$$

On conclut de là que H décrit une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les symétriques des droites CB, CA par rapport à O.

2° Soit L le milieu de la distance CH; le centre ω du cercle des neuf points du triangle CPQ est au milieu de la droite ML. Les

coordonnées des points P, Q, M, L étant $(r-y,\ r)$, $(r,\ r-x)$, $\left(r-\frac{y}{2},\ r-\frac{x}{2}\right)$, $\left(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2}\right)$, celles de ω sont $X=\frac{1}{2}\left(r+\frac{x-y}{2}\right)$, $Y=\frac{1}{2}\left(r-\frac{x-y}{2}\right)$. On en conclut que le lieu de ω est la droite $X+Y=r$, c'est-à-dire AB.

Solution analytique par M. Retali. Les coordonnées du point E par rapport aux axes CB, CA étant $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, celles des points P, Q sont

$$x_1=r\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta},\ y_1=r;\qquad x_2=r,\ y_2=r\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

et celles de l'orthocentre H (voir la 3e solution)

$$x=\mathrm{QO}=r-y_2=r\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\sin\theta},$$

$$y=r-x_1=r\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta}.$$

Pour éliminer θ entre ces deux dernières équations, faisons-en la somme et le produit, ce qui donne

$$\frac{x+y}{r}=2+\frac{1-\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta},$$

$$\frac{xy}{r^2}=2+2\frac{1-\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}.$$

On en conclut

$$xy-2r(x+y)+2r^2=0,$$

équation d'une hyperbole équilatère dont l'axe transverse $=4r$.

Le centre ω du cercle des neuf points divise dans le rapport 2 : 1 la distance de H au barycentre $G(x',\ y')$; d'où ses coordonnées

$$X=\tfrac{1}{4}(3x'+x)=\tfrac{1}{4}(3x'+r-y_2),$$
$$Y=\tfrac{1}{4}(3y'+y)=\tfrac{1}{4}(3y'+r-x_1).$$

Or, $3x'=x_1+x_2=x_1+r$, $3y'=y_1+y_2=y_2+r$; par suite

$$4X=x_1-y_2+2r,\qquad 4Y=y_2-x_1+2r.$$

Le lieu de ω est donc la droite $X+Y=r$, c'est à-dire AB.

M. H. Lez a envoyé une solution analogue à la précédente; il cherche les coordonnées de H au moyen des équations de deux hauteurs.

Question 1581.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 200).

Deux cercles O *et* O′ *se coupent en* A *et* A′. *La tangente en* A *au cercle* O′ *rencontre le cercle* O *en* B; *la tangente en* A *au cercle* O *rencontre le cercle* O′ *en* B′.

1° *Les cordes* AB, A′B′ *sont proportionnelles aux rayons des deux cercles*; 2° $\overline{AA'}^2 = A'B.A'B'$; 3° *l'angle* BA′B′ *est double de l'angle* BAB′; 4° *calculer la distance* BB′ *en fonction des rayons et de la distance* OO′.

(E. N. Barisien).

Solution par MM. Abramescu, F. Majorin (Malonne), H. Lez, Delahaye, P. Bastin et Erèlav Seam. 1° Les triangles isoscèles OAB et O′AB′ ayant les angles en A égaux, comme compléments du même angle BAB′, sont semblables; donc

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AO}{AO'} = \frac{R}{R'}. \qquad (1)$$

2° Les angles ABA′ et A′AB′ sont égaux comme ayant même mesure dans le cercle O; les angles A′AB′ et AB′A′ sous-tendent le même arc dans le cercle O′.

Il suit de là que les triangles ABA′ et A′AB′ sont semblables; donc

$$\frac{AA'}{AB'} = \frac{A'B'}{AA'}, \quad \overline{AA'}^2 = A'B.A'B'.$$

3° $$\text{Angle } BA'B' = 4dr - (BA'A + AA'B')$$
$$= 4dr - (2dr - ABA' - BAA') - (2dr - A'AB' - A'B'A),$$
$$BA'B' = 2(BAA' + A'AB') = 2BAB'.$$

4° Posons OO′ = D, BB′ = x, angle OAO′ = $\theta = 180° - BAB'$. Alors

$$x^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB'}^2 + 2AB.AB'\cos\theta, \qquad (1)$$
$$D^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\theta, \qquad (2)$$
$$\tfrac{1}{2}AB = R\cos OAB = R\sin\theta, \quad \tfrac{1}{2}AB' = R'\sin\theta;$$

d'où

$$x^2 = 4(R^2 + R'^2 + 2RR'\cos\theta)\sin^2\theta$$
$$= 4(2R^2 + 2R'^2 - D^2)\sin^2\theta.$$

Il reste à remplacer $\sin^2\theta$ par

$$\sin^2\theta = \frac{[(R+R')^2 - D^2][D^2 - (R-R')^2]}{4R^2R'^2},$$

valeur tirée de (2).

Question 1549.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 280).

Soient A, B, C, D, *les pieds des quatre normales à une ellipse issues d'un point* M *de son plan. Trouver les lieux des points* M *tels que :* 1° *la somme des carrés des diamètres de l'ellipse passant par* A, B, C, D *soit constante ;* 2° *la somme des carrés des diamètres conjugués de ceux passant par* A, B, C, D *soit constante. Trouver aussi, dans ces deux cas, les enveloppes des hyperboles d'Apollonius relatives à* M *et les lieux de leurs centres.*

(E. N. Barisien)

Solution par M. P. Bastin. 1° L'ellipse donnée et l'hyperbole d'Apollonius relative au point M (α, β) ont pour équations :

$$E \equiv a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0, \tag{1}$$

$$H \equiv c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0. \tag{2}$$

Eliminant y, on trouve pour équation aux abscisses des points A, B, C, D :

$$x^4 - \frac{2a^2\alpha}{c^2}x^3 + \frac{a^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)}{c^4}x^2 \cdots = 0. \tag{3}$$

On connaît la relation

$$\Sigma \overline{OA}^2 = 4b^2 + \frac{c^2}{a^2}\Sigma x'^2. \tag{4}$$

On tire de l'équation (3) :

$$\Sigma x' = \frac{2a^2\alpha}{c^2}, \quad \Sigma x'x'' = \frac{a^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)}{c^4};$$

par suite,

$$\Sigma x'^2 = \frac{2a^2\,a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^4)}{c^4}.$$

Si l'on porte cette valeur dans la relation (4) et que l'on pose

$$\tfrac{1}{2}\Sigma OA^2 - a^2 - b^2 = \lambda,$$

on obtient pour équation du lieu de M :

$$a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = c^2\lambda. \tag{5}$$

Celle-ci définit une hyperbole H' dont l'axe transverse est l'axe des X ou l'axe des Y suivant que λ est positif ou négatif, ou, ce qui est équivalent, suivant que ΣOA^2 est supérieur ou inférieur à $2a^2 + 2b^2$. Les

diagonales du rectangle des axes de E et les asymptotes de H′ sont conjuguées isogonales.

La courbe dégénère en ses asymptotes lorsque $\lambda = 0$.

L'énoncé de la question ne permet d'envisager que le cas des quatre normales réelles; le lieu véritable ne comprend donc que la portion de l'hyperbole (5) comprise à l'intérieur de la développée de E. Il faut nécessairement que ces deux courbes se coupent, d'où les conditions :

$$\text{Si} \quad \lambda > 0, \quad \frac{c^2\lambda}{a^2} < \left(\frac{c^2}{a}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \lambda < c^2 \quad \text{ou} \quad \Sigma OA^2 < 4a^2;$$

$$\text{si} \quad \lambda < 0, \quad -\frac{c^2\lambda}{b^2} < \left(\frac{c^2}{b}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \lambda > -c^2 \quad \text{ou} \quad \Sigma \overline{OA}^2 > 4b^2.$$

Ces conditions étaient évidentes.

2° Soit OA′ le demi-diamètre conjugué à OA; on a

$$\Sigma OA'^2 + \Sigma \overline{OA}^2 = 4a^2 + 4b^2,$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}\Sigma \overline{OA}^2 - a^2 - b^2 = a^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma OA'^2.$$

Si la constante donnée est la même que dans la première partie, il suffira donc de changer le signe de λ; le lieu de M, dans ce cas, est l'hyperbole conjuguée de l'hyperbole (5).

3° On trouve, en différentiant les équations (2) et (5) par rapport à α et β :

$$b^2x\,d\beta - a^2y\,d\alpha = 0, \quad a^2x\,d\alpha - b^2\beta\,d\beta = 0;$$

on tire de ces dernières

$$\alpha x = \beta y. \tag{6}$$

Si l'on résout par rapport à $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ les équations (2) et (6), et qu'on tienne compte de l'équation (5), on trouve

$$\alpha = \frac{\lambda}{x}, \quad \beta = \frac{\lambda}{y}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve enfin, pour le premier cas, l'équation de l'enveloppe cherchée :

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = \frac{c^2}{\lambda}. \tag{7}$$

Cette équation définit une *Kohlspitzencurve*.

4° Les coordonnées du centre de H sont données par les équations

$$c^2x - a^2\alpha = 0, \quad c^2y + b^2\beta = 0. \tag{8}$$

L'élimination de α et β entre les équations (5) et (8) conduit à

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda}{c^2}, \tag{9}$$

qui représente une hyperbole.

Deux courbes analogues aux précédentes sont obtenues par le changement du signe de λ dans les équations (7) et (9); elles correspondent au deuxième cas.

Ont résolu la même question MM. Rose et Sram.

×Question 1550.

(Voir *Mathesis*, 1905, p. 280).

Partager un trapèze donné par une droite parallèle aux bases en deux trapèzes partiels qui, en tournant autour de cette droite engendrent des solides terminés par des surfaces équivalentes.

Même question pour une transversale perpendiculaire aux bases.

(J. Neuberg)

Solution par M. P. Bastin. 1° Soient B et b les bases du trapèze donné, h la hauteur, p et q les côtés latéraux, x la distance à la base B de la parallèle à construire, y sa distance à la base b.

Les surfaces considérées dans l'énoncé ont pour expressions :

$$2\pi Bx + \pi x^2 \frac{p+q}{h}, \quad 2\pi by + \pi y^2 \frac{p+q}{h}.$$

On a donc l'équation

$$2Bhx + (p+q)x^2 = 2bhy + (p+q)y^2,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{x}{y} = \frac{2bh + (p+q)y}{2Bh + (p+q)x}.$$

Si l'on ajoute aux deux termes du second rapport respectivement les deux termes du premier multipliés par $p+q$, puis si l'on supprime le facteur commun $x+y=h$, on a

$$\frac{x}{y} = \frac{2b + p + q}{2B + p + q}.$$

Si donc on porte sur les bases B, b les longueurs respectives $2b+p+q$, $2B+p+q$, les droites qui joignent les extrémités opposées de ces longueurs déterminent par leur intersection le point par lequel on mènera la parallèle demandée.

2° Soient x et y les distances, mesurées sur la base moyenne du trapèze, de la transversale cherchée aux côtés p et q.

Les surfaces engendrées par les trapèzes partiels valent

$$2\pi xp+\pi\left(2x^2+\frac{p^2-h^2}{2}\right),\quad 2\pi yq+\pi\left(2y^2+\frac{q^2-h^2}{2}\right).$$

L'équation du problème est donc

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=y^2+qy+\frac{q^2}{4},$$

ou

$$x+\frac{p}{2}=y+\frac{q}{2}.$$

De là, la construction suivante : on prolonge la base moyenne, vers p d'une longueur égale à $\frac{p}{2}$, vers q d'une longueur égale à $\frac{q}{2}$; le point milieu de la droite ainsi obtenue est celui par lequel on mènera la transversale demandée.

Autres solutions, un peu moins simples, par MM. Plakhovo et E. Seam.

Question 1558.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 56).

En un point quelconque M *d'une ellipse* ε *on mène la normale* n *et le symétrique* ν *de* n *par rapport à l'ordonnée de* M; *pour abréger le langage nous dirons que* ν *est synormale à* ε *en* M.

1° *Par un point quelconque* P, *on peut mener à* ε *quatre synormales; leurs pieds sur* ε *sont également les points d'incidence de quatre normales concourantes.*

2° *Les synormales à* ε *sont normales à une seconde ellipse* ε', *et les normales à* ε *sont synormales à une troisième ellipse* ε''. ε'' *est le lieu des points de Frégier de* ε *et* ε *est le lieu des points de Frégier de* ε'.

3° *Soient* ω *le centre de courbure de* ε *en* M, ω' *celui de* ε' *au point* M' *de* ε' *où* ν *est normale à cette courbe. Le lieu des points qui divisent le segment* $\omega\omega'$ *dans un rapport donné est une développée d'ellipse.*

4° *Trouver l'enveloppe de la droite* $\omega\omega'$. (J. Neuberg)

Solution par M. V. Retali. Les hypoténuses des triangles rectangles inscrits à une conique ε, dont le sommet M de l'angle droit est fixe, passent par un point fixe M'' (point de Frégier); si l'équation de ε rapportée aux axes est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{1}$$

les coordonnées des points $M(x, y)$, $M''(x'', y'')$ sont liées par les relations

$$x=\lambda x'', \qquad y=-\lambda y'', \tag{2}$$

où l'on a posé pour abréger $\lambda=(a^2+b^2):(a^2-b^2)$.

Le lieu des points M'' est donc une conique ε''

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{\lambda^2}=0,$$

concentrique et homothétique à ε. De même, ε est le lieu des points de Frégier pour la conique ε'

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\lambda^2=0.$$

Les équations (2) définissent une homographie Ω qui, étant le produit d'une symétrie orthogonale (par rapport à l'axe des x) avec une homothétie (centre O et rapport $1:\lambda$) conserve les angles. Un point M de ε et son point de Frégier M'', sur ε'', forment un couple de points correspondants en cette homographie. Par l'homographie inverse Ω^{-1}, au point M correspond le point M' de ε'.

La normale à ε' en M' est M'M et la normale en M à ε est MM''. Le point μ symétrique de M. par rapport à l'axe des x, est aussi le correspondant à M' dans l'homothétie indiquée; donc les normales en M' à ε' et en μ à ε sont parallèles; celles en M' et en M sont également inclinées sur Mμ et par suite M'M est normale en M' à ε', et synormale à ε en M. De même, MM'' est normale en M à ε, et synormale en M'' à ε''.

Cela posé, si les normales à ε' en les quatre points (M_i') $(i=1, 2, 3, 4)$, concourent au point P', elles sont aussi synormales à ε en les quatre points correspondants (M_i); autrement dit, les synormales menées à ε par un point quelconque de son plan, sont les normales menées par le même point à la conique ε' ayant ε pour conique de Frégier.

Appelant (μ_i) les points symétriques à (M_i). par rapport à l'axe des x, les normales à ε aux points (μ_i) vont se couper en un point π (corres-

pondant à P′ par l'homothétie) et par suite, les normales à ε aux points (M_i) concourent au point P symétrique de π (par rapport à l'axe des x). Ceci est aussi évident en observant que par l'homographie Ω. qui conserve les angles, les normales de ε′ concourantes en P′, sont transformées en les normales de ε concourantes au point correspondant P.

Si (x', y') sont les coordonnées de M, celles de M′ seront $\lambda x'$, $-\lambda y'$. et celles des centres de courbure ω, ω′,

$$x_\omega = \frac{c^2}{a^4} x'^3, \qquad y_\omega = -\frac{c^2}{b^4} y'^3$$

$$x_{\omega'} = \lambda x_\omega, \qquad y_{\omega'} = -\lambda y_\omega.$$

Par suite, les coordonnées du point (ξ, η) qui divise le segment ωω′ dans le rapport m sont

$$\xi = \frac{x_{\omega'} + m x_\omega}{1+m} = \frac{\lambda + m}{1+m} \cdot \frac{c^2}{a^4} x'^3$$

$$\eta = \frac{y_{\omega'} + m y_\omega}{1+m} = \frac{\lambda - m}{1+m} \cdot \frac{c^2}{b^4} y'^3;$$

comme (x', y') est sur la conique ε, nous pouvons poser

$$x' = a \cos\theta, \qquad y' = b \sin\theta,$$

et les équations paramétriques du lieu de (ξ, η) sont donc

$$\xi = \frac{c^2}{1+m} \cdot \frac{\lambda + m}{a} \cdot \cos^3\theta, \qquad \eta = \frac{c^2}{1+m} \cdot \frac{\lambda - m}{b} \cdot \sin^3\theta.$$

En éliminant θ on obtient

$$\left(\frac{a\xi}{\lambda + m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{\lambda - m}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{c^2}{1+m}\right)^{\frac{2}{3}}$$

qui représente une développée d'ellipse.

Cherchons enfin l'enveloppe de la droite ωω′. L'équation

$$\frac{a^6}{x'^2} \cdot x - \frac{b^6}{y'^2} \cdot y = (a^2 + b^2)\, c^2,$$

linéaire en x, y, et vérifiée par les coordonnées des deux points ω, ω′, représente évidemment la droite ωω′; en y posant $x' = a\cos\theta$, $y' = b\sin\theta$, elle prend la forme connue

$$a^3 x \cdot \cos^{-1}\theta - b^3 y \cdot \sin^{-1}\theta = a^4 - b^4,$$

dont l'enveloppe (v. Salmon, *C. Planes*, p. 99 de l'éd. française) est

$$(a^3 x)^{\frac{2}{5}} + (b^3 y)^{\frac{2}{5}} = (a^4 - b^4)^{\frac{2}{5}}.$$

Solution par MM. P. Bastin, E. Seam, Van Dinter, Dupont et Rose.

1° Si x et y sont les coordonnées du point M, l'équation de la droite ν est

$$Y - y = -\frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x).$$

Si l'on exprime que cette droite passe par le point P (α, β), on obtient la relation

$$m^2 xy - b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0, \qquad (H)$$

dans laquelle $m^2 = a^2 + b^2$.

En combinant cette équation avec celle de l'ellipse Σ on trouve les coordonnées de quatre points, pieds de quatre synormales issues de P.

L'hyperbole d'Apollonius relative au point $P_1(\alpha_1, \beta_1)$ a pour équation

$$c^2 xy + b^2 \beta_1 x - a^2 \alpha_1 y = 0. \qquad (H_1)$$

Les équations (H) et (H_1) représentent la même courbe, si $\alpha_1 = \frac{c^2}{m^2}\alpha$, $\beta_1 = -\frac{c^2}{m^2}\beta$.

Les pieds de synormales issues de P sont donc les pieds des normales issues de P_1.

2° Soit F le point de Frégier relatif à M. On sait que OF et OM sont également inclinés sur les axes et que $OF = \frac{c^2}{m^2} OM$.

Si l'on prolonge les droites MP, OF jusqu'à leur intersection en M′, elles forment en ce point un angle égal à OMF ; les triangles semblables M′OM, MOF donnent

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OM}{OF} = \frac{m^2}{c^2}.$$

Le point M′ appartient donc à une ellipse Σ' homothétique à Σ, M′M est normale à Σ' et M est le point de Frégier relatif à M′.

Le point F décrit également une ellipse Σ'' homothétique à Σ ; comme F se déduit de M de la même manière que ce dernier de M′, on conclut que les normales à Σ sont synormales à ε''.

(Le reste de la solution comme ci-dessus).

QUESTIONS D'EXAMEN.

1276. Soient A′, B′, C′ les points de rencontre des bissectrices intérieures des angles A, B, C d'un triangle ABC avec le cercle

circonscrit. On a la relation suivante entre les côtés des deux triangles ABC et A'B'C' :

$$a^2b'^2c'^2 + b^2a'^2c'^2 + c^2a'^2b'^2 + abca'b'c' = 4a'^2b'^2c'^2.$$

(E. N. Barisien)

Les côtés de ABC, doubles de ceux du triangle orthique de A'B'C', valent $a'\cos A'$, $b'\cos B'$, $c'\cos C'$, de sorte que la relation proposée revient à

$$\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C' + 2\cos A'\cos B'\cos C' = 1.$$

1277. Aux points de division 1, 2, 3, ..., 12 d'un cadran d'horloge on applique respectivement les poids p, $2p$, $3p$, .., $12p$. Trouver le centre de gravité de ces poids.

Les coordonnées de ce point par rapport aux deux diamètres passant par les points 3 et 12, sont

$$x = -\frac{r}{13}(2+\sqrt{3}) = -0{,}287r \text{ environ.}$$

$$y = \frac{r}{13} = 0{,}077r \text{ environ.}$$

(*Ed. Times*)

1278. On appelle *ligne de Gauss* d'un quadrilatère complet la droite qui contient les milieux des trois diagonales.

Soient aa', bb', cc' les trois couples de côtés opposés (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC) d'un quadrangle complet ABCD. Démontrer que les lignes de Gauss des trois quadrilatères complets $aa'bb'$, $aa'cc'$, $bb'cc'$ concourent en un même point. (*Ed. Times*)

Cette proposition revient à celle-ci : les droites joignant les milieux des côtés opposés du quadrangle ABCD se coupent en un même point.

Une projection centrale de la figure conduit à une proposition plus générale.

1279. p, R et r étant respectivement le demi-périmètre, le rayon du cercle circonscrit et celui du cercle inscrit au triangle ABC, l'équation

$$p = 2R\sin\varphi + r\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi \qquad (1)$$

a pour solutions $\varphi = A, B, C$ et n'admet pas d'autres solutions.

(H. G. A. Verkaart)

En remplaçant p et r par leurs valeurs en fonction de R et des angles A, B, C, on déduit, de l'équation donnée,

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-\varphi)\sin\tfrac{1}{2}(B-\varphi)\sin\tfrac{1}{2}(C-\varphi) = 0.$$

En particulier, si l'on a $2R + r = p$, le triangle est rectangle; si $R + r = \frac{1}{2}p\sqrt{3}$, un des angles est de 60°.

Pour démontrer la relation (1) où l'on fait $\varphi = A$, on remarque que $2R\sin A = a$, $p - a = r\cot\frac{1}{2}A$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1571. On considère une ellipse et un point M de cette courbe. De ce point on mène les trois normales autres que celle en M. Lorsque M varie, trouver le lieu du foyer des paraboles passant par M et les trois autres points. Trouver aussi le lieu du sommet de ces paraboles.

Examens oraux de l'Ecole Polytechnique de Paris, en 1904. — On trouve des quartiques.

1572. Soient M et M′ deux points variables d'une ellipse, qui sont les extrémités de deux diamètres conjugués. 1° L'enveloppe de l'hyperbole d'Apollonius relative au point M est une kreuzcurve; 2° Le lieu des points de rencontre des hyperboles d'Apollonius relatives à M et M′ est une kreuzcurve; 3° La ligne des centres de ces deux hyperboles est normale à une ellipse fixe. (E. N. BARISIEN)

×**1573**. Dans tout triangle ABC, on a

$$\frac{a^2 r_a + b^2 r_b + c^2 r_c}{(a+b+c)^2} = R - r.$$

Chercher les formules analogues pour $R + r_a$, $R + r_b$, $R + r_c$.
(H. G. A. VERKAART)

1574. La tangente et la normale en un point M d'une courbe C rencontrent l'axe Ox aux points T, N. Chercher les courbes (C) telles que le rayon vecteur OM soit égal à sa distance au point T ou au point N. Trouver également les trajectoires orthogonales de ces courbes.
(ROSE)

×**1575**. On considère deux triangles ABC, DEF inscrits à la même circonférence. Démontrer 1° que les droites de Simson des points D, E, F par rapport au triangle ABC forment un triangle D′E′F′ semblable à DEF et que les droites de Simson des points A, B, C par rapport au triangle DEF forment un triangle A′B′C′ semblable à ABC; 2° que les triangles D′E′F, A′B′C′ sont inscriptibles à une même circonférence dont le centre est au milieu de la distance des orthocentres des triangles ABC, DEF. (S. KANTOR)

DE L'EXISTENCE DU PLAN TANGENT,

par M. C. E. Wastkels, répétiteur à l'Université de Gand.

1. Le théorème fondamental relatif à l'existence du plan tangent est généralement démontré d'une manière fort peu rigoureuse dans les traités de géométrie.

Dans la plupart des démonstrations, on admet, entre autres, qu'une corde infiniment petite d'une courbe *variable* qui tend vers une certaine limite tend elle-même vers la tangente menée à celle-ci, au point limite de l'une des extrémités de la corde. Or, ce principe n'est point général; même dans le cas très particulier où l'une des extrémités de la corde est fixe et où la courbe variable ainsi que sa limite sont tangentes, en ce point, à une même droite(*), le principe peut être en défaut. C'est le cas, notamment, pour la sinusoïde représentée par l'équation $y = n\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right) = 2n\sin^2\frac{x}{2n}$, dans laquelle n désigne un paramètre variable; coupons-la, par exemple, par la droite fixe $y = \frac{2}{\pi}x$; l'une des cordes interceptées sur cette droite, passant par l'origine et par le point $\left(x = n\frac{\pi}{2},\ y = n\right)$, a pour longueur $n\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}$. Pour une valeur quelconque du paramètre n, la courbe est tangente, à l'origine, à l'axe des x; si n tend vers zéro, elle tend vers Ox tandis que la corde interceptée, de longueur $n\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}$, tend vers zéro; néanmoins sa direction reste invariable et ne tend nullement vers Ox.

La plupart des auteurs, il est vrai, font observer que le théorème a des exceptions; mais il est bien évident que si, dans le courant de la démonstration, on ne formule aucune hypothèse restrictive, cette démonstration, pour être acceptable, *devrait* avoir une portée générale.

Mais il y a plus : le plus souvent, on admet encore implicitement qu'il existe des tangentes, au point donné, pour toutes les courbes que l'on peut mener par ce point sur la surface; or, on peut toujours, ainsi

(*) Voir, par exemple, la démonstration de MM. Rouché et de Comberousse : *Traité de Géométrie*, 2e partie, 1891 ou 1900, pp. 224-225.

que l'a fait observer M. Mansion (*), mener sur la surface, par le point donné, une infinité de courbes n'ayant pas de tangentes : en effet, on sait qu'il existe des fonctions continues n'ayant de dérivée pour aucune valeur de la variable, par exemple, la fonction de Weierstrass ; si fx est une de ces fonctions, la courbe représentée par $y = fx$ n'a de tangente en aucun de ses points ; comme on peut faire passer par le point sur la surface une infinité de courbes se projetant, sur un plan, suivant une ligne identique à l'une des courbes en question, on peut conclure qu'en général ces courbes tracées sur la surface seront elles-mêmes dépourvues de tangentes.

2. On le voit, les principales difficultés qui se présentent dans la théorie du plan tangent tiennent à la trop grande généralité qu'on veut lui donner, et ainsi la propriété fondamentale, bien loin d'être établie pour toutes les surfaces, ne l'est en réalité rigoureusement pour aucune.

Pour corriger la théorie, il faudrait avant tout définir, d'une façon plus précise, la propriété fondamentale *en la restreignant aux seules courbes possédant, au point donné, une tangente déterminée.*

Il faudrait ensuite introduire, dans la démonstration, certaines *hypothèses restrictives* et *faire voir qu'il existe réellement des courbes sur la surface ayant une tangente au point donné.*

Enfin, pour décider si la propriété est applicable à une surface donnée, il resterait à vérifier si elle remplit ces différentes conditions.

Il paraît plus simple d'établir directement le théorème pour chaque espèce de surfaces en particulier, moyennant certaines conditions à examiner dans chacun de ces cas.

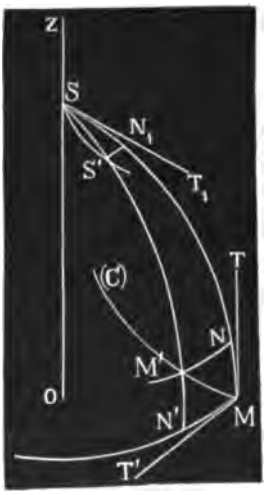
Dans la présente note, nous passons en revue les surfaces les plus simples, notamment les surfaces de révolution, les quadriques et les surfaces réglées.

3. *Surfaces de révolution.* Considérons une surface de révolution autour de Oz et prenons-y un point quelconque M non situé sur l'axe ; supposons que la courbe méridienne MS admette en M une tangente unique MT ; soit de même MT′ la tangente menée en M au parallèle MN′. Nous allons faire voir qu'on peut tracer par M une infinité de

(*) Voir une analyse critique du Traité de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse par M. Mansion : *Mathesis*, février 1892, supplément, p. 9.

courbes sur la surface admettant, en ce point, une tangente unique et que, pour toutes les courbes jouissant de cette propriété, la tangente en M est contenue dans le plan TMT'.

Démonstration. Menons par M un plan quelconque distinct de TMT' et coupant la surface suivant une courbe (C); M' étant un point quelconque de (C), nous traçons par ce point la courbe méridienne M'N' et le parallèle M'N rencontrant en N la courbe méridienne MS; menons de même les cordes MM', MN, N'M' et MN' (Ces droites ne sont pas tracées sur la figure).



Si nous observons que les cordes MN et N'M' se trouvent dans un même plan, et que ce plan contient aussi les droites MM' et MN', nous pouvons conclure que la corde MM' est contenue dans le plan déterminé par les cordes MN et MN'. Supposons maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment de M; en même temps, les points N et N' vont se rapprocher indéfiniment de M et les directions des cordes MN et MN' vont tendre vers les tangentes correspondantes; il en résulte que le plan MM'N' a pour limite le plan TMT' et que la direction de la corde MM' tend elle-même vers l'intersection du plan TMT' avec le plan fixe contenant (C).

Ainsi, il existe sur la surface une infinité de courbes passant par M et ayant une tangente en ce point; de plus, toutes ces tangentes sont contenues dans le plan TMT'.

Si, dans la figure précédente, (C) représente une courbe quelconque, plane ou gauche, mais *possédant en* M *une tangente déterminée*, on voit encore, par la démonstration qui précède, que cette tangente est aussi contenue dans le plan TMT'; le théorème est donc démontré.

Examinons maintenant le cas où la courbe méridienne rencontre l'axe Oz, en S par exemple, et supposons encore que MS admette en S une tangente unique ST_1. Menons par S sur la surface une courbe quelconque SS' ayant une tangente en S. Traçons le parallèle $S'N_1$ rencontrant en N_1 la courbe méridienne fixe SM, ainsi que les cordes SS' et SN_1, et observons que les angles S'SO et N_1SO sont égaux. Or,

quand S′ se rapproche indéfiniment de S, il en sera de même de N_1; par suite, la tangente en S à SS′ fait avec SO un angle égal à T_1SO.

Il résulte de là que les tangentes en S à toutes les courbes menées par S sur la surface (et admettant une tangente en ce point) sont contenues dans le cône de révolution engendré par ST_1 tournant autour de Oz.

Remarque. Dans le cas où la courbe méridienne coupe normalement l'axe Oz et admet une tangente unique en chacun de ses points, le théorème d'existence du plan tangent est applicable, sans restriction, à tous les points de la surface.

4. *Quadriques.* Supposons que, dans la figure précédente, M représente un point d'une quadrique et Oz, un axe de cette surface. Admettons d'abord que M n'est pas un point double.

Par les points M et M′, menons les sections planes MN′ et M′N perpendiculaires à Oz, ainsi que les sections planes MN et M′N′ passant par l'axe Oz. On sait que les courbes MN et MN′ ont, chacune, une tangente en M. Comme, d'ailleurs, les cordes MN et M′N′ sont contenues dans un même plan, la démonstration du n° 3 est encore applicable.

Si le point se trouve sur l'axe, par exemple en S, la conclusion est la même, mais la démonstration doit être modifiée. Observons, dans ce cas, que toutes les sections planes faites par Oz ont en S une tangente normale à l'axe; si l'on mène, dans ces sections, des cordes SS′, il suffira de prendre ces cordes plus petites qu'une certaine quantité déterminée, différente de zéro pour que *tous* les angles OSS′ diffèrent d'un droit d'aussi peu qu'on le voudra. Cela étant, si SS′ est une courbe quelconque ayant en S une tangente déterminée, on conclut que cette tangente, limite de la corde SS′, est perpendiculaire à l'axe; donc, toutes les tangentes sont contenues dans un même plan; c. q. f. d.

Considérons enfin le cas d'un point double; dans ce cas, le plan tangent cesse d'exister, mais les tangentes jouissent encore d'une propriété remarquable.

Soient, en effet, S un point double d'une quadrique et SS′ une courbe de la surface admettant en S une tangente déterminée. Comme la corde SS′ est entièrement contenue dans la surface, on conclut qu'il en est de même de la tangente (*).

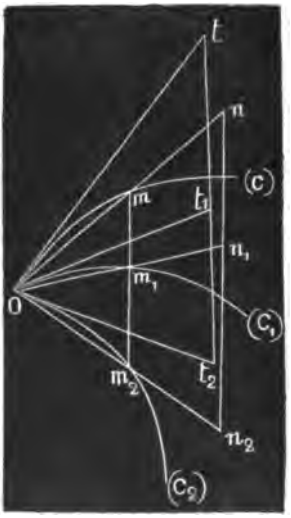
(*) Cette conclusion n'a pas lieu en vertu d'un principe *général*, mais le

Ainsi, toutes les tangentes en un point double d'une quadrique sont des génératrices rectilignes de la surface.

5. *Surfaces réglées.* Supposons qu'il existe sur la surface deux courbes (C_1) et (C_2) rencontrant une génératrice rectiligne g en M_1 et M_2 et admettant, en ces points, des tangentes M_1T_1 et M_2T_2 distinctes de la génératrice.

Par un point quelconque M de g faisons passer un plan (P) ne contenant pas g et coupant la surface suivant une courbe (C). Nous allons démontrer que, moyennant certaines conditions, la courbe (C) admet en M une tangente déterminée.

Menons la génératrice g' rencontrant (C), (C_1) et (C_2) respectivement en M', M'_1 et M'_2; la courbe (C) étant supposée continue en M, nous pourrons faire tendre M' vers M et *nous supposons que, dans ce cas, la génératrice g' a pour limite g et que le rapport des cordes* $M_1M'_1$ *et* $M_2M'_2$ *tend lui-même vers une certaine limite.*



Projetons la figure sur un plan perpendiculaire à g : soient O la projection de g, (c), (c_1), (c_2) celles des courbes (C), (C_1), (C_2), m, m_1, m_2 celles des points M', M'_1 et M'_2, enfin, Ot_1 et Ot_2 celles des tangentes M_1T_1 et M_2T_2. Les plans $(M'g)$, (M'_1g), (M'_2g) ont respectivement pour traces, sur le plan de projection, les cordes Om, Om_1 et Om_2. Portons, sur ces droites, les longueurs

$$On = \frac{Om}{Om_1}, \quad On_1 = \frac{Om_1}{Om_1} = 1 \quad \text{et} \quad On_2 = \frac{Om_2}{Om_1}$$

et observons que les points n, n_1 et n_2 se trouvent sur une parallèle à m_1m_2, de sorte que

$$nn_1 : n_1n_2 = mm_1 : m_1m_2 = M'M'_1 : M'_1M'_2.$$

---

principe existe, en particulier, pour les surfaces algébriques; soit, en effet, $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface; prenons, sur la corde SS', un segment SR de longueur constante; le point $R(x_1, y_1, z_1)$ a une position limite $R'(x', y', z')$ située sur la tangente, et comme on a constamment $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, on aura aussi $f(x', y', z') = 0$.

Quand la droite g' se rapproche indéfiniment de g, les directions On_1 et On_2 tendent respectivement vers Ot_1 et Ot_2; n_1 tend vers le point t_1 obtenu en portant $Ot_1 = 1$; n_2 tendra aussi vers une position limite située sur Ot_2, puisque, par hypothèse, $\frac{Om_2}{Om_1}$ a une limite et que la direction On_2 tend vers Ot_2; soit t_2 la position limite de n_2. Si les points t_1 et t_2 sont distincts, la droite n_1n_2 tendra vers t_1t_2 et le point n, à son tour, tendra vers une position limite t obtenue en portant sur t_2t_1 le segment t_1t tel que

$$tt_1 : t_1t_2 = \lim (M'M'_1 : M'_1M'_2) = MM_1 : M_1M_2.$$

Si, au contraire, t_2 coïncide avec t_1, en vertu de la proportion qui précède on conclut que n tend aussi vers t_1, de sorte que, dans ce cas, les trois points t, t_1 et t_2 coïncident.

Avant d'aller plus loin, il importe de faire remarquer que notre conclusion, relative à l'existence d'une position limite de n_1 et n_2, peut être en défaut : en effet, il peut arriver que, pendant que M'_1 se rapproche indéfiniment de M_1 en restant sur (C_1) d'un même côté de M_1, le point M'_2 oscille indéfiniment autour de M_2 sur la courbe (C_2)(*); pour les positions considérées de M'_1, n_1 tendra vers t_1, mais le point n_2, défini comme ci-dessus, n'aura pas de position limite : t_2 sera la limite des positions de n_2 répondant aux points M'_2 situés d'un côté de M_2, tandis que, pour les autres, on aura une position limite t'_2, symétrique de t_2 par rapport à O. Les deux groupes de points n tendront aussi vers deux positions limites correspondantes t et t'.

Dans l'un et l'autre cas, le point M'_1 peut venir se placer de l'autre côté de M_1 sur la courbe (C_1); en projection, on obtient alors une figure limite symétrique de la première par rapport à O; il en résulte qu'on trouve pour les points n une ou deux positions limites, symétriques de t ou de t et t' par rapport à O.

Supposons d'abord qu'il n'existe qu'*une position limite* t et sa symétrique par rapport à O.

(*) Cette particularité se présenterait, par exemple, si, (C_1) et (C_2) étant des directrices rectilignes, les valeurs algébriques x et y des segments $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$ étaient liées par la relation

$$y = x(-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)},$$

$E\left(\frac{1}{x}\right)$ désignant le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{x}$.

Deux cas peuvent encore se présenter.

1er cas : le point t est distinct du point O. Dans ce cas, la droite Om tend vers une direction limite déterminée Ot; par suite, le plan (M'g) tend aussi vers une limite, qui a pour trace Ot, et l'on peut conclure que la direction de la corde MM', intersection du plan fixe (P) et du plan variable, tend elle-même vers une limite; il existe donc une tangente à la courbe (C) en M.

Si l'on suppose que (C) représente une courbe quelconque, *plane ou gauche*, possédant en M une tangente déterminée MT distincte de g, on voit, par le raisonnement qui précède, que le plan (Tg), limite de (M'g), coïncide avec le plan limite qui a pour trace Ot. On peut donc conclure que toutes les courbes tracées par M sur la surface et satisfaisant aux deux conditions relatives à la variation de g' et à l'existence d'une tangente unique en M, ont cette tangente située dans un plan déterminé, qui ne dépend que de la position du point M.

2e cas : le point t coïncide avec O. Dans ce cas, on ne peut rien conclure au sujet de l'existence d'une tangente à (C).

Les droites Ot_1 et Ot_2 coïncident; il en est donc de même des plans (T$_1g$) et (T$_2g$).

Le point M est alors le point central de la génératrice g.

La particularité relative aux courbes menées par M ne peut se présenter pour aucun autre point de la génératrice g, car le rapport $tt_1 : t_1t_2 = MM_1 : M_1M_2$; de sorte que, si M se déplace sur g, le point t se déplace à son tour sur t_1t_2 et ne peut plus coïncider avec O. Pour tous les autres points, on rentre donc dans le premier cas; seulement, ici tous les plans tangents répondant aux courbes considérées coïncident.

Supposons maintenant qu'il y ait *deux positions limites distinctes* t *et* t' et leurs symétriques.

Comme $tt_1 : t_1t_2 = t't_1 : t_1t'_2$, on voit que tt' est parallèle à $t_2t'_2$ et égal à $t_2t'_2 \times \dfrac{MM_1}{M_1M_2}$; le segment $t_2t'_2$ peut toujours être supposé différent de zéro; il en est donc de même de tt'. D'après cela, il faut, pour que la direction de la corde MM' tende vers une limite déterminée, que les points O, t, t' soient en ligne droite, auquel cas les trois points t, t' et t_1 viennent se placer sur la droite $t_2t'_2$.

Réciproquement, si, dans le cas qui nous occupe, t_1 se trouve sur la droite $t_2t'_2$, il en sera de même de t et t'.

Dans ces conditions, les plans (T_1g) et (T_2g) coïncident et le plan $(M'g)$ tend vers ce même plan, pourvu toutefois qu'aucun des deux points t, t' ne coïncide avec O. Or, si le point M se déplace sur g, les points t et t' se déplacent sur Ot_1 et peuvent occuper une position quelconque sur cette droite; pour une certaine position de M, déterminée par la proportion

$$MM_1 : M_1M_2 = Ot_1 : t_1t_2,$$

le point t tombera en O; pour une autre position de M, il en sera ainsi du point t'. Dans ces deux cas, on ne peut rien affirmer concernant l'existence de la tangente à la courbe (C) en M.

On peut conclure de ce qui précède que, dans le cas actuel, si les plans (T_1g) et (T_2g) répondant aux points M_1 et M_2 sont distincts, il n'existe un plan tangent en aucun autre point de la génératice g; au contraire, si les deux plans en question coïncident, ce plan commun constitue un plan tangent pour tous les autres points de la même droite, sauf pour deux points de g, pour lesquels on ne peut rien conclure.

Remarque. On peut s'assurer sans peine que les conditions qui ont été admises dans la démonstration sont vérifiées dans les *cylindres*, les *cônes* et les *conoïdes*, pourvu que les directrices admettent, aux points correspondants, une tangente unique. Il y a exception au sommet d'un cône et sur la directrice rectiligne d'un conoïde : en effet, pour les courbes (C) tracées par ces points, la génératrice g' ne tend pas nécessairement vers g; d'ailleurs, pour le cône, et dans certains cas aussi pour le conoïde, on se trouve dans le cas exceptionnel signalé plus haut.

D'ailleurs, pour ces trois surfaces, la question du plan tangent peut se traiter directement sans difficulté.

EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL,

par M. E. N. Barisien.

(*Suite et fin*; voir p. 116).

IV. *Soient* ACB *une arcade de cycloïde*, C *le sommet de l'arcade*, D *le milieu de la base* AB. *Trouver la surface de la podaire de l'arcade* ACB *par rapport au point* D.

A et C sont deux points de la podaire. Nous allons chercher l'aire U comprise entre l'arc de cycloïde AC et l'arc correspondant de la podaire. Soient M un point de la cycloïde, O la position correspondante du centre du cercle générateur, N le point de contact de ce cercle avec AB, P la seconde extrémité du diamètre NO, K la projection de D sur la tangente MP. D'après le principe I de Steiner (voir p. 116), l'aire U est égale à celle qui est engendrée par une droite équipollente à MK et ayant une extrémité fixe. Si l'on désigne l'angle MPN = KDA par θ, on a MK = ND sin NDK = $(\pi a - 2a\theta)\sin\theta$; donc

$$U = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\pi - 2\theta)^2 \sin^2\theta d\theta.$$

En posant $\frac{\pi}{2} - \theta = \omega$, il vient

$$U = 2a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\omega^2\cos^2\omega d\omega = a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\omega^2(1+\cos 2\omega)\,d\omega$$

$$= a^2\left[\frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^2\sin 2\omega + \omega\cos 2\omega - \frac{1}{2}\sin 2\omega}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= a^2\left[\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}\right].$$

V. *Soient* P *la projection du centre* O *d'une ellipse sur une tangente en* M; *soit* Q *le milieu de* MP, R *le symétrique de* M *par rapport à* P. *Trouver les aires des courbes décrites par les points* Q *et* R.

La première aire est égale à celle de l'ellipse plus le quart de l'aire engendrée par la droite MP; pour la seconde aire de la courbe (R), on ajoute à celle de l'ellipse quatre fois l'aire comprise entre l'ellipse et sa podaire centrale (Principe de Steiner). Si E est l'aire de l'ellipse, C celle du cercle de Monge, on aura pour les surfaces cherchées

$$E + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}C - E\right) = \frac{C + 6E}{8} = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 + 6ab),$$

$$E + 4\left(\frac{1}{2}C - E\right) = 2C - 3E = \pi(2a^2 + 2b^2 - 3ab).$$

VI. *Les deux courbes*

$$(x^2+y^2)^3 = a^2x^2y^2, \quad (x^2+y^2)^4 = \frac{3\pi}{2}a^2x^2y^2$$

ont même aire.

Les équations de ces courbes en coordonnées polaires sont

$$r^2 = \frac{a^2}{4}\sin^2 2\theta, \quad r^2 = \frac{3\pi a^2}{16}\sin^2 2\theta;$$

la première courbe se compose de quatre folioles égales touchant en O les axes Ox, Oy; la seconde se compose de deux folioles situées dans les angles xOy, $x'Oy'$. En remplaçant 2θ par ω on trouve pour les deux aires

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega d\omega, \quad \frac{3\pi a^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega d\omega$$

expressions qui ont pour valeur commune $\frac{\pi a^2}{8}$.

Le périmètre d'une foliole de la première courbe est le même que celui d'une ellipse de demi-axes $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{8}$.

VII. *On considère sur une circonférence donnée* C *un point fixe* O *et un point variable* M; *soit* P *la projection de* O *sur la tangente en* M. *Trouver l'aire de la courbe lieu du symétrique de* M *par rapport à* P.

En prenant pour pôle le point O, pour axe polaire le rayon OC, on obtient pour l'équation du lieu $r = 2a\cos\frac{\theta}{3}$. L'aire cherchée est $3\pi a^2$.

NOTES MATHÉMATIQUES.

14. *Exercice de mathématiques élémentaires*, par M. G. Longchamps. Soit ABC un triangle dans lequel l'angle $B = 2C$. Désignons par L_a, L_b, L_c les pieds de bissectrices intérieures; par A', B', C' les points de rencontre de ces bissectrices avec la circonférence circonscrite au triangle ABC; par I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles tritangents.

1. La relation $B = 2C$ entraîne l'égalité $ac = b^2 - c^2$, et réciproquement.

2. $b \cdot BL_b = ac$.

3. $B'A = B'C = B'I = c$, $BI = b - c$, $II_b = 2c$.

4. La distance du centre de gravité G à la hauteur $AH = \frac{1}{3}c$.

5. La parallèle à AC par I coupe BC en un point T tel que $CT = L_cB$.

6. Le cercle exinscrit I_c touche BC au milieu du segment CL_c.

7. Le cercle BIC rencontrant AC en P et AB en Q, on a $QB = BI$. $IP = PC$; IP est parallèle à BC, BP à CQ; les points P, L_c, Q sont en ligne droite.

9. PI coupant AB en R, on a $PR = BL_a$.

9. La distance de A à la bissectrice CL_c est égale à $\frac{1}{2} AL_a$.

10. La distance de B à la bissectrice $AL_a = \frac{1}{2} CI$.

11. Soient X, Y les seconds points de rencontre des droites BA, BC avec la circonférence AIC; ces points sont en ligne droite avec L_b et la distance $XY = b$ (Traduction libre de la 65e *Quistione a concorso* du *Supplemento al Periodico di Matematica*, décembre 1905).

La démonstration de ces propriétés est assez facile par la géométrie *seule*.

(J. N.)

15. *Sur les triangles dont le cercle circonscrit et le cercle des neuf points se coupent orthogonalement.*

1. Soient O, N les centres de ces cercles, H l'horthocentre du triangle, A′ et A″ les points de rencontre de la hauteur AH avec le côté BC et avec le cercle O. Posons $OH = d$; la condition d'orthogonalité des deux cercles est

$$\overline{ON}^2 = R^2 + (\tfrac{1}{2} R)^2, \quad \text{ou} \quad d^2 - R^2 = 4R^2, \quad d = R\sqrt{5}. \qquad (1)$$

D'après cela, lorsque le cercle O est tracé, on mène une tangente $EH = 2R$ et l'on joint H à un point quelconque A du cercle; si la droite AH rencontre le cercle en A″, on élève une perpendiculaire au milieu de la droite HA″; cette perpendiculaire rencontrera le cercle en deux points B, C qui, avec le point A, sont les sommets d'un triangle répondant à la condition (1).

2. On a

$$AH = 2R \cos A, \quad HA' = 2R \cos B \cos C, \quad HA'' = 2HA';$$

par suite, la puissance de H par rapport au cercle O ayant pour expressions $d^2 - R^2$ et HA.HA″, on a

$$d^2 - R^2 = -8R^2 \cos A \cos B \cos C,$$

ou

$$d^2 = R^2(1 - \cos A \cos B \cos C).$$

En combinant cette relation générale avec la condition particulière $d^2 = 5R^2$, on obtient

$$\cos A \cos B \cos C = -\tfrac{1}{2}, \qquad (2)$$

d'où l'on déduit facilement

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1, \qquad (3)$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2, \qquad (4)$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1, \qquad (5)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2. \qquad (6)$$

La relation (6) exprime que les côtés d'un triangle de l'espèce consi-

dérée sont les trois arêtes d'un parallélipède rectangle ayant pour diagonale le diamètre du cercle circonscrit.

3. Le triangle ABC est nécessairement obtusangle; supposons $A > 90°$. La relation (3) donne en transposant cos 2A :

$$\cos(B+C)\cos(B-C) = \sin^2 A; \qquad (7)$$

comme $B + C < 90°$, on a $\cos(B+C) < \cos(B-C)$, et par suite

$$\cos(B+C) < \sin A, \qquad \cos(B-C) > \sin A. \qquad (8)$$

La première des inégalités (8) montre que $B+C > 45°$, d'où $A < 135°$; et de $\cos(B-C) = \dfrac{\sin^2 A}{\cos(B+C)} = \dfrac{\sin^2(B+C)}{\cos(B+C)} < 1$ on tire

$$\cos(B+C) > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad B+C < 51°49'22,$$

de sorte que $A > 128°10'38$ et $< 135°$ (*Zeitschrift für math. und naturwissenschaftlichen Unterricht*, t. 36, p. 182, article de M. R. Müller).

4. Après avoir tracé la tangente $EH = 2R$ (n° 1), menons le diamètre HO et soient F, F'' ses extrémités (F entre H et O); la perpendiculaire au milieu de HF'' rencontrant le cercle O en deux points J, K, le triangle isoscèle FJK satisfait à la condition (1) et l'angle $JFK = 128°10'38$. Il existe sur l'arc EF un point P tel que la droite HP rencontre le cercle O en un point P'' symétrique de H par rapport à P; la perpendiculaire en P sur HP rencontrant la circonférence O en Q, on peut considérer comme triangle de la question celui dont deux sommets sont en P et Q et dont un côté est la tangente en P au cercle O. Le sommet A du triangle cherché ABC doit appartenir à l'arc FP ou à son symétrique par rapport à HO.

5. La relation (6) peut se déduire de la formule générale

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\overline{MG}^2 + \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2$$

en plaçant M en O.

Si ω est l'angle de Brocard du triangle ABC, on a

$$\cot\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S} = \frac{4R^2}{4S} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C.$$

(J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Das Rechnen mit Vorteil. Eine gemeinfassliche durch zahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung empfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren von Franz Rogel, Ingenieur und Lehrer. Leipzig, Teubner, 1905 (In-8° de VI-38 pp.). Prix : 0,80 marc.

Cette brochure contient ce que son titre promet : des procédés avantageux pour effectuer toute espèce de calculs (addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances, extraction des racines) avec économie de temps et d'espace. Nous la signalons aux calculateurs et aux professeurs d'arithmétique.

Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. Histoire e description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abaques et nomogrammes par M. d'Ocagne, ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. Seconde édition, entièrement refondue et considérablement augmentée. Paris, Gauthier-Villars, 1905 (In-8°, cartonné de VIII-228 pages). Prix : 5 francs.

Mathesis a fait connaître en 1894 (t. XIV, p. 248) la première édition de l'opuscule où le savant auteur de la *Nomographie* a fait connaître les procédés et instruments divers qui ont été imaginés en vue de simplifier le calcul numérique. La nouvelle édition a une étendue presque double de la première; la classification des procédés et des instruments de calcul y est plus rigoureusement scientifique ; dans la plupart des chapitres, des additions plus ou moins importantes ont été introduites.

Sommaire. I. Les instruments arithmétiques : additionneurs, multiplicateurs, multiplicateurs totalisateurs. II. Machines arithmétiques, à additionner (*), à multiplier par additions répétées (entre autres, machine de Leibniz), à multiplier directement, à différences ; machines analytiques et algébriques. III. Instruments et machines logarithmiques, y compris la machine Torrès à résoudre les équations (**). IV. Les tables numériques ou barèmes. V. Les tracés graphiques. Calcul par le trait. VI. La nomographie; excellent aperçu contenant l'indication des travaux les plus récents de l'auteur.

(*) D'après Pascal lui-même, un horloger de Rouen, *sur le simple récit qui lui fut fait* de l'invention de la machine arithmétique, *eut assez de hardiesse pour en entreprendre une autre et qui plus est, par une autre espèce de mouvement.* Pascal n'est pas tendre pour cet horloger qui, sans savoir ni géométrie ni mécanique, a osé inventer de son côté une machine arithmétique ; elle est *polie et très bien limée par le dehors,* dit Pascal, *mais tellement imparfaite au dedans, qu'elle n'est d'aucun usage;* c'est un *petit avorton !* (*Œuvres de Pascal*, édition Lahure, 1858, t. II, p. 383). Ne peut-on pas en dire autant de la machine de Pascal, de celle de Leibniz et de beaucoup d'autres?

(**) Dans le chapitre III, M. d'Ocagne a inséré une digression sur l'histoire des logarithmes, d'après des notes du lieutenant colonel du génie Bertrand. Cette notice devrait être retouchée d'après les rapports du *Committee on Mathematical Tables*, cité p. 181.

Résumé et conclusions : Il faut recourir aux machines arithmétiques, quand on doit faire un calcul exact, aux instruments logarithmiques quand on doit avoir vite un résultat approché, aux barèmes ou aux nomogrammes, quand on a besoin de calculer souvent des expressions plus ou moins compliquées d'une espèce donnée.

Notes. 1. La machine arithmétique à mouvement continu de Tchebichef. 2. Note sur la machine à différences, systèmes G et E. Scheutz. Index.

Études sur les assurances-vie. Calcul des primes suivant la notation universelle des actuaires, par Jean Schul, S. J., professeur d'algèbre financière à l'école supérieure de commerce Saint-Ignace, Anvers. Bruxelles, Polleunis et Ceuterick, 1906 (In-8° de viii-69 pages).

Le lecteur trouvera dans ce petit volume l'exposé succinct des primes afférentes aux principaux contrats d'assurance sur la vie sur une ou deux têtes. Cet exposé est précédé de quelques renseignements sur les tables de mortalité en usage, de notions sur les probabilités, sur les réserves pour risques en cours et les chargements. Dans l'étude mathématique des primes qui vient ensuite, l'auteur a mis en évidence le seul et unique principe sur lequel repose le calcul d'une prime quelconque, à savoir : l'égalité entre l'engagement de l'assureur et celui de l'assuré, engagements ramenés à la même époque au moyen de la règle de la valeur actuelle.

Pour les assurances sur une tête, ces engagements s'évaluent très facilement sans devoir recourir à la notion de probabilité et pour les assurances sur deux têtes cette notion n'est nécessaire que pour simplifier le raisonnement. Pour l'établissement des tarifs des assurances sur deux têtes, l'auteur a fait connaître une application de la loi de Gompertz, modifiée par Makeham, qui consiste à substituer, dans le calcul des annuités viagères, à un groupe de têtes quelconques le même nombre de têtes toutes de même âge. C'est le seul moyen de construire des tables vraiment pratiques devant servir au calcul des primes de ces sortes d'assurances. Ces calculs élémentaires sont parfaitement à la portée de lecteurs n'ayant pas de connaissances mathématiques étendues, tels, par exemple, les élèves des écoles supérieures de commerce qui doivent suivre un cours d'algèbre financière. Cet ouvrage leur permettra de pénétrer à fond la comptabilité d'une compagnie d'assurances sur la vie, et d'en tracer facilement la formule du bilan et du compte de profits et pertes.

Sommaire : *Première partie* : Notions générales sur les assurances-vie.

Deuxième partie : Etude mathématique des primes. Ch. I. Assurances sur une tête. 1 à 5. Assurances en cas de décès. 6. Assurance mixte. 7. Assurance à terme fixe. 8. Assurance mixte à capital doublé. 9. Assurances avec participation aux bénéfices. 10. Calculs des chargements. 11. Valeur d'une police à un moment donné. 12. Valeur d'une police libérée. 13. Assurances payables en cas de décès. 14. Primes semestrielles, mensuelles, etc. Ch. II. Rentes viagères sur une tête. Ch. III. Relations entre les assurances-vie et les rentes viagères. Chap. IV. Opérations sur deux têtes. Section I. Rentes viagères. Section II. Assurances-vie. Section III. Annuités de survie. Section IV. Dotation d'enfants. *Appendice.* Résumé des primes. Représentation graphique des contrats d'assurances-vie et des rentes viagères. Table de mortalité de Quetelet et table de commutation. Taux instantané de Makeham, valeur des annuités pour l'assurance d'une et de deux têtes. (E. Fagnart)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1588.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 232).

1° *On a approximativement*

$$\sin x = \frac{8}{3}x - \frac{x}{3}\sqrt{25+5x^2},$$

l'erreur étant de la forme αx^7. *Trouver en valeur absolue, une limite supérieure de* α *quand* x *varie de* 0 *à* $\frac{1}{2}\pi$.

2° *On a approximativement, quand* x^2 *est inférieur à* 5,

$$\operatorname{sh} x = \frac{8}{3}x - \frac{x}{3}\sqrt{25-5x^2}$$

l'erreur commise étant de la forme βx^7. *Trouver, en valeur absolue, une limite supérieure de* β, *quand* x *varie de* 0 à 1.

Solution par M. G. VERHEUGEN. I. Posons

$$fx = \sin x - \frac{8}{3}x + \frac{x}{3}\sqrt{25+5x^2};$$

fx étant continue ainsi que toutes ses dérivées, pour toutes les valeurs de x considérées, on peut lui appliquer le théorème de Maclaurin, $f0 = f'0 = f''0 = f'''0 = f^{iv}0 = f^{v}0 = f^{vi}0 = 0$, et

$$f^{vii}x = \frac{7.3.5^{10}(16x^4 - 80x^2 + 25)}{(\sqrt{25+5x^2})^{13}} - \cos x;$$

donc, si $0 < \theta < 1$,

$$fx = \frac{x^7}{1\,2\,3.4.5.6.7}\left[\frac{7.3.5^{10}[16(\theta x)^4 - 80(\theta x)^2 + 25]}{\left(\sqrt{25+5(\theta x)^2}\right)^{13}} - \cos\theta x\right];$$

donc

$$fx = \alpha x^7,$$

$$\alpha = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\left[\frac{7.3.5^{10}[16(\theta x)^4 - 80(\theta x)^2 + 25]}{\left(\sqrt{25+5(\theta x)^2}\right)^{13}} - \cos\theta x\right]$$

Etudions la fonction

$$\varphi x = \frac{7.3.5^{10}[16x^4 - 80x^2 + 25]}{\left(\sqrt{25+5x^2}\right)^{13}} - \cos x;$$

dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, on trouve

$$\varphi' x = \sin x - \frac{3^2 . 5^{11} . 7x(48x^4 - 400x^2 + 375)}{\left(\sqrt{25 + 5x^2}\right)^{15}}$$

$$\varphi' x = \sin x - \psi x.$$

La fonction $\sin x$ varie de 0 à 1. Pour

$$x = 0, \qquad \psi x = 0;$$

elle devient et reste positive jusqu'à ce que

$$x^2 = \frac{5(10 - \sqrt{55})}{12}$$

valeur pour laquelle elle s'annule; elle décroît ensuite jusqu'au delà de $x = \frac{1}{2}\pi$. La courbe $y = \psi x$ coupe la courbe $y = \sin x$, entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, trois fois : d'abord pour $x = 0$, ensuite pour une valeur $x^2 = \xi$, telle que $\frac{4}{6} < \xi < \frac{4}{5}$, et pour une valeur $x^2 = \eta$, telle que $2 < \eta < \frac{5}{2}$, donc $\varphi' x$ s'annule pour ces valeurs; un calcul très laborieux montre que la plus grande valeur de φx est atteinte (valeur absolue) pour $x = 0$, et une limite supérieure de α sera donc donnée en faisant $\theta = 0$, valeur qu'elle ne peut atteindre. Donc

$$\text{lim. supérieure de } \alpha = \frac{1}{7!}\left[\frac{7.3.5^{12}}{5^{13}} - 1\right] = \frac{16}{1.2.3.4.5.6.7.5}$$

$$= \frac{1}{3.5.3.7.5} = \frac{1}{1575}.$$

II. Posons

$$\mathrm{F}x = \mathrm{sh}x - \frac{8x}{3} + \frac{x}{3}\sqrt{25 - 5x^2}.$$

Puisque $x < 5$, on peut appliquer le théorème de Maclaurin. On trouve

$$\mathrm{F}x = \frac{-x^7}{1.2.3.4.5.6.7}\left[\frac{7.3.5^{10}\left[16(\theta x)^4 + 80(\theta x)^2 + 25\right]}{\left(\sqrt{25 - 5(\theta x)^2}\right)^{13}} - \mathrm{ch}(\theta x)\right];$$

donc

$$\mathrm{F}x = \beta x^7,$$

$$\beta = \frac{1}{1.2.3.4\ 5.6.7}\left[\mathrm{ch}(\theta x) - \frac{7.3.5^{10}\left[16(\theta x)^4 + 80(\theta x)^2 + 25\right]}{\left(\sqrt{25 - 5(\theta x)^2}\right)^{13}}\right].$$

Étudions la fonction

$$\Phi x = \mathrm{ch}x - \frac{7.3.5^{10}(16x^4 + 80x^2 + 25)}{\left(\sqrt{25 - 5x^2}\right)^{13}}$$

dans l'intervalle de zéro à l'unité. On a

$$\Phi' x = \operatorname{sh} x - \frac{3^2 . 5^{11} . 7x(48x^4 + 400x^2 + 25)}{\left(\sqrt{25 - 5x^2}\right)^{15}}.$$

$\Phi' x$ s'annule pour $x = 0$, devient et reste négatif, mais croît en valeur absolue, et, puisque Φx est aussi négatif entre 0 et 1, il s'ensuit que Φx, décroît constamment entre 0 et 1, donc croît en valeur absolue; une limite supérieure de β sera donc donnée en faisant dans β, $\theta x = 1$, valeur que θx ne peut atteindre. On a donc

$$\text{lim supérieure de } \beta = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\left[\frac{7.3.5^{10}.11^2}{\left(\sqrt{20}\right)^{13}} - \frac{e + \frac{1}{e}}{2}\right]$$

$$< \frac{1}{1.2\,3.4.5.6.7}[17{,}348 - 1{,}543] < \frac{15{,}805}{1.2.3.4\,5.6.7},$$

ou

$$\frac{3161}{1008000} < \frac{1}{318}.$$

×Question 1552.

(Voir *Mathesis*, (3); VI, p. 40).

Soient E, F, *les points de contact d'une tangente commune à deux cercles qui se coupent en* A *et* D. *On mène par* D *une parallèle à* EF *qui coupe les deux cercles en* B, C; *soit* G *le conjugué harmonique de* D *par rapport à* B *et* C. *Démontrer que la corde commune aux cercles* ADG, EFD *est perpendiculaire à* BC. (Nesbitt)

Solution par M. Verkaart. Soient O, O' les centres des cercles donnés EBD, FCD. Les rayons OE, O'F sont perpendiculaires aux milieux M, M' des cordes BD, DC et la corde commune DA passe au milieu N de EF. Les perpendiculaires menées de O sur ED, de O' sur DF, en N sur EF se coupent au centre L du cercle EDF; la perpendiculaire élevée au milieu P de GD rencontre la droite OO' au centre K du cercle ADG. La question revient à démontrer que la droite KL est parallèle à EF.

Appelons I, I' les points de rencontre des droites EM, FM' avec une parallèle à EF menée par L. Les triangles OIL et DME, O'I'L et DM'F

qui ont leurs côtés perpendiculaires, donnent

$$\frac{OI}{MD}=\frac{IL}{EM},\qquad \frac{O'I'}{M'D}=\frac{I'L}{FM'}.$$

Or, $IL=I'L$, $EM=FM'$; par conséquent,

$$\frac{OI}{O'I'}=\frac{MD}{M'D}. \tag{1}$$

La division harmonique BCGD donne

$$\frac{GB}{GC}=\frac{DB}{DC},\quad \text{ou}\quad \frac{2PM}{2PM'}=\frac{2MD}{2M'D}. \tag{2}$$

Des relations (1) et (2), on déduit

$$\frac{OI}{O'I'}=\frac{PM}{PM'}=\frac{KO}{KO'};$$

donc II′ passe par K.

M. Bastin observe que si S désigne le point de concours des droites BE, CF, E, F sont les milieux des côtés SB, SC du triangle SBC et D le pied de la hauteur issue de S, car, $EF=\frac{1}{2}BC$, $BM=\frac{1}{2}BD$. Il résulte de là que le cercle EDF est celui des neuf points du triangle SBC. T étant le point de rencontre de ce cercle avec la hauteur SD, M. Bastin démontre que le cercle GDA passe par L ou, ce qui est équivalent, que le centre du cercle passant par les trois points G, D, T est situé sur la droite OO′.

Démonstration par l'inversion. Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en plaçant le pôle d'inversion en D. Soient A′, B′, C′, E′, G′, F′ les points correspondants de A, B, C, E, G, F. Les cercles ABD, ADC se transforment en deux droites A′E′B′, A′F′C′; la droite EF, en un cercle I passant par D et touchant A′B′ en E′ et A′C′ en F′. Ce cercle I est tangent à BC en D, puisque EF est parallèle à BC et que le centre I doit appartenir à la perpendiculaire abaissée du pôle D sur EF.

Le point G′ est au milieu de B′C′; car

$$\frac{1}{DG}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}\right),\quad \text{d'où}\quad DG'=\frac{1}{2}(DB'+DC').$$

Le théorème de M. Nesbitt est donc ramené au suivant :

Le cercle I *inscrit au triangle* A′B′C′ *touche les côtés en* D′, E′, F′; *la médiane* A′G′, *le diamètre* DI *du cercle* I *et la corde* E′F′ *se coupent en un même point.*

Pour démontrer ce dernier théorème, appelons U, V les points de rencontre de la droite E'F' avec le diamètre DI et la parallèle à B'C' par A'. Le point U, intersection des polaires de A' et du point à l'infini sur A'V, est le pôle de la droite A'V; par suite, le faisceau A'(E'F'UV) est harmonique et la transversale B'C' parallèle au rayon A'V est divisée en deux parties égales par le rayon A'U.

(En partie d'après M. Davis, *Educational Times*, avril 1906).

Bonnes solutions analytiques par MM. Lez et Majorin ; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de les reproduire.

Question 1555.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 40).

On considère tous les triangles (de l'espace) qui sont semblables à un triangle donné, dont un sommet A *est fixe et dont le second sommet* B *parcourt une droite donnée b. Trouver le lieu du troisième sommet* C.

Solution par M. Fr. Dupont. Nos axes coordonnés seront la perpendiculaire AB abaissée de A sur b, la parallèle menée par A à b, enfin une perpendiculaire en A sur le plan Ab. Nous désignons par C le sommet d'un triangle de la question construit sur AB, et par a, b, c les côtés de ce triangle.

Cela posé, prenons un point quelconque B' sur b et construisons dans le plan xy le triangle AB'C' semblable à ABC; soit H' le pied de la hauteur abaissée de C' sur AB'. Si l'on fait tourner le triangle AB'C' autour de AB', le point C' décrira une circonférence de centre H'; cette courbe sera le lieu des points du problème qui correspondent à une même position de B'.

Appelons φ l'angle variable B'AB; on voit facilement que

$$AC' = \frac{b}{\cos\varphi}, \quad AH' = \frac{b\cos A}{\cos\varphi}, \quad x_1 = b\cos A, \quad y_1 = b\cos A\,\operatorname{tg}\varphi,$$

où $(x_1, y_1, 0)$ sont les coordonnées de H'. Le cercle décrit par C' peut être représenté par l'équation de la sphère de centre A et le rayon AC', et par l'équation de son plan :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{\cos^2\varphi},$$

$$y - b\cos A\,\operatorname{tg}\varphi = -\cot\varphi\,(x - b\cos A).$$

L'élimination de φ entre ces égalités donne pour l'équation du lieu cherché :

$$y^2(x^2+y^2+z^2-b^2)=[(x^2+y^2+z^2)\cos A-bx]^2. \qquad (1)$$

On trouve une surface du quatrième ordre, qui possède en A un point isolé.

Dans le plan Ab, le lieu du point C′, d'après un théorème connu, se compose de deux droites γ, γ' symétriques par rapport à AB. L'hypothèse $z=0$, introduite dans l'équation (1), donne successivement

$$y^2(x^2+y^2-b^2)=(x^2+y^2)^2\cos^2 A+b^2x^2-2bx(x^2+y^2)\cos A,$$
$$(x^2+y^2)[y^2-b^2-(x^2+y^2)\cos^2 A-2bx\cos A]=0,$$
$$(x^2+y^2)[y^2\sin^2 A-(x\cos A+b)^2]=0,$$

d'où l'on conclut que le lieu du point C′ dans le plan Ab se compose des deux droites isotropes menées par A et de deux droites réelles.

La surface (1) admet la définition suivante :

Étant données dans un même plan π deux ponctuelles semblables, on décrit sur la distance de deux points homologues comme diamètre et dans un plan perpendiculaire à π une circonférence. La surface considérée est le lieu de cette circonférence.

M. Dupont donne aussi quelques développements sur le cas où le point B décrit une courbe donnée dans le plan xy.

MM. Abramescu, Malaise et Rose nous ont également remis une bonne solution de la question 1555.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours d'admission en 1906 (113me promotion).

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

I. Étudier la variation de la fonction

$$y=\mathrm{L}\frac{x-1}{x+2},$$

où L désigne un logarithme népérien.

II. Evaluer l'intégrale

$$\int_0^{\alpha}\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}},$$

et calculer sa valeur à un centième près quand $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

III. L'équation $x^3-\alpha x^2+\beta x-\gamma=0$ a pour racines les longueurs

des côtés d'un triangle ABC. Former l'équation ayant pour racines cos A, cos B, cos C.

IV. On donne une fonction $f(x)$. Deux autres fonctions $\varphi(x)$ et $F(x)$ sont définies par les relations suivantes, où k est un nombre constant :

$$\varphi(x) = k\int \frac{dx}{f'(x)}, \qquad F(x) = f(x)\cdot\varphi(x).$$

Démontrer qu'on a identiquement

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2k}{f(x)\cdot\varphi(x)},$$

$$\frac{F'''(x)}{F(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)}.$$

II. Géométrie analytique et Mécanique.

On considère un système d'axes rectangulaires fixes, Ox, Oy, Oz, et, dans le plan xOy, un cercle (C) de rayon $\frac{1}{2}(1-m)a$, animé d'un mouvement de translation, dans lequel son centre C décrit dans le sens de la flèche F, [de Ox vers Oy] et avec une vitesse angulaire $(1-m)\omega$, un cercle de centre O et de rayon $\frac{1+m}{2}a$.

En même temps que ce cercle (C) se déplace, un point P est mobile sur sa circonférence, et la parcourt dans le sens de la flèche f [dans le même sens que F], avec la vitesse angulaire $(1+m)\omega$. Il décrit ainsi une courbe (E) (Epicycloïde).

Les quantités a, ω, m, sont trois constantes positives, dont la dernière est moindre que l'unité.

1° On demande d'exprimer en fonction du temps t, les coordonnées x, y, du point P, sachant qu'à l'époque $t = 0$ les points C et P sont tous deux sur la partie positive de Ox, P à la distance a du point O.

2° Le point P est la projection d'un point M, mobile dans l'espace : on demande d'exprimer sa cote z en fonction du temps t, sachant qu'elle est nulle à l'époque $t = 0$, et que la vitesse v de M fait avec l'axe Oz un angle constant θ quelconque d'ailleurs.

On montrera que la trajectoire (K) du point M s'obtient en coupant le cylindre dont (E) est la section droite par un ellipsoïde de révolution autour de Oz :

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

où la longueur b varie avec θ.

On introduira, au lieu de θ, la constante b dans la représentation de la cote z du point M.

3° Calculer la grandeur et les cosinus directeurs α. β. γ, de la vitesse v du point M, ainsi que l'arc de la courbe (K) parcouru par ce mobile pendant le temps t. Exprimer, en fonction du temps, le rayon de courbure R de la courbe (K), et vérifier que la vitesse lui est proportionnelle.

4° Après avoir formé l'équation du plan osculateur de la courbe (K), on démontrera que, à une même époque t, tous ceux de ces plans qui correspondent aux diverses courbes (K) qu'on obtient en faisant varier b, passent par une même droite Δ du plan xOy.

5° Montrer que, lorsque t varie, cette droite Δ enveloppe une épicycloïde (E') homothétique à celle que décrit le point P' diamétralement opposé au point P dans le cercle (C). Faire voir que la courbe (E') a pour développée l'épicycloïde (E).

[On conservera les notations indiquées. (*Le lecteur est prié de faire la figure.*)]

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1280. L'équation

$$f(x) = 3x^2 + 6\lambda x - (3\lambda + 1) = 0$$

a au moins une racine comprise entre 0 et 1

Les racines sont toujours réelles; car le discriminant $9\lambda^2 + 9\lambda + 3$, est un trinôme à racines imaginaires.

On a $f(0) = -(3\lambda + 1)$, $f(1) = 3\lambda + 2$. Ces quantités sont des signes contraires lorsque $\lambda \leqslant -\frac{2}{3}$ ou $\lambda > -\frac{1}{3}$; alors une racine de l'équation (et une seule) appartient à l'intervalle (0,1). Si λ est compris entre $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$, $f(0)$ et $f(-1)$ ont le signe du premier terme de $f(x)$; par suite, 0 et 1 sont en dehors des racines; mais la demi-somme des racines est comprise entre 0 et 1, donc les 2 racines appartiennent à l'intervalle (0,1).

1281. Construire la courbe

$$y = \frac{\sin x}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin x},$$

α étant un angle donné, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

(*Journal de Vuibert*)

Considérons x dans l'intervalle $(0, \pi)$. Comme $\frac{\pi}{2} - \beta$ et $\frac{\pi}{2} + \beta$ donnent la

même valeur de y, la droite $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie. Les droites $x = 0$, $x = \pi$ sont des asymptotes. La dérivée

$$y' = \frac{\cos x\,(\sin^2 x - \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha \sin^2 x}$$

s'annule pour $\cos x = 0$, $\sin x = \sin \alpha$; d'où un maximum pour $x = \frac{\pi}{2}$, et deux minima pour $x = \alpha$, $x = \pi - \alpha$.

Les intervalles $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, ... donnent lieu à des branches qui ne diffèrent que par la position de celle que l'on vient de trouver.

1888. Etant donné un triangle fixe ABC, on considère un cercle variable (S) passant par B et C; soient B′ et C′ les seconds points de rencontre de (S) avec AC et AB. 1° Les tangentes en B′ et C′ enveloppent des paraboles; 2° Les droites BB′ et CC′ se coupent sur une hyperbole équilatère; 3° Trouver la relation qui lie les rayons des cercles ABC, AB′C′, BCB′C′. (*Journal de Vuibert*)

1° La tangente B′T fait avec B′B un angle constant; donc elle enveloppe une parabole de foyer B. 2° Les angles B′CC′, B′BC′ étant égaux, les droites CC′, BB′ tournent autour de C et B avec des vitesses égales et de sens contraires; donc leur intersection I engendre une hyperbole équilatère qui a pour diamètre BC et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les cordes supplémentaires BA, CA. 3° Soient O, O′, O″ les centres des cercles ABC, AB′C′, BCB′C′ et R, R′, R″ leurs rayons. La figure AOO″O′ est un parallélogramme dont deux côtés sont perpendiculaires à BC, les deux autres à B′C′. Le triangle B′O′O″ donne

$$R''^2 = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos A.$$

1889. On joint un point quelconque M d'une ellipse au foyer F et on le projette en P sur la directrice correspondante. Démontrer que la parallèle menée par le centre O au rayon vecteur FM et la parallèle menée par le pied Q de l'ordonnée de M à la droite FP se coupent en un point N de la normale en M à l'ellipse. (BEARD)

Soit I le point de rencontre de MN avec l'axe OF; des triangles semblables donnent

$$\frac{ON}{OQ} = \frac{MF}{MP} = \frac{c}{a}, \quad \frac{ON}{OI} = \frac{MF}{FI}$$

d'où en éliminant ON

$$\frac{c}{a} = \frac{MF}{OQ} \cdot \frac{OI}{FI}.$$

D'autre part, d'après des théorèmes connus, si la normale en M coupe OF en I′, on a

$$\frac{OI'}{OQ} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{FI'}{MF} = \frac{c}{a}.$$

De ces égalités on conclut $\frac{OI}{FI} = \frac{OI'}{FI'}$. ...

1284. Un hexagone ABCDEF étant inscrit à une circonférence de centre O, les trois circonférences qui passent par O et par les milieux de deux côtés opposés de l'hexagone ont un second point commun.

(J. A. BARRAN)

Les perpendiculaires aux milieux des droites qui joignent O aux milieux des côtés de l'hexagone ABCDEF forment un second hexagone homothétique à cet hexagone. Les centres des trois circonférences décrites par O sont les points de rencontre des côtés opposés du second hexagone; ils sont donc en ligne droite, etc.

Autrement : Les tangentes aux points A, B, C, ... forment un hexagone de Brianchon dont les diagonales passent par un même point. Or, dans une inversion ayant pour centre O et pour puissance $\overline{OA}^2$, ces diagonales se transforment en trois circonférences passant par O et par les milieux de deux côtés opposés de l'hexagone ABCDEF, etc.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1576.** Deux cercles O, O′ se coupent aux points A, B. D'un point M de la corde commune AB on mène les tangentes MC, MC′. Connaissant la distance $OO' = D$ des centres, les rayons R et R′ et l'angle $CMC' = \alpha$, calculer les longueurs AM, BM, MC, CC′.

1577. Soient A, B, C, D les projections d'un point P sur quatre droites données *a*, *b*, *c*, *d*. Démontrer que le lieu d'un point P tel que les cinq points A, B, C, D, P soient sur une même hyperbole équilatère est la circonférence qui passe par les centres des circonférences circonscrites aux triangles *bcd*, *cda*, *dab*, *abc*. (S. KANTOR)

1578. La normale en un point M d'une ellipse de centre O rencontre les axes en N et N′. Soient MP, MP′ les deux tangentes menées de M à la circonférence de diamètre NN′. Démontrer 1° que MP est égal au demi diamètre conjugué avec OM ; 2° que les points P, P′ se trouvent sur les diagonales du rectangle des axes. (BEARD)

1579. Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque M d'une circonférence O sur les côtés d'un triangle inscrit ABC rencontrent les côtés correspondants en A_1, B_1, C_1 et la circonférence O en A_2, B_2, C_2. Si l'on porte sur A_1M, B_1M, C_1M respectivement les longueurs $A_1A_3 = A_2A_1$, $B_1B_3 = B_2B_1$, $C_1C_3 = C_2C_1$, les points A_3, B_3, C_3 sont situés sur une même droite perpendiculaire à la droite de Simson de M_1.

(ED. COLLIGNON)

1580. La tangente et la normale en un point M d'une courbe plane coupent les axes en T, T′, N, N′. Déterminer la courbe par la condition que la distance du point T ou du point N′ au rayon OM soit égale à OM.

(ROSE)

SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES,

par M. A. Demoulin, professeur à l'Université de Gand.

I.

Le numéro d'avril 1906 de *Mathesis* contient (p. 93) une remarque intéressante, due à M. Bastin, concernant la solution de la question 1534 (*Mathesis*, 1905, pp. 200 et 275). Le problème à résoudre est le suivant :

Trouver toutes les transformations ponctuelles telles qu'il existe un rapport constant K *entre l'abscisse à l'origine de la tangente à une courbe quelconque en un point* (x, y) *et l'ordonnée à l'origine de la normale de la transformée au point correspondant* (x_1, y_1).

M. Bastin fait observer que l'équation du problème peut s'écrire

$$d\left(\frac{x}{y}\right) : d\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2} \mathrm{K} d(x_1^2 + y_1^2) : dy_1,$$

et qu'on y satisfait en posant

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2} n \mathrm{K} d(x_1^2 + y_1^2), \quad d\left(\frac{1}{y}\right) = n dy_1.$$

Supposant ensuite n constant, il déduit de là

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} n \mathrm{K}(x_1^2 + y_1^2) + \alpha, \quad \frac{1}{y} = n y_1 + \beta. \tag{1}$$

Ces relations fournissent, on le sait, la solution la plus générale du problème, mais il faut l'établir (*). A cet effet, nous poserons

$$\frac{x}{y} = \mathrm{Y}, \quad \frac{1}{y} = \mathrm{X}; \qquad \mathrm{K}\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \mathrm{Y}_1, \quad y_1 = \mathrm{X}_1. \tag{2}$$

L'équation (E) s'écrira alors

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = \frac{d\mathrm{Y}_1}{d\mathrm{X}_1}.$$

Tout revient donc à trouver la transformation ponctuelle la plus

(*) M. Mansion a démontré (p. 93, en note) que si les relations (1) ont lieu, n est nécessairement une constante. On remarquera qu'en partant de ces égalités on admet implicitement qu'il existe entre x, y, x_1, y_1 une relation de forme déterminée obtenue en éliminant n entre les équations (1).

générale dans laquelle les tangentes de deux courbes correspondantes sont parallèles. Ce problème a été résolu par M. Neuberg(*) qui a obtenu les formules suivantes

$$X = \alpha X_1 + \beta, \quad Y = \alpha Y_1 + \gamma.$$

Il suffit d'y remplacer X, Y, X_1, Y_1 par leurs valeurs (2) pour obtenir des relations équivalentes aux équations (1).

II.

La méthode indiquée plus haut s'applique avec succès aux problèmes traités par M. Neuberg dans le travail cité. Nous allons le montrer rapidement. Les notations employées seront celles de M. Neuberg : (x, y) et (x_1, y_1) sont les coordonnées de deux points correspondants appartenant à deux courbes qui se correspondent dans une transformation ponctuelle quelconque. On pose $y' = \frac{dy}{dx}$, $y_1' = \frac{dy_1}{dx_1}$ et l'on appelle (t, n), (t_1, n_1) les abscisses à l'origine de la tangente et de la normale aux points (x, y), (x_1, y_1).

Problème I. Trouver toutes les transformations ponctuelles par lesquelles

$$(ay' + b)\, y_1' + cy' + d = 0. \tag{I}$$

Si l'on pose $ay + bx = X$, $cy + dx = -Y$, la relation (I) s'écrit

$$y_1' = Y'.$$

Ainsi que nous venons de le rappeler, cette équation a pour solution

$$x_1 = \alpha X + \beta, \quad y_1 = \alpha Y + \gamma.$$

Donc la solution de l'équation (I) est fournie par les équations

$$x_1 = \alpha\,(bx + ay) + \beta, \quad y_1 = -\alpha\,(dx + cy) + \gamma \tag{F}$$

Ce sont, à une légère différence de notation près, les équations (8) de M. Neuberg.

Problème II. Trouver toutes les transformations ponctuelles telles qu'on ait

$$(at + b)\, t_1 + ct + d = 0. \tag{II}$$

On a $t = d\left(\frac{x}{y}\right) : d\frac{1}{y}$, $t_1 = d\left(\frac{x_1}{y_1}\right) : d\frac{1}{y_1}$. Si donc on pose

$$\frac{x}{y} = Y, \quad \frac{1}{y} = X; \quad \frac{x_1}{y_1} = Y_1, \quad \frac{1}{y_1} = X_1, \tag{1}$$

(*) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1906, t. XXX, première partie, pp. 66-77. *Mathesis*, supplément au n° d'avril 1906.

équation (II) s'écrira

$$(aY' + b)\,Y_1' + cY' + d = 0. \qquad (I')$$

On est ramené au problème I et l'on a, dès lors, en vertu des formules (F),

$$X_1 = \alpha(bX + aY) + \beta, \quad Y_1 = -\alpha(dX + cY) + \gamma \qquad (A)$$

ou, en tenant compte des relations (1),

$$\frac{1}{y_1} = \alpha\left(\frac{b}{y} + a\frac{x}{y}\right) + \beta, \quad \frac{x_1}{y_1} = -\alpha\left(\frac{d}{y} + c\frac{x}{y}\right) + \gamma.$$

De ces formules on déduit les suivantes

$$x_1 = \frac{-\alpha(cx + d) + \gamma y}{\alpha(ax + b) + \beta y}, \quad y_1 = \frac{y}{\alpha(ax + b) + \beta y}$$

lesquelles sont équivalentes aux équations (15) de M. Neuberg(*).

Problème III. Déterminer toutes les transformations ponctuelles pour lesquelles

$$(an + b)n_1 + cn + d = 0. \qquad (III)$$

On a

$$n = \frac{d(x^2 + y^2)}{d2x}, \quad n_1 = \frac{d(x_1^2 + y_1^2)}{d2x_1}.$$

Posons

$$x^2 + y^2 = Y, \quad 2x = X; \qquad x_1^2 + y_1^2 = Y_1, \quad 2x_1 = X_1,$$

il viendra

$$n = \frac{dY}{dX}, \quad n_1 = \frac{dY_1}{dX_1}.$$

Si l'on porte les valeurs de n et de n_1 dans l'équation (III), on retrouve l'équation (I'). La solution s'obtient dès lors en portant dans les relations (A) les valeurs ci-dessus d'X, d'Y, d'X_1 et d'Y_1 :

$$2x_1 = \alpha[2bx + a(x^2 + y^2)] + \beta, \quad x_1^2 + y_1^2 = -\alpha[2dx + c(x^2 + y^2)] + \gamma.$$

De ces équations, on déduit aisément les équations (21) et (22) du mémoire cité.

Problème IV. Déterminer toutes les transformations ponctuelles pour lesquelles

$$(at + b)n_1 + ct + d = 0. \qquad (IV)$$

(*) Signalons une erreur typographique qui s'est glissée dans la première de ces équations : au numérateur, il faut remplacer le signe + qui figure devant β par le signe —.

On a

$$t = d\left(\frac{x}{y}\right) : d\frac{1}{y}, \quad n_1 = \frac{d(x_1^2 + y_1^2)}{d2x_1}.$$

Posons

$$\frac{x}{y} = \mathrm{Y}, \quad \frac{1}{y} = \mathrm{X}; \qquad x_1^2 + y_1^2 = \mathrm{Y}_1, \quad 2x_1 = \mathrm{X}_1,$$

alors

$$t = \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}, \quad n_1 = \frac{d\mathrm{Y}_1}{d\mathrm{X}_1}$$

et si l'on tient compte de ces formules, l'équation (IV) se réduit à l'équation (I'). En portant, dans les formules (A), les valeurs d'X, d'Y, d'X_1 et d'Y_1, on obtiendra des équations équivalentes à celles qui ont été obtenues par M. Neuberg.

III.

Nous allons indiquer, pour résoudre les problèmes ci-dessus, une seconde méthode qui offre l'avantage de pouvoir s'appliquer à des problèmes analogues relatifs aux transformations ponctuelles de l'espace à trois dimensions.

Problème I. La relation (I) montre qu'à toute droite correspond une droite, donc la transformation est une homographie. Cette homographie conserve la droite de l'infini, car à des droites parallèles correspondent des droites parallèles. Les équations de la transformation sont donc de la forme

$$x_1 = mx + ny + p, \quad y_1 = m'y + n'y + p'. \qquad (1)$$

On en déduit

$$y_1' = \frac{m' + n'y'}{m + ny'}$$

et en égalant cette valeur de y_1' à celle qu'on tire de la relation (I), on trouve

$$\frac{m' + n'y}{m + ny} = \frac{-d - cy'}{b + ay'}.$$

Par suite, α désignant une constante,

$$m' = -d\alpha, \quad n' = -c\alpha, \quad m = b\alpha, \quad n = a\alpha.$$

Il suffit de porter ces valeurs dans les équations (1) pour obtenir les formules établies plus haut.

Problème II. De l'équation (II), il résulte que, dans la transformation cherchée, à une droite correspond une droite. Cette transformation est

donc une homographie. On écrira les équations les plus générales de l'homographie et l'on exprimera que les abscisses à l'origine t et t_1 de deux droites correspondantes sont liées par la relation (II).

Problème III. L'équation (III) montre qu'à des cercles concentriques et orthogonaux à ox correspondent des cercles jouissant de la même propriété.

Déterminons d'abord toutes les transformations telles qu'à tout cercle orthogonal à ox corresponde un cercle orthogonal à ox. M et M_1 étant deux points correspondants, désignons par r, r' et r_1, r'_1 les distances de ces points à deux points fixes A et A', pris arbitrairement sur ox. Faisons décrire au point M un cercle orthogonal à ox, l'équation de ce cercle sera de la forme

$$mr^2 + nr'^2 + p = 0. \qquad (1)$$

Le point M_1 décrira alors un cercle défini par une équation telle que

$$m_1 r_1^2 + n_1 r_1'^2 + p_1 = 0. \qquad (2)$$

Les deux relations entre r, r', r_1, r'_1 qui définissent la transformation doivent être telles que l'équation (2) soit une conséquence de l'équation (1). Or, ces équations sont linéaires, l'une par rapport à r^2 et r'^2, l'autre par rapport à r_1^2 et $r_1'^2$. Si donc on pose $r^2 = X$, $r'^2 = Y$, $r_1^2 = X_1$, $r_1'^2 = Y$, les points de coordonnées cartésiennes (X, Y), (X_1, Y_1) se correspondront dans une homographie. Dès lors les relations cherchées sont de la forme

$$r_1^2 = \frac{\lambda r^2 + \mu r'^2 + \nu}{\lambda'' r^2 + \mu'' r'^2 + \nu''}, \qquad r_1'^2 = \frac{\lambda' r^2 + \mu' r'^2 + \nu'}{\lambda'' r^2 + \mu'' r'^2 + \nu''}.$$

Pour résoudre le problème III, il faudra particulariser ces relations de manière que les abscisses n et n_1 des centres de deux cercles correspondants orthogonaux à ox soient liées par la relation (III).

Problème IV. De l'égalité (IV), on conclut qu'à des droites coupant l'axe ox au même point correspondent des cercles concentriques et orthogonaux à ox.

Déterminons d'abord les transformations plus générales dans lesquelles à une droite correspond un cercle orthogonal à ox. Soient (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point M et (r_1, r'_1) les distances du point correspondant M_1 aux deux points fixes A et A' envisagés plus haut. A une droite quelconque $mx + ny + p = 0$ doit correspondre un cercle orthogonal à ox et conséquemment défini par une équation

telle que $m_1 r_1^2 + n_1 r_1'^2 + p_1 = 0$. On a dès lors

$$r_1^2 = \frac{\lambda x + \mu y + \nu}{\lambda'' x + \mu'' y + \nu''}, \qquad r_1'^2 = \frac{\lambda' x + \mu' y + \nu'}{\lambda'' x + \mu'' y + \nu''}.$$

Ceci admis, on obtiendra la solution du problème IV en exprimant qu'entre l'abscisse à l'origine t d'une droite quelconque et l'abscisse n_1 du centre du cercle correspondant existe la relation (IV).

IV.

Dans le problème I, M. Neuberg a déterminé toutes les transformations ponctuelles dans lesquelles les coefficients angulaires y', y_1' de deux tangentes correspondantes sont liés par la relation (I), c'est-à-dire par une relation bilinéaire par rapport à ces variables. Il est aisé d'établir que ce sont les seules pour lesquelles y' et y_1' soient fonctions l'une de l'autre. Supposons qu'on ait $y_1' = f(y')$. Remplaçons, dans cette égalité, y_1' par sa valeur, savoir

$$y_1' = \frac{\dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{dy_1}{dy} y'}{\dfrac{dx_1}{dx} + \dfrac{dx_1}{dy} y'},$$

il viendra

$$f(y') = \frac{\dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{dy_1}{dy} y'}{\dfrac{dx_1}{dx} + \dfrac{dx_1}{dy} y'},$$

égalité qui doit avoir lieu quels que soient x, y, y'. En y donnant à x et à y des valeurs numériques, on reconnaît que $f(y')$ est le quotient de deux fonctions linéaires de y'; dès lors, la relation entre y' et y_1' est bien de la forme (I).

Une observation analogue s'applique aux problèmes II, III, IV. Dans ces problèmes, on exige que la transformation demandée entraîne une relation bilinéaire soit entre t et t_1, soit entre n et n_1, soit enfin entre t et n_1. Ces relations sont les seules qui puissent exister entre les variables considérées. En effet, une relation entre t et t_1, par exemple, se traduit par une relation entre Y et Y_1' (voir § II) et cette dernière, d'après la remarque faite plus haut, est nécessairement bilinéaire par rapport à ces variables. En résumé : *les problèmes résolus par M. Neuberg sont les plus généraux que l'on puisse se proposer dans l'ordre d'idées où s'est placé le savant géomètre.*

La solution que nous avons fait connaître au § III conduit à la même conclusion.

V.

Les considérations précédentes s'appliquent aux problèmes du genre de ceux qui ont été traités autrefois par M. Haton de la Goupillière et que M. Neuberg a rappelés dans le travail cité.

Proposons-nous de déterminer toutes les transformations ponctuelles dans lesquelles existe une relation soit entre deux sous-tangentes (Prob. I), soit entre deux sous-normales (Prob. II), soit entre une sous-tangente et une sous-normale (Prob. III), les sous-tangentes et les sous-normales étant envisagées en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires.

A) *Coordonnées cartésiennes.* Soient, en deux points correspondants (x,y) et (x_1, y_1), S_t et S_{t_1}, S_n et S_{n_1} les sous-tangentes et les sous-normales. On a

$$S_t = \frac{y}{y'}, \quad S_n = yy'; \qquad S_{t_1} = \frac{y_1}{y_1'}, \quad S_{n_1} = y_1 y_1'.$$

Problème I. Si l'on pose

$$y = e^Y, \quad x = X; \qquad y_1 = e^{Y_1}, \quad x_1 = X_1,$$

il vient $$S_t = 1 : Y', \quad S_{t_1} = 1 : Y_1'.$$

Une relation entre S_t et S_{t_1} entraine une relation entre Y' et Y_1', celle-ci sera nécessairement bilinéaire par rapport à Y' et Y_1', donc aussi par rapport à $\frac{1}{Y'}$ et $\frac{1}{Y_1'}$; dès lors, la relation entre S_t et S_{t_1} sera bilinéaire. Soit

$$(a\,S_t + b)S_{t_1} + cS_t + d = 0$$

cette relation. La relation entre Y' et Y_1' sera

$$(dY' + c)\,Y_1' + bY' + a = 0.$$

Elle de la forme (I'); on a donc, par application des formules (A) (p. 171),

$$X_1 = \alpha(cX + dY) + \beta, \quad Y_1 = -\alpha(aX + bY) + \gamma,$$

et les transformations cherchées seront définies par les égalités :

$$x_1 = \alpha(cx + dly) + \beta, \quad ly_1 = -\alpha(ax + bly) + \gamma.$$

Problème II. Posons

$$y^2 = 2Y, \quad x = X, \quad y_1^2 = 2Y_1, \quad x_1 = X_1,$$

il viendra $S_n = Y'$, $S_{n_1} = Y'_1$. On démontrera comme plus haut que la relation entre S_n et S_{n_1} est nécessairement bilinéaire :

$$(aS_n + b)S_{n_1} + cS_n + d = 0.$$

Ici encore on a les formules (A), d'où les formules demandées :

$$x_1 = \alpha\left(bx + \frac{ay^2}{2}\right) + \beta, \quad \frac{y_1^2}{2} = -\alpha\left(dx + \frac{cy^2}{2}\right) + \gamma.$$

Problème III. Si l'on pose

$$y = e^Y, \quad x = X, \quad y_1^2 = 2Y, \quad x_1 = X_1,$$

il vient

$$S_t = 1 : Y', \quad S_{n_1} = Y'_1.$$

La relation entre S_t et S_{n_1} est bilinéaire :

$$(aS_t + b)S_{n_1} + cS_t + d = 0.$$

Les formules (A) donnent les formules définitives :

$$x_1 = \alpha(ax + bly) + \beta, \quad \frac{y_1^2}{2} = -\alpha(cx + dly) + \gamma.$$

B) *Coordonnées polaires.* Les sous-tangentes et sous-normales en deux points correspondants (r, θ), (r_1, θ_1) sont données par les formules

$$S_t = \frac{r^2}{r'}, \quad S_n = r', \quad S_{t_1} = \frac{r_1^2}{r'_1}, \quad S_{n_1} = r'_1.$$

Problème I. Posons

$$\Theta = \theta, \quad R = -\frac{1}{r}, \quad \Theta_1 = \theta_1, \quad R_1 = -\frac{1}{r_1},$$

il viendra

$$S_t = \frac{1}{R'}, \quad S_{t_1} = \frac{1}{R'_1}.$$

Une relation entre S_t et S_{t_1} se traduira par une relation entre R' et R'_1. Cette dernière sera bilinéaire par rapport à R' et R'_1, donc aussi par rapport à $\frac{1}{R'}$ et $\frac{1}{R'_1}$ et dès lors la relation entre S_t et S_{t_1} sera bilinéaire :

$$(aS_t + b)S_{t_1} + cS_t + d = 0.$$

On déduit de là la relation entre R' et R'_1 :

$$(dR' + c)R'_1 + bR' + a = 0.$$

L'application des formules (A) donne

$$\Theta_1 = \alpha(c\Theta + dR) + \beta, \quad R_1 = -\alpha(a\Theta + bR) + \gamma.$$

En remplaçant Θ, Θ_1, R, R_1 par leurs valeurs, on trouve

$$\theta_1 = \alpha\left(c\theta - \frac{d}{r}\right) + \beta, \quad \frac{1}{r_1} = \alpha\left(a\theta - \frac{b}{r}\right) - \gamma.$$

Problème II. Comme $S_n = r'$ et $S_{n+1} = r'_1$, il existe la même relation entre S_n et S_{n+1} qu'entre r' et r'_1. Or, la relation entre r' et r'_1 est bilinéaire, on a donc nécessairement

$$(aS_n + b)S_{n+1} + cS_n + d = 0$$

et les formules (A) donnent

$$\theta_1 = \alpha(b\theta + ar) + \beta, \quad r_1 = -\alpha(d\theta + cr) + \gamma.$$

Problème III. Posons $\Theta = \theta$, $R = -\frac{1}{r}$, d'où $S_1 = \frac{1}{R'}$. Une relation entre S_1 et S_{n+1} entraine un relation entre R′ et r'_1. Cette dernière étant bilinéaire, il en sera de même de la relation entre $\frac{1}{R'}$ et r'_1 et, par suite, de la relation entre S_1 et S_{n+1} :

$$(aS_1 + b)S_{n+1} + cS_1 + d = 0.$$

La relation entre R′ et r'_1 est alors

$$(bR' + a)r'_1 + dR' + c = 0.$$

On en déduit, par l'application des formules (A),

$$\theta_1 = \alpha(a\Theta + bR) + \beta, \quad r = -\alpha(c\Theta + dR) + \gamma,$$

ou, en remplaçant Θ et R par leurs valeurs,

$$\theta_1 = \alpha\left(a\theta - \frac{b}{r}\right) + \beta, \quad r_1 = -\alpha\left(c\theta - \frac{d}{r}\right) + \gamma.$$

EXERCICE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,

par M. H. Ploumen (Chimay).

Un angle droit APB *tourne autour de son sommet fixe* P (α, β) *et ses côtés rencontrent une ellipse aux points* A *et* B ; *trouver le lieu du pôle* M *de la corde* AB. *Discuter la nature du lieu en faisant varier la position du point* P.

Soit l'équation de l'ellipse :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

Si x_1, y_1 sont les coordonnées d'un point M du lieu, l'équation de la droite AB est :

$$a^2yy_1 + b^2xx_1 = a^2b^2. \qquad (2)$$

Pour avoir l'équation aux abscisses des points A (x', y') et B (x'', y''), nous éliminons y entre (1) et (2), ce qui donne

$$(a^2y_1^2 + b^2x_1^2)\,x^2 - 2a^2b^2x_1x + a^4\,(b^2 - y_1^2) = 0. \qquad (3)$$

Par analogie on peut écrire l'équation aux ordonnées de ces points :

$$(a^2y_1^2 + b^2x_1^2)\,y^2 - 2a^2b^2y_1y + b^4\,(a^2 - x_1^2) = 0. \qquad (4)$$

Exprimons ensuite que les droites PA et PB sont perpendiculaires ; nous aurons

$$\frac{(\beta - y')\ (\beta - y'')}{(\alpha - x')\ (\alpha - x'')} = -1$$

ou $$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\,(x' + x'') + x'x'' - \beta\,(y' + y'') + y'y'' = 0.$$

Enfin, remplaçant dans cette dernière relation $x' + x''$, $x'x''$, $y' + y''$, $y'y''$ par leurs valeurs tirées des équations (3) et (4), nous obtenons l'équation du lieu :

$$a^2\,(\alpha^2 + \beta^2 - a^2)\,y^2 + b^2\,(\alpha^2 + \beta^2 - b^2)\,x^2 - 2a^2b^2\beta y - 2a^2b^2\alpha x + a^2b^2\,(a^2 + b^2) = 0.$$

Discussion. Calculons l'invariant $B^2 - 4AC$ et le discriminant Δ de l'équation du lieu ; on trouve :

$$B^2 - 4AC = -4a^2b^2\,(\alpha^2 + \beta^2 - a^2)\,(\alpha^2 + \beta^2 - b^2),$$
$$\Delta = -4a^4b^4\,(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)\,(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2).$$

D'après ces valeurs, nous voyons qu'il faut examiner la position de P relativement à l'ellipse donnée, son cercle principal, son cercle secondaire et son cercle de Monge :

1° P est à l'intérieur du cercle secondaire ; alors $B^2 - 4AC < 0$, $A\Delta > 0$ et le lieu est une ellipse proprement dite.

2° P est sur le cercle secondaire et non aux sommets B, B' ; alors $B^2 - 4AC = 0$, $\Delta \gtrless 0$ et le lieu est une parabole proprement dite.

Mais si P se trouve à l'une des extrémités du petit axe, $B^2 - 4AC = 0$, $\Delta = 0$, $D^2 - 4AF = 4a^2b^2 > 0$ et le lieu dégénère en deux droites parallèles réelles. Suivant que P est au sommet B ou au sommet B', ces droites ont pour équation :

$$y = \pm b, \quad y = \mp b\,\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

3° P est situé entre le cercle secondaire et le cercle principal, mais non sur l'ellipse; alors $B^2 - 4AC > 0$, $\Delta \gtrless 0$ et le lieu est une hyperbole proprement dite.

Mais si P est sur l'ellipse, on a $B^2 - 4AC > 0$, $\Delta = 0$ et le lieu dégénère en deux droites sécantes réelles. Ce dernier résultat était à prévoir; car lorsque le point P vient sur l'ellipse, la tangente en P et la polaire du point de Frégier par rapport à P constituent évidemment le lieu. On explique de la même manière les résultats trouvés lorsque P est en un sommet de l'ellipse.

4° P est sur le cercle principal et non aux sommets; alors $B^2 - 4AC = 0$, $\Delta \gtrless 0$ et le lieu est une parabole proprement dite.

Mais si P se trouve à l'une des extrémités du grand axe $B^2 - 4AC = 0$, $\Delta = 0$, $E^2 - 4CF = 4a^2b^2 > 0$ et le lieu dégénère en deux droites parallèles réelles. Suivant que P est au sommet A ou au sommet A', ces droites ont pour équations :

$$x = \pm a, \quad x = \pm a\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

5° P est entre le cercle principal et le cercle de Monge; alors $B^2 - 4AC < 0$, $A\Delta > 0$ et le lieu est une ellipse proprement dite.

6° P est sur le cercle de Monge; alors $B^2 - 4AC < 0$, $\Delta = 0$ et le lieu se réduit à un point réel. Dans ce cas l'équation du lieu devient en effet : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0$, c'est-à-dire le point P lui-même. Ce résultat était à prévoir puisque dans ce cas les deux côtés de l'angle droit ne rencontrent l'ellipse que lorsque l'angle est circonscrit à cette dernière.

7° P est en dehors du cercle de Monge; alors $B^2 - 4AC < 0$, $A\Delta < 0$ et le lieu est imaginaire. Il est en effet facile de voir que dans ce cas, les deux côtés de l'angle droit ne rencontrent jamais simultanément l'ellipse.

BIBLIOGRAPHIE.

1. **Corso di Analisi algebrica**, con introduzione al Calcolo infinitesimale per E. Cesàro, Professore ordinario della R. Universita di Napoli. Torino, Bocca, 1894 (In 8 de VIII-500 pp.). Prix : 12 lire.

2. E. Cesàro. **Elementi di Calcolo infinitesimale**, con numerose applicazioni geometriche. Napoli, Alvano, 1899 (In 8 de 400 pp.). Prix : 12 lire.

3. E. Cesàro. **Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung** met zahlreichen Übungsbeispielen. Deutsch heraus-

gegeben von Dr. G. Kowalewski, o. a. Professor a. d. Univ. Greifswald. Leipzig, Teubner, 1904 (In 8, cartonné de IV-894 pp. avec 97 fig. dans le texte). Prix : 15 marcs.

Les cours d'algèbre et de calcul infinitésimal du savant professeur de Naples sont de ceux qu'il est à la fois inutile et difficile d'analyser; inutile, parce que le nom de leur auteur les signale assez à l'attention des maîtres et de l'élite des élèves; difficile, parce qu'il est presque impossible de dire tout ce qu'ils contiennent d'original, en fait de démonstrations, d'applications et d'exemples, ou de donner, sans faire de nombreuses citations, une idée de l'exposition admirablement précise et concise de M. Cesàro.

Mais nous ne résistons pas au plaisir de citer une appréciation enthousiaste de l'édition allemande de ces deux cours d'Analyse du savant professeur de Naples. Elle a paru dans la *Zeitschrift fur mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 1905, t. 36, pp. 518-519, et est due à M. H. Wieleitner.

« Voici un magnifique ouvrage d'une richesse étonnante. Il commence par la théorie des déterminants, traite ensuite des nombres irrationnels, des valeurs limites et des séries infinies, et fait connaître la notion de la dérivée en l'appuyant d'exercices bien choisis. Ces premiers développements sont étendus aux nombres complexes ordinaires et suivis d'un exposé de la théorie des quaternions. Le chapitre suivant contient les principes fondamentaux relatifs aux équations algébriques. C'est vers le milieu du livre que l'on rencontre les commencements du calcul différentiel proprement dit et ses applications géométriques; vient ensuite le calcul intégral, renfermant un très grand nombre d'intégrales définies, des équations différentielles, et même les éléments du calcul des différences et de celui des variations. Le livre renferme un nombre extraordinaire d'exercices. Dans la Préface, l'auteur dit que, dans l'enseignement, il attache plus d'importance aux applications qu'à la théorie; cependant on doit reconnaître que M. Cesàro élucide admirablement les méthodes rigoureuses de nos jours. Sous ce rapport, nous exprimons le désir que son précieux manuel fasse écarter des mains des jeunes mathématiciens un autre livre qui a eu de nombreuses éditions et qui répond peut être assez bien aux besoins des techniciens.

Il est tout-à-fait impossible d'entrer ici dans les détails. Nous signalons cependant le fait que l'Algèbre de Weber est citée d'après la première édition laquelle a été épuisée rapidement. Nous exprimons le vœu que la table des matières soit développée pour qu'elle donne une idée de la richesse du livre. Peu d'étudiants sont en état de s'assimiler le manuel d'un bout à l'autre, sans lacunes. Ils y trouveront la matière de quatre à cinq semestres d'université. »

---

1. N. I. Lobatchefsky's **imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale**, aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von H. Liebmann. Leipzig, Teubner, 1904 (In 8 de XI-188 pp. avec 39 fig. et 1 planche). Prix : 8 marcs.
2. **Pangeometrie** ou Précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles par N. I. Lobatchewsky. Réimpression fac similé conforme à l'édition originale. Paris, H. Hermann, 1905 (Petit in 4° de 61 pp., numérotées 279 à 340). Prix : 5 francs.

I. Lobatchefsky (1793-1856) a publié six mémoires sur la partie de la géométrie non euclidienne qui porte son nom. Dans deux d'entre eux, écrits en langue russe, *Nouveaux principes de la géométrie* (1835-1838) et *les principes de la géométrie* (1829-1830), il expose l'ensemble de ses idées; il part des premières notions sur l'espace, il arrive peu à peu, par une voie assez longue, aux formules de la trigonométrie lobatchefskienne et à celles qui donnent, au moyen de calcul intégral, la longueur des courbes, l'aire des surfaces et le volume des corps. C'est la *méthode directe* d'exposition de la géométrie lobatchefskienne.

II. En 1835, Lobatchefsky a fait un autre exposé de ses idées sous le titre *Géométrie imaginaire;* en 1836, il a publié les *applications de la géométrie imaginaire à la recherche des intégrales définies.* Ces mémoires sont aussi écrits en langue russe; mais l'auteur a traduit lui-même le premier en français et l'a fait paraître, en 1837 dans le *Journal de Crelle.* Nous en avons exposé les idées fondamentales dans *Mathesis,* en 1897, pp. 112-117, 134-139, 158-161.

M. Liebmann a traduit en allemand, dans le volume annoncé en tête de ce compte rendu, les deux mémoires russes dont il vient d'être question.

Le premier de ces mémoires (pp. 1-50) contient *l'exposé indirect* de la géométrie lobatchefskienne. L'auteur prend *comme point de départ,* les formules de la trigonométrie non euclidienne, dont la compatibilité avec les premières notions géométriques s'établit aisément (Introduction et §§ 1-3). Il trouve ensuite la différentielle d'un arc de courbe, d'une aire, d'un volume (§§ 4-11). Il s'occupe enfin des surfaces de révolution, du volume de la sphère, du cône, de la pyramide.

Le second mémoire (pp. 51-130) contient d'abord un résumé du premier (chap. I); puis la détermination de diverses intégrales par des transformations simples (chap. II), la recherche du volume du cône, fini ou asymptotique (chap. III), de la pyramide finie et de la pyramide asymptotiques (chap. IV). Le chap. V, renferme la liste des intégrales trouvés au moyen de la géométrie imaginaire. M. Liebmann, dans les notes ajoutées à sa traduction, explique, commente ou corrige le texte de Lobatchefsky (pp. 131-188 .

III. En 1840, Lobatchefsky a publié à Berlin, en allemand, sous le titre de *Recherches géométriques sur la théorie des parallèles*, les premiers principes de la nouvelle géométrie (méthode directe). Cet opuscule très court a été réimprimé et traduit en français et en anglais. En 1855, Lobatchefsky a publié en russe, en 1856, en français, un mémoire intitulé *Pangéométrie* qui est la suite du précédent; il a été traduit en italien et en allemand. C'est ce mémoire dont M. Hermann vient de reproduire le texte français en fac similé.

La *Pangéométrie* contient d'abord un résumé de la partie la plus élémentaire des *Recherches géométriques*, puis un exposé de la trigonométrie sphérique établie indépendamment du postulatum d'Euclide. L'auteur établit ensuite la formule fondamentale $\sin \alpha \operatorname{Ch} x = 1$, qui lie l'angle α que fait une droite avec la perpendiculaire x abaissée d'un de ses points sur une droite asymptote de la première et en déduit la trigonométrie lobatchefskienne. Le reste du livre est consacré à une étude du cercle, du cercle-limite ou horicycle et à l'établissement des formules qui donnent en calcul intégral les longueurs, les aires et les volumes.

La *Pangéométrie*, la *Géométrie imaginaire* avec les *Applications* contiennent une grande partie de ce que Lobatchefsky a fait en géométrie. Nous conseillons à celui qui voudrait étudier ces ouvrages de lire auparavant comme introduction la moitié des *Recherches géométriques;* puis de traduire les notations de Lobatchefsky en notations modernes, au moyen des fonctions hyperboliques.

(P. M.)

Sammlung von Formeln und Sätze aus dem Gebiete der elliptischen Funktionem nebst Anwendungen, von J. THOMAE, Jena. Leipzig, Teubner, 1905 (In-4° cartonné de IV-44 pp.). Prix : 2 marcs 80.

Ce recueil contient plus que le titre ne peut le faire soupçonner. En réalité, c'est l'esquisse très concise, mais très complète d'un cours sur les fonctions et les intégrales elliptiques de Legendre et de Jacobi, à l'exclusion des fonctions *pu*, *cu* de Weierstrass, avec une collection d'applications de cette théorie plus riche que celle d'aucun traité. L'auteur a eu le tort d'imaginer les notations nouvelles *sau*, *cau*, *dau* pour *snu*, *cnu*, *dnu*.

Handbuch der Theorie der Gammafunktion von Dr. N. NIELSEN, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen. Leipzig, Teubner, 1906 (In-8, cartonné de X-326 pp.). Prix : 12 marcs.

Monographie plus complète et moins élémentaire que celles de Limbourg (1859), Brunel (1886) et Godefroy (1901) et dont nous ne pouvons que signaler la publication.

NOTES MATHÉMATIQUES.

16. *Sur un triangle particulier.* La bissectrice extérieure de l'angle A, la hauteur partant de C et la médiane issue de B rencontrent les côtés opposés en D, H, M. Quelle est la condition pour que les points D, H, M soient en ligne droite ?

Le théorème des transversales donne immédiatement

$$DC.BH = DB.AH, \quad \text{ou} \quad c\cos A = a\cos B. \tag{1}$$

Si l'on mène la hauteur BH', l'égalité (1) montre que $BH = AH'$. D'après cela, étant donnés l'angle (aigu) BAC et le côté AB, il est facile de déterminer le point C : on projette B en H' sur AC, on prend $BH = AH'$ et il reste à élever en H une perpendiculaire en H sur AB.

En combinant (1) avec la formule $c = a\cos B + b\cos A$ on trouve

$$\cos A = \frac{c}{b+c}, \quad \cos B = \frac{c^2}{a(b+c)}. \tag{2}$$

De la première relation (2), on déduit que la perpendiculaire élevée en B sur AB rencontre AC en un point E tel que $CE = AB$; d'où une nouvelle construction du point C quand on donne l'angle BAC et la droite AB.

On peut encore remarquer les égalités

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{b}{b+c},\quad \sin C=\operatorname{tg} A\cos B.$$

(DELAHAYE)

17. *Sphères de Malfatti dans le tétraèdre régulier.* Etant donné un tétraèdre quelconque $A_1A_2A_3A_4$, on peut se proposer de trouver quatre sphères M_1, M_2, M_3, M_4 dont chacune touche les trois autres et trois faces du tétraèdre (ou inscrites respectivement aux trièdres A_1, A_2, A_3, A_4 de ce solide). C'est là le célèbre problème de Malfatti étendu à l'espace, dans le cas où il a une solution.

M. GODEAUX (Ath) nous adresse les équations de ce problème en prenant pour inconnues les rayons des quatre sphères et les coordonnées tétraédriques normales de leurs centres. Ces coordonnées sont

$$(d_1,\rho_1,\rho_1,\rho_1),\quad (\rho_2,d_2,\rho_2,\rho_2),\quad (\rho_3,\rho_3,d_3,\rho_3),\quad (\rho_4,\rho_4,\rho_4,d_4),$$

où ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 représentent les rayons des sphères, et l'on a les quatre égalités

$$\frac{d_1}{h_1}+\frac{\rho_1}{h_2}+\frac{\rho_1}{h_3}+\frac{\rho_1}{h_4}=1,\quad \ldots,$$

où h_1, h_2, h_3, h_4 sont les hauteurs du tétraèdre.

D'autre part, si a_{12}, a_{13}, ... désignent les longueurs des arêtes A_1A_2, A_1A_3, ... et $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ les coordonnées normales absolues de deux points P, Q, on a la formule

$$\overline{PQ}^2=-\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\frac{a_{12}^2}{h_1h_2}.$$

Celle-ci donne six égalités exprimant que les sphères M_1, M_2, ... se touchent deux à deux; par exemple

$$\begin{aligned}(\rho_1+\rho_2)^2=&(d_1-\rho_2)(d_2-\rho_1)\frac{a_{12}^2}{h_1h_2}\\&-(d_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_2)\left(\frac{a_{13}^2}{h_1h_3}+\frac{a_{14}^2}{h_1h_4}\right)\\&-(\rho_1-d_2)(\rho_1-\rho_2)\left(\frac{a_{23}^2}{h_2h_3}+\frac{a_{24}^2}{h_2h_4}\right)\\&+(\rho_1-\rho_2)^2\frac{a_{34}^2}{h_3h_4}.\end{aligned}$$

Dans le cas du tétraèdre régulier, on a $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ et l'on trouve facilement la valeur du rayon ρ d'une sphère de Malfatti en fonction de l'arête a du tétraèdre.

Ce cas particulier admet une solution élémentaire qui est probablement connue. Les droites A_1M_1, A_2M_2 concourent au centre O du tétraèdre, et A_1M_1 passe au centre O_1 du triangle $A_2A_3A_4$. Soit $r = IH = \frac{1}{4} A_1H$ le rayon de la sphère inscrite au tétraèdre, les triangles semblables OM_1M_2, OA_1A_2 donnent

$$\frac{M_1M_2}{A_1A_2} = \frac{OM_2}{OA_2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2\rho}{a} = \frac{r-\rho}{r}.$$

Par conséquent,

$$\rho = \frac{ar}{a+2r}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{2}{a}.$$

Observons que

$$HA_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad A_1H = \sqrt{\overline{A_1A_2}^2 - \overline{HA_2}^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12};$$

il en résulte

$$\rho = \frac{10}{a}(\sqrt{6} - 1). \qquad \text{(J. N.)}$$

18. *Théorème sur les quadriques.* Le théorème suivant est connu : *Si deux cônes sont circonscrits à un même ellipsoïde, leur intersection se compose de deux coniques.*

En voici une démonstration géométrique qui est peut-être nouvelle.

Le plan mené par les sommets S, S′ des deux cônes et le centre O de l'ellipsoïde coupe les cônes suivant quatre génératrices SA, SB, S′A′, S′B′ touchant l'ellipsoïde aux points A, B, A′, B′ et formant un quadrilatère MNPQ circonscrit à l'ellipse suivant laquelle le plan SS′O coupe l'ellipsoïde. Les diagonales MP, NQ de ce quadrilatère et les droites AB, A′B′, d'après un théorème connu, passent par un même point C; les ellipses le long desquelles les cônes S, S′ touchent l'ellipsoïde ont une corde commune DD′ qui passe par C. Le plan mené par MP et DD′ rencontre les deux cônes suivant deux ellipses qui se confondent comme ayant en commun un diamètre MP et une corde conjuguée DD′. De même le plan mené par NQ et DD′ coupe les deux cônes suivant la même conique. (Cikot, professeur, à Bois-le-Duc)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1177.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, 176).

Trouver les points de contact des tangentes perpendiculaires à l'axe polaire, menées à une courbe ayant pour équation polaire

$$r = f(\theta).$$

Application aux spirales représentées par les équations : $r = a\theta$ (*spirale d'Archimède*); $r = \frac{a}{\theta}$ (*spirale hyperbolique*); $r = ae^{m\theta}$ (*spirale logarithmique*); $r^2 = 2\frac{a^2}{\theta}$ (*spirale polaire*); $r = a\frac{\sin\theta}{\theta}$ (*cochléoïde*); $r = \frac{2}{e^{a\theta} + e^{-a\theta}}$ (*spirale de Poinsot*); $r^2 = a^2\theta$ (*spirale parabolique de Fermat*). (H. BROCARD)

Solution par M. J. ROSE. L'angle V de la tangente à une courbe avec le rayon vecteur du point de contact est donné par la formule

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}.$$

Dans le cas où la tangente est perpendiculaire à l'axe polaire, $\operatorname{tg} V = \cot\theta$. Par suite, pour trouver les angles θ correspondant aux points de contact, il faut résoudre l'équation

$$f(\theta) = f'(\theta)\cot\theta. \qquad (1)$$

En portant les valeurs correspondantes dans l'équation de la courbe, on aura les rayons vecteurs correspondants.

Application aux spirales. 1°) *Spirale d'Archimède.* Dans ce cas, l'équation (1) est

$$\theta = \cot\theta. \qquad (2)$$

La résolution de cette équation transcendante peut se faire par la méthode des approximations successives de Newton.

On trouve ainsi : $\theta = 49°17'36'',55$. ou en prenant le rayon trigonométrique pour unité de longueur : $\theta = 0{,}8603334$.

2° *Spirale hyperbolique.* On a alors, pour (1),

$$\frac{a}{\theta} = -\frac{a}{\theta^2}\cot\theta$$

ou

$$\cot\theta = -\theta. \qquad (3)$$

3° *Spirale logarithmique.* Dans ce cas, l'équation (1) devient

$$ae^{m\theta} = ae^{m\theta} \cdot m \cot\theta$$

ou
$$\operatorname{tang}\theta = m. \tag{4}$$

4° *Spirale polaire.* L'équation à résoudre est alors

$$\cot\theta = -2\theta. \tag{5}$$

5° *Cochléoïde.* L'équation (1) devient

$$\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang} 2\theta.$$

6° *Spirale de Poinsot.* L'équation de cette courbe peut encore s'écrire

$$r = \frac{1}{\operatorname{cha}\theta} = \operatorname{séch} a\theta$$

et l'équation (1) prend la forme

$$\frac{1}{\operatorname{cha}\theta} = -\frac{a\operatorname{sha}\theta}{\operatorname{ch}^2 a\theta}\cot\theta$$

ou
$$a\operatorname{tha}\theta = -\operatorname{tg}\theta. \tag{7}$$

7° *Spirale parabolique de Fermat.* On est alors ramené à

$$\operatorname{cotg}\theta = 2\theta. \tag{8}$$

Pour la résolution de ces diverses équations transcendantes, il sera utile de consulter surtout l'*Algèbre* de J. Bertrand, tome II, livre IV, ch. IV.

Note. 1. L'équation $\operatorname{tang}\theta = m$ ne présente aucune difficulté. Cinq des autres équations se ressemblent très fort et peuvent se résoudre de la même manière. Ce sont les suivantes :

$\theta = \cot\theta$	(A)	$\theta = -\cot\theta$	(C)
$2\theta = \cot\theta$	(B)	$2\theta = -\cot\theta$	(D)
		$\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang} 2\theta$	(E).

Si l'on pose

$$u = \theta - \cot\theta$$

la première (A) peut s'écrire $u = 0$ et l'on a

$$\frac{du}{d\theta} = 1 + \frac{1}{\sin^2\theta}.$$

Quand θ varie de 0 à π, u passe de $-\infty$ à $+\infty$ en croissant toujours; elle s'annule donc pour une valeur intermédiaire θ_0 entre 0 et π. C'est cette valeur que M. Rose a signalée.

Mais il y a une infinité d'autres; car de π à 2π, de 2π à 3π, etc.,

u passe aussi de $-\infty$ à $+\infty$, et, dans chacun de ces intervalles, il y a une racine, θ_1 entre π et 2π, θ_2 entre 2π et 3π, etc.

De plus, évidemment, $-\theta_3$, $-\theta_1$, $-\theta_2$, etc. sont aussi des racines de $\theta = \cot\theta$.

2. On trouve de même que (B), (C) ont une seule racine dans chacun des intervalles $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, ... et des racines respectivement égales et de signes contraires dans les intervalles $(0, -\pi)$, $(-\pi, -2\pi)$, $(-2\pi, -3\pi)$, ...

3. L'équation (D) peut s'écrire $v = 0$, si l'on pose

$$v = 2\theta + \cot\theta.$$

On a alors

$$v' = 2 - \frac{1}{\sin^2\theta}.$$

La fonction v décroît depuis $\theta = 0$, jusque $\theta = \frac{1}{4}\pi$, valeur pour laquelle $v' = 0$; de $\theta = \frac{1}{4}\pi$ à $\theta = \frac{3}{4}\pi$ elle croît; de $\theta = \frac{3}{4}\pi$ à $\theta = \pi$, elle décroît. On a

$$v = +\infty \qquad \text{pour } \theta = 0,$$

$$v = \frac{\pi}{2} + 1 \qquad \text{pour } \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$v = \frac{3\pi}{2} - 1 \qquad \text{pour } \theta = \frac{3\pi}{4},$$

$$v = -\infty \qquad \text{pour } \theta = \pi.$$

Donc $v = 0$ a une *seule* racine comprise entre 0 et π (cette racine est entre $\theta = \frac{3}{4}\pi$ et $\theta = \pi$). On prouve qu'il en est de même dans les autres intervalles $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, etc. Il y a des racines égales et de signe contraire dans les intervalles $(0, -\pi)$, $(-\pi, -2\pi)$, $(-2\pi, -3\pi)$, etc.

4. L'équation (E) a la racine $\theta = 0$ et n'en a pas d'autre de $\theta = 0$, à $\theta = \frac{1}{4}\pi$, puisque l'on a toujours $\tan 2\theta > 2\theta$ dans cet intervalle; de $\theta = \frac{1}{4}\pi$ à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, 2θ est positif et $\tan 2\theta$ négatif, donc on n'a pas $2\theta - \tan 2\theta = 0$. De $\theta = \frac{1}{2}\pi$ à $\theta = \frac{3}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\tan 2\theta$ passe de 0 à ∞, et la différence

$$\theta - \tfrac{1}{2}\tan 2\theta$$

passe de $\frac{1}{2}\pi$ à $-\infty$, en décroissant sans cesse, car la dérivée de cette fonction est la quantité négative

$$1 - \frac{1}{\cos^2 2\theta} = -\tan^2 2\theta.$$

De $\theta = \frac{3}{4}\pi$ à $\theta = \pi$, $\theta - \frac{1}{2}\tan 2\theta$ est une quantité positive.

Donc enfin (E) a une seule racine entre 0 et π. On prouverait de même qu'il n'y en a qu'une aussi de π à 2π, de 2π à 3π, etc.

Les mêmes racines changées de signe contraires se rencontrent de 0 à $-\infty$.

5. Dans l'équation

$$a \operatorname{th} a\theta = -\operatorname{tang}\theta \qquad \text{(F)}$$

on peut supposer a positif. On trouve immédiatement la racine $\theta = 0$.

Quand θ est positif, $a \operatorname{th} a\theta$ est positif, $-\operatorname{tang}\theta$ est négatif de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, positif de $\theta = \frac{1}{2}\pi$ à $\theta = \pi$ et varie de ∞ à 0. La dérivée de

$$a \operatorname{th} a\theta + \operatorname{tang}\theta$$

est

$$\frac{a^2}{\operatorname{ch}^2 a\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}$$

toujours positive. Donc l'équation (F) a une racine supérieure à $\frac{1}{2}\pi$, inférieure à π. On démontre de même qu'il y en a une seule entre $\frac{1}{2}\pi$ et 2π, entre $\frac{3}{2}\pi$ et 3π, etc.; puis que (F) a les mêmes racines changées de signe de 0 à $-\infty$ et qu'il n'y a pas d'autres.

6. Les racines de toutes les équations considérées étant séparées, il est facile de les trouver par la méthode des approximations successives, sous n'importe quelle forme.

Voir BERTRAND, *Algèbre*, à l'endroit cité, ou l'excellent opuscule : *Résolution des équations transcendantes* par M. A. STERN, traduit de l'allemand, par E. LÉVY, Paris, Dalmont, 1858 (100 pages in 8°).

(P. M.)

Question 1538.

(Voir *Mathesis* (3), V, 282 et VI, 159).

1° *On a approximativement*

$$\sin x = \frac{8}{3}x - \frac{x}{3}\sqrt{25 + 5x^2},$$

l'erreur étant de la forme αx^7. *Trouver en valeur absolue, une limite supérieure de* α, *quand* x *varie de* 0 *à* $\frac{1}{2}\pi$.

2° *On a approximativement*

$$\operatorname{sh} x = \frac{8}{3}x - \frac{x}{3}\sqrt{25 - 5x^2},$$

l'erreur étant de la forme βx^7. *Trouver, en valeur absolue, une limite supérieure de* β, *quand* x *varie de* 0 *à* 1.

Seconde solution. 1° Posons

$$y = x\sqrt{25 + 5x^2} - (8x - 3\sin x)$$
$$z = x\sqrt{25 + 5x^2} + (8x - 3\sin x)$$
$$u = yz = 25x^2 + 5x^4 - (64x^2 - 48x\sin x + 9\sin^2 x)$$
$$= 5x^4 - 39x^2 + 48x\sin x - 9\sin^2 x.$$

En dérivant, on trouve successivement

$$u' = 20x^3 - 78x + 48x\cos x + 48\sin x - 9\sin 2x,$$

$$\frac{u''}{1.2} = 30x^2 - 39 - 24x\sin x + 48\cos x - 9\cos 2x,$$

$$\frac{u'''}{1.2.3} = 20x - 8x\cos x - 24\sin x + 6\sin 2x,$$

$$\frac{u^{IV}}{1.2.3.4} = 5 + 2x\sin x - 8\cos x + 3\cos 2x,$$

$$\frac{u^{V}}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{5}[2x\cos x + 10\sin x - 6\sin 2x],$$

$$\frac{u^{VI}}{1.2.3.4.5.6} = \frac{1}{15}[-x\sin x + 6\cos x - 6\cos 2x].$$

Entre les limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$, u^{VI} est positive, car on peut écrire la quantité entre crochets

$$6\cos x - 6\cos^2 x + 6\sin^2 x - x\sin x$$
$$= 6\cos x(1 - \cos x) + \sin x(6\sin x - x).$$

Or,

$$6\sin x - x = 5x - x^3 + 6\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{etc.}\right) > x(5 - x^2),$$

quantité positive, puisque 5 est plus grand que $(\frac{1}{2}\pi)^2$.

Pour $x = 0$, u, u', u'', u''', u^{IV}, u^{V}, u^{VI} sont nulles; puisque pour $x > 0$, u^{VI} est positive, il en est de même de u^{V}, u^{IV}, u''', u'', u', u.

On a ensuite

$$\frac{u^{VII}}{1.2...7} = \frac{1}{105}[-x\cos x - 7\sin x + 12\sin 2x],$$

$$\frac{u^{VIII}}{1.2...8} = \frac{1}{840}[x\sin x - 8\cos x + 24\cos 2x].$$

La quantité entre crochets étant désignée par Fx, on a

$$\begin{aligned} Fx &= x\sin x + 8(1-\cos x) - 24(1-\cos 2x) + 16 \\ &= 16 + x\sin x + 16\sin^2\tfrac{1}{2}x - 48\sin^2 x \\ &= 16 + \sin x\,(x - 32\sin x) - 16(\sin^2 x - \sin^2\tfrac{1}{2}x). \end{aligned}$$

Or,

$$32\sin x - x = 32\left(x - \frac{x^3}{6} + \text{etc.}\right) - x > 31x - \frac{16}{3}x^3 = 31x\left(1 - \frac{16}{93}x^2\right)$$

est positif pour les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$. On a donc toujours $Fx < 16$.

D'après le théorème de Maclaurin, on a

$$u = \frac{x^8}{840}F(\theta_1 x)$$

θ_1 désignant une quantité comprise entre zéro et l'unité. Puisque u est positif, $F(\theta_1 x)$ est positif et, comme on vient de le voir, d'ailleurs inférieur à 16. On a donc

$$u < \frac{16x^8}{840} = \frac{2x^8}{105}.$$

Mais $u = yz$ et l'on a

$$z = x\sqrt{25 + 5x^2} + (8x - 3\sin x) > 10x.$$

Donc

$$y < \frac{2x^8}{105} : 10x = \frac{x^7}{525}$$

c'est-à-dire, en écrivant pour y sa valeur,

$$x\sqrt{25 + 5x^2} - (8x - 3\sin x) < \frac{x^7}{525},$$

ou, en divisant par 3, transposant quelques termes et désignant par θ une quantité comprise entre zéro et l'unité,

$$\sin x = \frac{8}{3}x - \frac{x}{3}\sqrt{25 + 5x^2} + \theta\frac{x^7}{1575}.$$

Quand $x = \frac{1}{2}\pi$, le dernier terme du second membre est inférieur à $\frac{1}{64}$.

2° Posons

$$\begin{aligned} y &= x\sqrt{25 - 5x^2} - (8x - 3\operatorname{sh} x), \\ z &= x\sqrt{25 - 5x^2} + (8x - 3\operatorname{sh} x), \\ u &= yz = -5x^4 - 39x^2 + 48x\operatorname{sh} x - 9\operatorname{sh}^2 x. \end{aligned}$$

On trouve aisément u, u', u'', u''', u^{iv}, u^{v}, puis

$$\frac{u^{vi}}{1.2...6} = \frac{1}{15}[x \operatorname{sh} x + 6 \operatorname{ch} x - 6 \operatorname{ch} 2x].$$

Pour $x > 0$, la quantité entre crochets, ou

$$\operatorname{sh} x (x - 6 \operatorname{sh} x) + 6 \operatorname{ch} x (1 - \operatorname{ch} x)$$

est négative. Comme u et ses six premières dérivées s'annulent pour $x = 0$, et que u^{vi} est négatif pour $x > 0$, u est aussi négatif pour x positif.

On trouve ensuite

$$\frac{u^{vii}}{1.2...7} = \frac{1}{105}[x \operatorname{ch} x + 7 \operatorname{sh} x - 12 \operatorname{sh} 2x],$$

$$\frac{u^{viii}}{1.2..8} = \frac{1}{840}[x \operatorname{sh} x + 8 \operatorname{ch} x - 24 \operatorname{ch} 2x].$$

Posons

$$\begin{aligned} Fx &= 24 \operatorname{ch} 2x - 8 \operatorname{ch} x - x \operatorname{sh} x \\ &= 24 \operatorname{ch}^2 x - 8 \operatorname{ch} x + 24 \operatorname{sh}^2 x - x \operatorname{sh} x \\ &= 8 \operatorname{ch} x (3 \operatorname{ch} x - 1) + \operatorname{sh} x (24 \operatorname{sh} x - x). \end{aligned}$$

La fonction Fx croît évidemment avec x. Pour $x = 0$, elle est égale à 16; pour $x = 1$ à

$$24 \operatorname{ch} 2 - 8 \operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1 = 12e^2 + 12e^{-2} - 4e - 4e^{-1} - \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}e^{-1} < 77.$$

D'après le théorème de Maclaurin, on a

$$-u = \frac{x^8}{840} F(\theta_1 x)$$

θ_1 étant compris entre zéro et l'unité. Comme $F(\theta_1 x)$ est inférieur à 77, on a

$$-u < \frac{77}{840} x^8 = \frac{11}{120} x^8,$$

ou, puisque $u = yz$,

$$-y.z < \frac{11}{120} x^8.$$

Or,

$$z = x\sqrt{25 - 5x^2} + 8x - 3 \operatorname{sh} x = x\left[\sqrt{25 - 5x^2} + 8 - \frac{3 \operatorname{sh} x}{x}\right].$$

Quand x varie de 0 à l'unité, la valeur minima de la quantité entre crochets correspond à $x = 1$ et est

$$\sqrt{20} + 8 - 3 \operatorname{sh} 1 = \sqrt{20} + 9 - \tfrac{3}{2}e + \tfrac{1}{2}e^{-1} > 8{,}44;$$

on a donc $x > 8{,}44$. Par suite,

$$-y < \frac{11}{120}x^6 : 8{,}44x = \frac{11}{120 \times 8{,}44}x^7,$$

c'est-à-dire, en remplaçant y par sa valeur,

$$-x\sqrt{25-5x^2} + 8x - 3\operatorname{sh} x < \frac{11}{120 \times 8{,}44}x^7 < \frac{x^7}{92},$$

d'où, enfin,

$$\operatorname{sh} x = \frac{8x}{3} - \frac{x}{3}\sqrt{25-5x^2} - \theta\frac{x^7}{276}$$

θ étant compris entre zéro et l'unité. (P. M.)

Autrement. 1° Supposons démontré, par la méthode précédente, que l'on a

$$t = \sin x - \frac{8}{3}x - \frac{x}{3}\sqrt{25+5x^2} > 0.$$

En appliquant les développements connus pour $\sin x$ et $\sqrt{25+5x^2} = 5(1+z)^{\frac{1}{2}}$, où $z = \frac{1}{5}x^2$, et observant que les séries employées sont à termes alternativement positifs et négatifs et décroissants, on trouve

$$t = \left(\frac{\theta}{2.4.6.25} - \frac{\varepsilon}{1.2...7}\right)x^7$$

θ et ε étant compris entre zéro et l'unité. Puisque t est > 0, on a certainement

$$t < \frac{\theta}{2.4.6.25}x^7 = \frac{\theta}{1200}x^7,$$

résultat *pratiquement* équivalent à celui qui est indiqué plus haut.

La seconde partie de la question peut se traiter d'une manière analogue et donne pour β une valeur plus petite que les deux autres méthodes. (J. N.)

Question 1556.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 55).

Soient Ox, Oy *deux diamètres rectangulaires d'une circonférence,* M *et* M′ *les extrémités d'un diamètre quelconque. On projette* M *en* P *et* Q *sur* Ox *et* Oy; *on trace la droite* PQ *qui rencontre la circonférence en* A *et* B. *Cela posé :*

1° $$\overline{MQ}^2 = QA.QB, \quad \overline{MP}^2 = PA.PB, \tag{1}$$

$$\overline{M'A}^2 + \overline{M'B}^2 + 2\overline{AB}^2 = 12R^2. \tag{2}$$

2° *Chercher le maximum de* $\overline{M'A}^2 + \overline{M'B}^2 + \overline{AB}^2$.

3° *Chercher le minimum de l'aire* MAB. (E. N. Barisien)

Solution par M. Verkaart. 1° Si MQ recoupe la circonférence en Q', on a

$$QA.QB = QM.QQ' = \overline{QM}^2.$$

Appelons N le milieu de la corde AB, et S le centre du rectangle OQMP La proposition du carré de la médiane donne

$$\overline{M'A}^2 + \overline{M'B}^2 = 2\overline{M'N}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2,$$
$$\overline{M'N}^2 + \overline{MN}^2 = 2\overline{ON}^2 + 2R^2,$$
$$\overline{MN}^2 + \overline{ON}^2 = 2\overline{NS}^2 + \tfrac{1}{2}R^2.$$

En éliminant $\overline{M'N}^2$ et $\overline{MN}^2$ on obtient

$$\overline{M'A}^2 + \overline{M'B}^2 = 2R^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 + 6\overline{ON}^2 - 4\overline{NS}^2.$$

Remplaçant $\overline{NS}^2$ par $\overline{ON}^2 - \overline{OS}^2$, ensuite $\overline{ON}^2$ par $\overline{OB}^2 - \overline{BN}^2$, on trouve l'égalité (2).

2° En vertu de la relation (2), le maximum de la somme $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + AB^2$ correspond au minimum de $\overline{AB}^2$ ou au maximum de $\overline{ON}^2$. La plus grande valeur de ON a lieu lorsque N coïncide avec S; la distance de AB au centre O est alors égale à la moitié du rayon, et NB est le côté du triangle équilatéral inscrit. Le rectangle OQMP devient alors un carré et le triangle M'AC devient équilatéral.

3° L'aire MAB, égale OAB, a pour expression ON.RN et comme la somme $\overline{ON}^2 + \overline{BN}^2$ a la valeur constante R^2, le maximum de l'aire MAB paraît correspondre à $ON = BN = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$; mais cette valeur de ON est supérieure au maximum de ON qui est $OS = \frac{1}{2}R$. Par suite, le maximum du produit ON.BN a lieu lorsque l'un des facteurs atteint son maximum, l'autre son minimum. La droite cherchée AB est donc la même que dans le 2°.

Autre solution exacte et complète par M. Lez, qui fait intervenir l'angle variable $MOP = \omega$

Les deux premières parties ont été bien traitées par MM. Majorin et Rose; voici leur démonstration de la relation (2).

Des triangles rectangles AMM', BMM' on conclut

$$\overline{AM'}^2 + \overline{BM'}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 8R^2.$$

D'autre part,

$$\overline{MA}^2 + \overline{OA}^2 = 2\overline{SA}^2 + 2\overline{OS}^2, \quad \text{d'où} \quad \overline{MA}^2 = 2\overline{AS}^2 - \tfrac{1}{2}R^2;$$

par analogie, $\overline{MB}^2 = 2\overline{BS}^2 - \frac{1}{2}R^2$. Par suite,

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2(\overline{AS}^2 + BS^2) - R^2 = 2(AS + BS)^2 - 4AS.BS - R^2$$
$$= 2\overline{AB}^2 - 4M'S.MS - R^2 = 2\overline{AB}^2 - 4R^2, \text{ etc.}$$

Question 1559.

(Voir *Mathesis*, (3); VI, p. 56).

Etant données deux coniques dans un même plan, trouver le lieu des points dont les polaires par rapport à ces deux courbes se coupent sur l'une ou l'autre d'entre elles.

Cas particuliers : Une conique et son cercle de Monge ; une ellipse et l'hyperbole d'Apollonius relative à un point de son plan. (J. Rose)

Solution par M. V. Retali. Soient C_2, C_2' les deux coniques données, supposées en situation générale; si la polaire par rapport à C_2' d'un point variable A de C_2 coupe au point P la tangente menée en A, les polaires de P par rapport aux deux coniques se coupent en A sur C_2; le lieu des points dont les polaires relatives à C_2 et C_2' se coupent sur C_2 est donc le lieu du point où une tangente à C_2 coupe la polaire, par rapport à C_2', de son point de contact. J'ai démontré ailleurs (*P. M. Z.*, année 1892, p. 342) que ce lieu est une courbe unicursale du quatrième ordre, passant par les quatre points communs aux deux coniques, par les quatre points où C_2' est touchée par les tangentes communes, et ayant trois points doubles d'inflexion aux sommets du triangle polaire commune à C_2 et C_2'. Voici deux autres démonstrations :

a) Comme P et A sont deux pôles conjugués par rapport aux coniques du faisceau défini par C_2 et C_2', le lieu de P est la courbe qui correspond à C_2 dans la transformation quadratique involutive (transformation Steinérienne) définie par le dit faisceau(*) etc.

(*) Voir *Mathesis* (2), VII, p. 129 où M. Servais a étudié cette transformation.

b) Les équations des coniques données, rapportées au triangle polaire commun, étant

C_2) $$lx^2 + my^2 + nz^2 = 0,$$

C_2') $$l'x^2 + m'y^2 + n'z^2 = 0,$$

les coordonnées du point $P'(\alpha', \beta', \gamma')$ intersection des polaires de $P(\alpha, \beta, \gamma)$ sont :

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = (mn' - m'n)\beta\gamma : (nl' - n'l)\gamma\alpha : (lm' - l'm)\alpha\beta,$$

et, si P' tombe sur C_2, on a

C_4) $$l(mn' - m'n)^2\beta^2\gamma^2 + m(nl' - n'l)^2\gamma^2\alpha^2 + n(lm' - l'm)^2\alpha^2\beta^2 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu des points dont les polaires se coupent sur C_2. De même, l'équation du lieu des points dont les polaires se coupent sur C_2' est

C_4', $$l'(mn' - m'n)^2\beta^2\gamma^2 + m'(nl' - n'l)^2\gamma^2\alpha^2 + n'(lm' - l'm)^2\alpha^2\beta^2 = 0.$$

La forme des deux équations montre que les quartiques C_4, C_4' ont un point double d'inflexion en chacun des sommets du triangle fondamental.

Cas particuliers. I. Si les coniques données sont une ellipse et son cercle orthoptique,

C_2) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

C_2') $$x^2 + y^2 - (a^2 + b^2) = 0,$$

on trouve pour les coordonnées du pôle conjugué de $P(\alpha, \beta)$:

$$\alpha' = a^4 : c^2\alpha, \quad \beta' = -b^4 : c^2\beta,$$

et pour les équations des quartiques :

C_4) $$b^4\beta^2 + a^4\alpha^2 = c^4\alpha^2\beta^2,$$

C_4') $$b^4\beta^2 + a^4\alpha^2 = (a^2 + b^2)c^4\alpha^2\beta^2,$$

qui représentent deux *Kreuzcurve*.

II. Lorsque les coniques données sont une ellipse et l'hyperbole d'Apollonius relative au point (X, Y),

C_2) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

C_2') $$b^2Yx - a^2Xy + c^2xy = 0,$$

les coordonnées de P', pôle conjugué de $P(\alpha, \beta)$ par rapport aux deux coniques, sont

$$\alpha' = Aa^2 : D, \quad \beta' = Bb^2 : D,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$A = a^2X(b^2+\beta^2) - b^2\alpha(Y\beta + c^2),$$
$$B = b^2Y(a^2+\alpha^2) - a^2\beta(X\alpha - c^2),$$
$$D = c^2(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2) + a^2b^2(X\alpha + Y\beta);$$

les équations des deux quartiques unicursales qui forment ensemble le lieu demandé, sont donc maintenant :

C_4) $$A^2a^2 + B^2b^2 = D^2.$$

C_4') $$(XB - YA)D = ABc^2.$$

Autre bonne solution de la question par M. E. N. Barisien.

Question 1563.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 88).

Dans un quadrilatère lobatchefskien ABCD, *rectangle en* B *et* C *et où le côté* AD *est asymptote de* BC, *chercher les relations qui lient les côtés* $a = AB$, $c = CD$, 1° *au côté* $AD = d$; 2° *au côté* $BC = b$.

Solution par Fr. Sterkens. 1° Dans le quadrilatère birectangle ABCD on a :

$$\text{sh}c = \text{sh}a\,\text{ch}d - \text{ch}a\,\text{sh}d\cos A. \tag{1}$$

Or, AD étant asymptote à BC, $\cos A = \text{th}a$; donc (1) devient

$$\text{sh}c = \text{sh}a(\text{ch}d - \text{sh}d) = \text{sh}a.e^{-d}. \tag{2}$$

2° En abaissant du sommet D la perpendiculaire DE sur le côté AB, on obtient le quadrilatère trirectangle BCDE, dans lequel on a

$$\text{sh}ED = \text{sh}b.\text{ch}c\,;$$

mais dans le triangle rectangle AED on a aussi

$$\text{sh}ED = \text{sh}d\sin A = \frac{\text{sh}d}{\text{ch}a},$$

car $\sin A = \dfrac{1}{\text{ch}a}$. Donc

$$\text{sh}d = \text{sh}b.\text{ch}a.\text{ch}c. \tag{3}$$

L'élimination de d entre (2) et (3) conduit à la relation

$$\text{sh}^2a - \text{sh}^2c = 2\text{sh}a.\text{ch}a.\text{sh}c.\text{ch}c.\text{sh}b, \tag{4}$$

ou encore

$$2(\text{sh}^2a - \text{sh}^2c) = \text{sh}2a.\text{sh}2c.\text{sh}b.$$

Note. On peut mettre la relation (4) sous une forme plus simple. On

a successivement

$$2\operatorname{sh}b = \frac{\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 c}{\operatorname{sh}a \operatorname{ch}a \operatorname{sh}c \operatorname{ch}c} = \frac{\operatorname{th}a}{\operatorname{th}c \operatorname{ch}^2 c} - \frac{\operatorname{th}c}{\operatorname{th}a \operatorname{ch}^2 a},$$

$$e^b - e^{-b} = \frac{\operatorname{th}a}{\operatorname{th}c}(1 - \operatorname{th}^2 c) - \frac{\operatorname{th}c}{\operatorname{th}a}(1 - \operatorname{th}^2 a) = \frac{\operatorname{th}a}{\operatorname{th}c} - \frac{\operatorname{th}c}{\operatorname{th}a}$$

$$e^b - \frac{\operatorname{th}a}{\operatorname{th}c} = e^{-b} - \frac{\operatorname{th}c}{\operatorname{th}a}.$$

On tire aisément de là

$$e^{-b} = \frac{\operatorname{th}c}{\operatorname{th}a},$$

ou

$$\operatorname{th}c = \operatorname{th}a\, e^{-b}. \tag{5}$$

En combinant cette relation avec (2), savoir :

$$\operatorname{sh}c = \operatorname{sh}a\, e^{-d},$$

on trouve

$$\operatorname{ch}c = \operatorname{ch}a\, e^{-d+b},$$

ou

$$\operatorname{ch}a\, e^b = \operatorname{ch}c\, e^d, \tag{6}$$

relation assez élégante entre les quatre côtés. (P. M.)

Solution analogue à celle de M. Sterkens par M. J. Rose qui trouve ch b en fonction de a et c, mais sans en déduire la formule (5).

×Question 1568.

(Voir *Mathesis* (3), VI, p. 112).

Résoudre le système

$$(x - a^2)(y - b^2) = ab(x + ab),$$
$$(y - b^2)(z - c^2) = bc(x + bc),$$
$$(z - c^2)(x - a^2) = ca(y + ca).$$

(H. G. A. Verkaart)

Solution par M. E. Barbette. Posons $y = mx$ et $z = nx$; le système proposé devient

$$x(mx - b^2 - a^2 m - abn) = 0,$$
$$x(mnx - c^2 m - b^2 n - bc) = 0,$$
$$x(nx - a^2 n - c^2 - cam) = 0,$$

d'où, d'abord,

$$x = 0 \text{ et, par suite, } y = 0 \text{ et } z = 0.$$

Divisons maintenant les dernières équations par x, puis éliminant x entre la première et la deuxième équation, et aussi entre la deuxième et la troisième, il vient

$$c^2m - a^2mn - abn^2 + bc = 0,$$
$$b^2n - a^2mn - cam^2 + bc = 0.$$

De la première de ces relations, on déduit

$$m = \frac{b(an^2 - c)}{c^2 - a^2n},$$

valeur qui, substituée dans la seconde, fournit l'équation

$$\{n(a^2 - bc) + (ab - c^2)\}.(a^2n^2 - c^2) = 0.$$

Par suite,

$$n_1 = \frac{c^2 - ab}{a^2 - bc}; \quad n_2 = \frac{c}{a}; \quad n_3 = \frac{c}{a}\theta; \quad n_4 = \frac{c}{a}\theta^2,$$

θ et θ^2 représentant les racines cubiques imaginaires de l'unité :

$$\theta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \qquad \theta^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Les relations

$$m = \frac{b(an^2 - c)}{c^2 - a^2n}; \quad x = \frac{a^2m + abn + b^2}{m}, \quad y = mx; \quad z = nx$$

conduisent aux quatre solutions :

1°
$$n = \frac{c^2 - ab}{a^2 - bc}, \quad m = \frac{b^2 - ca}{a^2 - bc},$$
$$x = a^2 - bc; \quad y = b^2 - ca; \quad z = c^2 - ab.$$

2°
$$n = \frac{c}{a}, \quad m = \frac{b}{a},$$
$$x = a(a + b + c); \quad y = b(a + b + c); \quad z = c(a + b + c),$$

3°
$$n = \frac{c}{a}\theta, \quad m = \frac{b}{a}\theta^2,$$
$$x = a(a + b\theta + c\theta^2); \quad y = b(a\theta^2 + b + c\theta); \quad z = c(a\theta + b\theta^2 + c).$$

5°
$$n = \frac{c}{a}\theta^2, \quad m = \frac{b}{a}\theta,$$
$$x = a(a + b\theta^2 + c\theta); \quad y = b(a\theta + b + c\theta^2); \quad z = c(a\theta^2 + b\theta + c).$$

Solution partielle par MM. Brocard et Hernandez (Valencia).

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1285. Déterminer a pour la condition que les trois racines de l'équation

$$x^3 - (3+a)x^2 + (2+3a)x - 2a = 0$$

soient en progression arithmétique.

(*Ec. polytechnique de Delft*, 1905)

De $x_1 + x_2 + x_3 = 3 + a, \quad x_1 + x_2 = 2x_3$

on tire $x_3 = \frac{1}{3}(3+a)$;

en substituant cette valeur dans l'équation proposée on trouve

$$-2a^3 + 9a^2 - 9a = 0,$$

d'où les trois solutions

$$a = 0, \quad a = 3, \quad a = \tfrac{3}{2}.$$

Les valeurs de x_1 et x_2 se déduisent ensuite de

$$x_1 + x_2 = 2x_3, \quad x_1 x_2 x_3 = 2a.$$

Les racines sont respectivement

$$(0, 2, 1), \quad (1, 3, 2), \quad (1, 2, \tfrac{4}{3}).$$

1286. On mène par un même point P des tangentes à la surface

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Démontrer que leurs points de contact se trouvent sur une même sphère lorsque P appartient à une certaine droite menée par l'origine des coordonnées. (*Ecole polytechnique de Delft*, 1905)

1287. Lieu du point d'intersection du rayon vecteur FM d'une parabole avec la perpendiculaire abaissée du sommet de la courbe sur la tangente menée en M. (*Ec. polyt. de Delft*, 1905)

Circonférence de centre F et de rayon $\frac{p}{2}$.

1288. Démontrer que les trois racines de l'équation

$$f(x) \equiv \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - 1 = 0$$

sont réelles. (*Ec. polyt. de Delft*, 1905)

Observer que les produits

$$f(-3+\varepsilon)\, f(-2-\varepsilon), \quad f(-2+\varepsilon)\, f(-1-\varepsilon), \quad f(-1+\varepsilon)\, (f(\infty)$$

sont négatifs, ε désignant une quantité infiniment petite.

1289. Dans tout triangle sphérique ABC, rectangle en A, on a

$$\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b \operatorname{tg}^2 c.$$

(*Ec. polyt. de Delft*, 1905).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1581. Soit M un des points d'une parabole qui se projette sur l'axe au point de rebroussement de la développée de la parabole.

Par ce point, on ne peut mener qu'une tangente réelle à la développée. Démontrer que cette tangente est normale à la développée en son second point de rencontre avec la courbe. (E. N. BARISIEN)

1582. Si d'un point fixe M on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers les points F et F′, puis les normales aux points de contact, le lieu des points de rencontre de ces normales est la droite qui joint les centres de courbure des deux coniques homofocales qui se croisent au point M. (LAGUERRE)

1583. La normale en un point M d'une courbe (C) coupe l'axe Oy en N′. De N′ on abaisse sur le rayon vecteur OM une perpendiculaire qui rencontre Ox en R. Déterminer la courbe (C) par la condition qu'il existe un rapport constant entre la distance OR et la sous-tangente en M. (ROSE)

1584. On donne deux droites Ox, Oy et un point A. Une droite qui se meut parallèlement à elle-même rencontre Ox en B, Oy en C. Trouver l'enveloppe de la perpendiculaire BD abaissée de B sur la droite AC.

Cette enveloppe est une parabole dont on demande de construire la directrice et le foyer.

Trouver le point de contact de BD avec son enveloppe.

La projection D de B sur AC décrit une cubique circulaire. Cette courbe peut-elle être une cissoïde, une strophoïde, une trisectrice de Maclaurin? (J. NEUBERG)

×**1585.** Si a et b sont des nombres rationnels tels que $(a - b^3)b$ soit positif, le nombre

$$\sqrt[3]{a+\frac{2b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}+\sqrt[3]{a-\frac{2b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

est rationnel. (J. TANNERY)

Rectification. A mentionner une bonne solution de la question 1554 (*Mathesis*, p. 110), par M. BARISIEN.

NÉCROLOGIE.

J. De Tilly, E. Cesàro, G. de Longchamps.

Mathesis a perdu récemment trois de ses collaborateurs les plus anciens et les plus éminents : J. De Tilly, Ernest Cesàro, G. de Longchamps.

I. « Le Lieutenant-Général De Tilly, né à Ypres, le 16 août 1837, mort à Schaerbeek, le 4 août 1906, a publié trois mémoires capitaux sur les principes de la géométrie et la mécanique euclidiennes ou non euclidiennes : *Études de mécanique abstraite* (1868); *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (1878); *Géométrie analytique générale* (1892), dont l'ensemble constitue, avec les notes moins étendues qui les complètent, le travail le plus philosophique qui ait paru sur la matière, principalement pour la géométrie. Dans sa *Balistique* (1874), il a soumis à une critique tout aussi pénétrante la théorie des erreurs accidentelles et, dans un discours *Sur les notions de force, d'accélération et d'énergie en mécanique* (1887), il a donné une solution claire et naturelle du problème de la conciliation du déterminisme avec le libre arbitre. On lui doit, en outre, un grand nombre de notes d'analyse, de géométrie et de mécanique pure et appliquée, le *Rapport séculaire sur les travaux mathématiques de l'Académie royale de Belgique*, de 1772 à 1872 et une belle notice sur Lamarle ». De Tilly était membre de l'Académie royale de Belgique, et de plusieurs autres sociétés savantes.

II. Ernest Cesàro, né à Naples, le 12 mars 1859, s'est noyé à Torre Annunziata le 12 septembre 1906, en essayant de sauver son fils emporté par les vagues. E. Cesàro était élève de son frère G. Cesàro, l'éminent cristallographe, et de Catalan. Il a publié, lorsqu'il était encore étudiant à l'Université de Liége, outre de nombreuses notes d'analyse et de géométrie infinitésimale des recherches *sur diverses questions d'arithmétique* (*asymptotique*) (1883) qui sont un travail de premier ordre. Rentré dans son pays natal, il fut d'abord professeur à l'Université de Palerme, puis à celle de Naples où il succéda à

Battaglini, et publia successivement en italien, ses cours d'*Analyse algébrique* (1894) et d'*Analyse infinitésimale* (1899) qui viennent d'être traduits en allemand (1904), la *Géométrie intrinsèque* (1896, traduite en allemand sous le titre *Natürliche Geometrie*, 1901), la *théorie de l'Élasticité* (1894) et d'innombrables mémoires de hautes mathématiques où se revèle tout ce qui caractérisait son beau talent, un rare esprit d'invention, une extrême richesse dans le développement des conséquences d'une idée principale, en même temps qu'un don d'exposition remarquable : Cesàro savait, à propos des questions les plus élémentaires comme des plus élevées, être original, rigoureux, clair, précis et concis. Il était associé de l'Académie royale de Belgique et membre d'un grand nombre de sociétés ou d'Académies italiennes ou étrangères, entre autres de la *Società Italiana delle Scienze*, dite des XL (Rome). En 1887, l'Académie royale des Lincei de Rome lui avait décerné son grand prix, sur un rapport de Beltrami.

III. G. de Longchamps, né à Alençon le 1er mars 1842, mort à Paris le 9 juillet 1906, a publié quelques travaux originaux qui témoignent de ce qu'il aurait pu faire dans le domaine de la science pure, s'il avait pu y consacrer de moins rares loisirs. Mais c'est surtout comme directeur du JME et du JMS et comme professeur de mathématiques spéciales dans les grands lycées de Paris qu'il s'est fait connaître. Il a fait paraître quelques ouvrages qui contiennent la substance de ses leçons : *Algèbre* (1re édition 1883; seconde édition, 1889), *Géométrie analytique* (1884; 2 vol.); *Supplément* (à l'algèbre et à la géométrie analytique; 1re édition, 1889, 2me édition, 1899; troisième édition, 1893, contenant de plus que les précédentes, des Compléments de *Trigonométrie* et de *Mécanique*); *Cours de problèmes de géométrie analytique* (1898-1899; 3 vol.). On lui doit en outre ce livre curieux : *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (1890), digne de figurer à côté de la *Géométrie du compas* de Mascheroni, et un grand nombre d'articles sur des sujets plus ou moins apparentés à ses cours : géométrie du triangle, géométrie récurrente, normales aux coniques à centre, intégration des équations aux différences finies, etc.

(P. M. et J. N.).

SUR L'EMPLOI DE LA FORMULE DE N. MERCATOR,

par M. A. Aubry.

1. La formule de Nicolas Mercator

$$L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \qquad (1)$$

où L désigne un logarithme népérien, ne converge rapidement que pour très petites valeurs de la variable; aussi, nombreux sont les moyens qu'on a proposés pour corriger ce défaut.

Certains de ces procédés visent à abréger le calcul direct ou emploient des transformations évidentes.

Mercator n'avait appliqué sa formule qu'à la valeur $x=0{,}1$. Brouncker, qui l'avait trouvée également, la fit servir au calcul de L2, en utilisant la proposition suivante : *Partageons la série* $\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}+\cdots$ *en groupes contenant : le premier, le premier terme ; le second, les deux suivants ; le troisième, les quatre suivants ; le quatrième, les huit suivants ;... chaque groupe a une valeur supérieure, à la fois, à celle du quart du précédent et à la moyenne géométrique de celles des deux voisins* (*Philosophical Transactions*, 1668). Voir pour la démonstration, JME, 1899, p. 142.

Wallis fit voir, dans le même recueil, que la formule (1) s'étend aux nombres de la forme $1-x$ et montra comment les substitutions $x=0{,}2$, $-0{,}2$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $0{,}02$, $-0{,}02$ conduisent à la connaissance de L2, L3, L5, L7, L11 et L17.

James Gregory (*Exercitationes geometricae*, Londres, 1668) tira de ces développements, le suivant

$$L\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right). \qquad (2)$$

Newton connaissait tout cela depuis deux ans, ainsi que le moyen de trouver les logarithmes des nombres premiers inférieurs à 100, à l'aide des égalités

$$2^{10}=\frac{9984.1020}{9945},\quad 5=\frac{10}{2},\quad 7^2=\frac{98}{2},\quad 11=\frac{99}{9},\quad 13=\frac{1001}{7.11},\cdots$$

Briggs (*Arithmetica logarithmica*) et J. Gregory (*Vera circuli et hyperbolae quadratura*) avaient employé des égalités analogues, mais plus commodes. On trouve aussi dans la *Methodus Fluxionum* de Newton, écrite vers 1671, la transformation que voici :

$$\frac{\mathrm{L}(n+1)-\mathrm{L}(n-1)}{\mathrm{L}n-\mathrm{L}(n-1)}=\frac{\frac{2}{n}+\frac{2}{3n^3}+\cdots}{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\cdots}$$

d'où, en posant $\mathrm{L}(n+1)-\mathrm{L}(n-1)=2d$, et effectuant la division indiquée

$$\mathrm{L}n=\mathrm{L}(n-1)+d+\frac{d}{2}+\frac{d}{12n^3}+\cdots \qquad (3)$$

Euclid Speidell (*Logarithmotechnia*, Londres, 1688) a calculé, avec vingt-cinq décimales, les logarithmes de $2, \frac{5}{4}, 3, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}$, en faisant, dans (2), $x=\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. De là, diverses manières de trouver les logarithmes de 2, 3, 5 et 7.

Jean Bernoulli (*Acta Eruditorum*, 1694) a donné une transformation qui peut s'obtenir en changeant, dans (1), x en $-\frac{x}{n+x}$.

Halley (*Philosophical Transactions*, 1695) a donné des applications de la formule de Mercator qu'on peut généraliser en faisant, dans (1), $x=\frac{1}{n}$, $x=-\frac{1}{n}$, et, dans (2), $x=\frac{1}{2n+1}$, $x=\frac{1}{2n^2-1}$.

Shervin a publié dans la seconde édition des *Mathematical Tables* (Londres, 1706) deux méthodes de Sharp, pour le calcul des logarithmes des petits nombres. Il cherche ceux des nombres suivants très voisins de l'unité

$$\frac{100}{99}, \quad \frac{121}{120}, \quad \frac{124}{125}, \quad \frac{126}{125}, \quad \frac{224}{225}, \quad \frac{961}{960},$$

ce qui lui donne les logarithmes de 2, 3, 5, 7, 11, 31. Le calcul de ceux des nombres 0,96, 1,08, 0,975, 1,04, 1,008, 1,001, 0,9996, 0,9975 lui donne de même les logarithmes des nombres 2, 3, 5, 13, 7, 11, 17, 19, par des calculs plus commodes.

Lagrange (*Théorie des fonctions analytiques* et *Calcul des fonctions*) étend la formule (1) à un nombre positif quelconque, en posant

$$x = \sqrt[k]{n} - 1 \quad \text{et} \quad x = 1 - \sqrt[k]{\frac{1}{n}},$$

ce qui lui donne ces deux limites

$$k(\sqrt[k]{n} - 1) > \mathrm{L}n > k\left(1 - \sqrt[k]{\frac{1}{n}}\right). \tag{4}$$

Garnier (*Analyse Algébrique*, Paris, 1804), pour trouver le logarithme d'un très grand nombre a, le réduit en fraction continue, en s'arrêtant à la réduite $\frac{p}{q}$, dont le quotient q est inférieur à la limite des tables. Si on pose

$$a = \frac{p}{q}\frac{1+x}{1-x}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ap-q}{ap+q},$$

on aura très sensiblement

$$\mathrm{L}a = \mathrm{L}p - \mathrm{L}q + 2\frac{ap-q}{ap+q}.$$

Dubourguet (*Annales de Gergonne*, t. II) a donné une formule qu'on peut déduire de (2) en multipliant cette relation par $1 - x^2$ et faisant $x = \frac{n+1}{n-1}$. (*)

Enfin nous citerons la formule résultant du développement de l'expression

$$\mathrm{L}\frac{1}{1-x} - \mathrm{L}(1+x) - \frac{x}{2}\mathrm{L}\frac{1+x}{1-x}.$$

En y faisant $x = \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}$, on aura aisément L2, L3, L5 et L7 (Thomson, *Soc. d'Edimbourg*, 1836).

9. Briggs, Mercator, Cotes et Stirling ont montré comment, connaissant les logarithmes de quelques nombres en progression arithmétique, on peut en construire une table au moyen des différences premières, secondes, etc.

Delambre (*Mém. de l'Ac. de Turin*, t. IV) a exprimé en série les

(*) Voir *Progreso matematico*, 1899 (p. 102 et seq.), plusieurs autres formules obtenues de cette façon.

différences des divers ordres, qui sont d'ailleurs faciles à calculer, car on a

$$\Delta \mathrm{L}n = \mathrm{L}\frac{n+h}{n},\quad \Delta^2 \mathrm{L}n = \mathrm{L}\frac{(n+2h)n}{(n+h)^2},\quad \Delta^3 \mathrm{L}n = \frac{(n+3h)(n+h)^3}{(n+2h)^3 n},\ \ldots$$

Callet (*Tables de logarithmes*, 1783,) a donné la formule générale du développement de $\Delta^k \mathrm{L}n$, et a signalé ceux de $\Delta^2 \mathrm{L}n$, $\Delta^3 \mathrm{L}n$, $\Delta^4 \mathrm{L}n$, $\Delta^5 \mathrm{L}n$, surtout le dernier, qui donne pour $h = 1$,

$$\mathrm{L}\frac{(n+5)(n+3)^{10}(n+1)^5}{(n+4)^5(n+2)^{10}n} = \frac{24}{n^5} - \frac{300}{n^6} + \frac{2400}{n^7} - \frac{15750}{n^8} + \cdots \quad (5)$$

Le second membre peut se réduire à quelques termes si n est très grand.

8. Les méthodes générales de transformation des séries trouvent une application importante aux séries logarithmiques. Nous citerons les deux suivantes.

Posons avec Stirling (*Methodus differentialis*, Londres, 1730)

$$\mathrm{F}(z) = \frac{x^z}{z(1-x)} - \frac{x^{z+1}}{z(z+1)(1-x)^2} + \frac{x^{z+2}}{z(z+1)(z+2)(1-x)^3} - \cdots;$$

il viendra $$\mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(z+1) = \frac{x^z}{z},$$

$$\mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(\infty) = \frac{x^z}{z} + \frac{x^{z+1}}{z+1} + \frac{x^{z+2}}{z+2} + \cdots = \mathrm{F}(z),$$

car $\mathrm{F}(\infty) = 0$. On tire de là, par exemple,

$$\mathrm{L}\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{10}}{10} \quad (6)$$

$$+ \frac{x^{11}}{11(1-x)}\left[1 - \frac{x}{13(1-x)} + \frac{x^2}{13.13(1-x)^2} \cdots\right]$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on aurait, en calculant seulement vingt termes de la série avec douze décimales, le logarithme de 2 avec dix décimales exactes, tandis qu'avec (1) il faudrait calculer 20 000 000 000 termes avec vingt décimales, pour être assuré d'avoir la même approximation.

Avec Euler (*Institutiones Calculi differentialis*), écrivons

$$\mathrm{S} = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \cdots, \quad x = \frac{y}{1-y};$$

à cause des égalités

$$\begin{aligned} x &= y + y^2 + y^3 + \cdots, \\ x^2 &= y^2 + 2y^3 + 3y^4 + \cdots, \\ x^3 &= y^3 + 3y^4 + 6y^5 + \cdots, \\ x^4 &= y^4 + 4y^5 + 10y^6 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

il viendra, en posant $b - a = \Delta a$, $c - 2b + a = \Delta^2 a$, $d - 3c + 3b - a = \Delta^3 a$, ...

$$S = ya - y^2\Delta a + y^3\Delta^2 a - \cdots$$

d'où

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{10}}{11}\left(y - \frac{1!}{12}y^2 + \frac{2!}{12.13}y^3 - \cdots\right). \quad (7)$$

4. Les transformations qu'il nous reste à exposer ont trait spécialement à la série logarithmique. Nous trouvons d'abord la formule

$$L\frac{(n+1)^2(n+4)}{(n+3)^2 n} = L\left[1 + \frac{4}{n(n+3)^2}\right] \quad (8)$$

due à Muller (*A Mathematical Treatise*, Londres 1736), qui n'en a pas compris l'importance, car il se borne à traiter le seul cas de $n = 14$.

Borda (*Tables trigonométriques*, Paris 1799) a retrouvé la formule de Muller. Il fait, dans (1), $x = \pm\frac{2}{n^3 - 3n}$, d'où, en additionnant les deux relations ainsi obtenues,

$$L\frac{(n-1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n-2)} = 2\left\{\frac{1}{n^3 - 3n}\right\}, \quad (9)$$

en écrivant pour abréger $\{x\} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \cdots$

Les valeurs $n = 3, 4, 7$, permettent d'obtenir L2, L3 et L5.

Comme le remarque Dubourguet (*Algèbre*, Paris, 1802) on peut trouver, pour L2, L3 et L5, des séries plus convergentes que celles de Borda, en faisant, dans (2), $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}$. Mais si, avec Delambre, on substitue, dans (9), les valeurs $n = 9, 10, 13, 23, 34$, on obtient les logarithmes de 2, 3, 5, 7, 11 à l'aide de séries encore bien plus convergentes.

On peut aussi substituer, avec Lacroix, $n = 5, 6, 7, 8$.

D'ailleurs, plus on augmente ainsi la convergence, plus les éliminations sont pénibles.

5. Soit une expression de la forme $\frac{X+A}{X+B}$, où X désigne un polynome entier en x tel que $X+A$ et $X+B$ soient décomposables en facteurs linéaires; entre les logarithmes de ces facteurs il y aura la relation

$$L\frac{X+A}{X+B}=2\left\{\frac{A-B}{2X+A+B}\right\}. \qquad (10)$$

Delambre, dans la préface des *Tables* de Borda, considère l'expression

$$\frac{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}{(x^2-c^2)(x^2-d^2)}=\frac{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}{x^4-(c^2+d^2)x^2+c^2d^2}, \qquad (11)$$

qui est dans le cas indiqué plus haut, si $a^2+b^2=c^2+d^2$, c'est à-dire si l'on a

$$a=\alpha\beta+\gamma\delta,\quad b=\alpha\gamma-\beta\delta,\quad c=\alpha\beta-\gamma\delta,\quad d=\alpha\gamma+\beta\delta.$$

Soit $d=0$; on pourra écrire $a=(\alpha-\beta)^2$, $b=\alpha\beta$, $c=(\alpha+\beta)^2$; par exemple, si $a=3$, $b=4$, $c=5$, il viendra la remarquable formule de Haros

$$L\frac{(n^2-4^2)(n^2-3^2)}{(n^2-5^2)n^2}=2\left\{\frac{72}{n^4-25n^2+72}\right\} \qquad (12)$$

publiée pour la première fois dans les *Compléments d'Algèbre* de Lacroix (Paris, 1799) et qui permet, étant donnés les logarithmes de six des sept nombres $n+5$, $n+4$, $n+3$, n, $n-3$, $n-4$, $n-5$, de trouver aisément le septième.

Dans (11), faisons $c=d$, cette condition sera réalisée en posant

$$a=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta,\quad b^2=\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta;$$

et, en particulier, $a=7$, $b=1$, $c=d=5$, d'où cette formule

$$L\frac{(n^2-49)(n^2-1}{(n^2-25)^2}=-2\left\{\frac{288}{n^4-50n^2+337}\right\} \qquad (13)$$

donnée par Secrétan, dans les C. R. de 1857.

6. Lavernède (*Annales de Gergonne*, t. I) a donné d'autres cas de la relation (10). Soit d'abord

$$\frac{x^3+px^2+qx+r}{x^3+px^2+qx}=\frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{x(x+d)(x+e)}$$

d et e seront rationnels si $p^2 - 4q$ est un carré, ou, puisque $p = a+b+c$ et $q = ab + bc + ca$, si $(a+b-c)^2 - 4ab$ est lui-même un carré. Posons donc

$$(a+b-c)^2 - 4ab = (a+b-c+2\lambda)^2, \quad \text{d'où } c = \frac{(a+\lambda)(b+\lambda)}{\lambda};$$

il viendra, puisque d et e sont les racines de $x^2 + px + q = 0$,

$$d = -\frac{(a+b)\lambda + ab}{\lambda}, \quad e = -(a+b+\lambda)$$

d'où, en changeant x en $\frac{x}{\lambda}$, cette nouvelle application de (10)

$$\begin{aligned} A + X &= (x + a\lambda)(x + b\lambda)[x + (a+\lambda)(b+\lambda)], \\ B + X &= x[x + (a+b)\lambda + ab][x + (a+b+\lambda)\lambda]. \end{aligned} \quad (14)$$

La supposition $a = b = 1$ conduit à la formule de Muller.

En second lieu, remarquons que le produit des deux fractions $\frac{X+A}{X+B}, \frac{X-A}{X-B}$ est également de la forme indiquée. Multiplions donc membre à membre les deux égalités

$$\frac{(x+a)(x+c-a)}{x(x+c)} = \frac{x^2 + cx + a(c-a)}{x^2 + cx},$$
$$\frac{(x+b)(x+c-b)}{x(x+c)} = \frac{x^2 + cx + b(c-b)}{x^2 + cx};$$

si on pose $a(c-a) = -b(c-b)$, il viendra une nouvelle formule, qui pour $a = 2$, $b = 1$, devient

$$L\frac{(n+6)(n+3)(n+2)(n+1)}{n^2(n+5)^2} = 2\left\{\frac{18}{n^4 + 10n^3 + 25n^2 - 18}\right\} \quad (15)$$

La série du second membre converge plus rapidement que celle de Haros, bien que le premier emploie un logarithme de moins.

En troisième lieu, si nous appelons a, b, c, d, e, les racines de $x^5 + px^3 + qx + r = 0$, $-a, -b, -c, -d, -e$ seront celles de $x^5 - px^3 + qx - r = 0$, et on aura

$$a + b + c + d + e = 0, \quad abc + abd + abe + \ldots = 0.$$

Cette dernière égalité peut s'écrire

$$(b+c+d)a^2 + (b+c+d)^2 a + (b^2c + b^2d + c^2b + 2bcd + d^2b + d^2c + c^2d) = 0.$$

La racine quelconque a sera rationnelle si l'expression

$$(b+c+d)^4 - 4(b+c+d)(b^2c+\cdots+c^2d)$$
$$= b^4 - 2(c+d)^2 b^2 - 4cd(c+d)b + (c^2-d^2)^2$$

est un carré, ce qu'on obtiendra, par exemple, en faisant

$$b = c+d, \quad c = 2\alpha^2, \quad d = -\beta^2$$

d'où $a = -2\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2$, $\quad -a-b-c-d = -2\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2$

ce qui donne

$$A + X = [x - (2\alpha+\beta)(\alpha-\beta)][x - (2\alpha-\beta)(\alpha+\beta)]$$
$$[x + 2\alpha^2 - \beta^2][x + 2\alpha^2][x - \beta^2],$$
$$B + X = [x + (2\alpha+\beta)(\alpha-\beta)][x + (2\alpha-\beta)(\alpha+\beta)]$$
$$[x - 2\alpha^2 + \beta^2][x - 2\alpha^2][x + \beta^2]. \qquad (16)$$

On pourra faire l'application de ces formules aux cas de $\alpha = 2$, $\beta = 1$, ou $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

Enfin dédoublons l'expression

$$\frac{(x \mp a \pm b)(x \pm a)(x \mp b)}{x(x^2 - a^2 + ab - b^2)} = \frac{x^3 - (a^2 - ab + b^2)x \pm ab(a-b)}{x^3 - (a^2 - ab + b^2)x}$$

et multiplions les deux égalités résultantes; le premier membre sera

$$\frac{[x^2 - (a-b)^2](x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}{x^2(x^2 - a^2 + ab - b^2)^2}.$$

La formule (10) est applicable si $a^2 - ab + b^2$ est un carré. Posons donc

$$a^2 - ab + b^2 = (b - \lambda)^2 \quad \text{d'où} \quad b = -\frac{a^2 - \lambda^2}{2\lambda - a}$$

il viendra, en changeant x en $\frac{x}{2\lambda - a}$, une formule qui se réduit, pour $a = 3$, $\lambda = 1$, à la suivante :

$$L\frac{(n^2-8^2)(n^2-5^2)(n^2-3^2)}{(n^2-7^2)^2 n^2} = 2\left\{\frac{7200}{n^2(n^2-49)^2}\right\}, \qquad (15)$$

très convergente, dès que n dépasse 10. A l'aide des substitutions $n = 11, 12, 13, 14, 17, 19, 25, 27$, on arrivera aux logarithmes des nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Les substitutions $n = 30, 22, 57, 37, 85, 253, \ldots$ donneront ensuite ceux des nombres premiers suivants 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

7. Le principe qui sert de base à toutes ces méthodes consiste à décomposer $\frac{1}{2}$, par exemple, en un produit de fractions très peu différentes de l'unité. La plus simple de ces décompositions est celle de Sharp (l. cit.)

$$2=\left(\frac{16}{15}\right)^{7}\left(\frac{25}{24}\right)^{5}\left(\frac{81}{80}\right)^{3}.$$

En outre des formules analogues résultant des éliminations dont nous avons parlé aux nos 4, 5 et 6, on en connaît plusieurs autres, entre autres celles de Gauss et de M. J. Perott. Mais ce que nous en avons dit suffit à en comprendre l'origine. Nous nous contenterons de signaler cette relation qu'on déduit de la substitution de Lacroix (n° 4) :

$$2=\left(\frac{28}{27}\right)^{14}\left(\frac{50}{49}\right)^{5}\left(\frac{81}{80}\right)^{8}\left(\frac{243}{245}\right)^{2}.$$

GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE

par M. D. Tabascof (Sofia).

Cet article nous a été adressé sous une forme qui appelait quelques retouches : nous avons modifié les notations et simplifié par ci et par là les démonstrations. Le théorème du § 2 reproduit une question que nous avons proposée dans *Mathesis* (I, p. 204 et III, p. 138); nous ne pouvons nous prononcer sur le degré de nouveauté des autres théorèmes. (J. N.)

1. *Trois parallèles menées par les sommets d'un triangle* ABC *rencontrent les côtés opposés aux points* A_1, B_1, C_1 *et une transversale d aux points* A_2, B_2, C_2; *on a la relation*

$$\frac{AA_2}{AA_1}+\frac{BB_2}{BB_1}+\frac{CC_2}{CC_1}=1, \qquad (1)$$

où il faut observer la règle des signes.

(Le lecteur est prié de faire la figure; pour plus de facilité, mener AA_1 à l'intérieur de l'angle BAC et B_2C_2 entre A et BC).

En effet, si la droite BA_2 rencontre CC_1 en E, on a

$$\frac{AA_2}{AA_1}=\frac{EC_1}{CC_1}=\frac{CC_1-CC_2-C_2E}{CC_1}=1-\frac{CC_2}{CC_1}-\frac{C_2E}{CC_1},$$

$$\frac{C_2E}{BB_2}=\frac{C_2A_2}{A_2B_2}=\frac{CA_1}{A_1B}, \quad \frac{CC_1}{BB_1}=\frac{C_1A}{AB}=\frac{CA_1}{A_1B}.$$

Les deux dernières égalités donnent

$$\frac{C_2E}{BB_2} = \frac{CC_1}{BB_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{C_2E}{CC_1} = \frac{BB_2}{BB_1};$$

par suite,

$$\frac{AA_2}{AA_1} = 1 - \frac{CC_2}{CC_1} - \frac{BB_2}{BB_1},$$

ce qui est l'égalité proposée (1).

2. Si l'on fait une projection centrale de la figure, les parallèles AA_1, BB_1, CC_1 sont remplacées par trois droites AA_1, BB_1, CC_1 concourant en un même point M; le rapport simple $AA_2 : AA_1$ ou le rapport anharmonique $(A_2A_1A\,\infty)$ sera remplacé par le rapport $(A_2A_1AM) = (MAA_1A_2)$, etc.; par suite, on a le théorème plus général :

Les droites joignant les sommets d'un triangle ABC *à un point quelconque* M *rencontrent les côtés opposés en* A_1, B_1, C_1 *et une transversale quelconque d en* A_2, B_2, C_2. *On a la relation*

$$(MAA_1A_2) + (MBB_1B_2) + (MCC_1C_2) = 1. \qquad (2)$$

En prenant pour d la droite de l'infini on retrouve l'égalité connue

$$\frac{A_1M}{A_1A} + \frac{B_1M}{B_1B} + \frac{C_1M}{C_1C} = 1. \qquad (2')$$

Inversement, de ce cas particulier on peut déduire le cas général.

3. Si l'on transforme le théorème (2) par voie de dualité, on obtient la proposition suivante :

Une transversale m rencontre les côtés d'un trilatère abc en des points que l'on joint aux sommets opposés par les droites a_1, b_1, c_1, *et à un point quelconque* D *par les droites* a_2, b_2, c_2. *On a la relation*

$$(maa_1a_2) + (mbb_1b_2) + (mcc_1c_2) = 1. \qquad (3)$$

Dans cette égalité, les droites a_2, b_2, c_2 peuvent être remplacées par trois droites parallèles entre elles et menées par les points am, bm, cm. Si l'on fait passer la droite m à l'infini, la relation correspondante ne diffère pas essentiellement de (2').

4. On obtient des propositions sur les trièdres en projetant les figures des n^os^ 2 et 3 à partir d'un point quelconque S extérieur au plan ABC. La dernière proposition, par exemple, conduit au théorème suivant :

Soient S *le sommet et a, b, c les arêtes du trièdre formé par les plans* α, β, γ. *Un plan quelconque* μ *mené par* S *rencontrant* α, β, γ *suivant les*

droites a', b', c' et d étant une droite quelconque menée par S, *appelons* α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 *les plans a'a, b'b, c'c, a'd, b'd, c'd ; on a l'égalité*

$$(\mu\alpha\alpha_1\alpha_2) + (\mu\beta\beta_1\beta_2) + (\mu\gamma\gamma_1\gamma_2) = 1.$$

5. Soit ABCD un tétraèdre. Les droites qui en joignent les sommets à un point quelconque M, rencontrent les faces opposées en des points que nous désignerons par A_1, B_1, C_1, D_1. On sait que

$$\frac{A_1M}{A_1A} + \frac{B_1M}{B_1B} + \frac{C_1M}{C_1C} + \frac{D_1M}{D_1D} = 1. \qquad (4)$$

Si l'on représente par ∞ le point à l'infini de la droite AM, le rapport simple $A_1M : A_1A$ est égal au rapport anharmonique $(MAA_1\infty)$. Cela posé, transformons la figure par homologie ; les points à l'infini sur les droites AM, BM, CM, DM seront remplacés par les points de rencontre A_2, B_2, C_2, D_2 de ces droites avec un plan quelconque λ, et à la place de (4) nous aurons

$$(MAA_1A_2) + (MBB_1B_2) + (MCC_1C_2) + (MDD_1D_2) = 1. \qquad (5)$$

Voici une démonstration analytique de l'égalité (5)

Désignons les coordonnées normales *absolues* de M par α, β, γ, δ et celles de A_2 par $l\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$, $m\delta$; on voit facilement que

$$m = \frac{A_2A}{MA}, \quad l = \frac{A_1A_2}{A_1M},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{l}{m} = (A_2MA_1A) = (MA_2AA_1) = 1 - (MAA_2A_1) = 1 - \frac{1}{(MAA_1A_2)}.$$

Posons

$$(MAA_1A_2) = \alpha', \quad (MBB_1B_2) = \beta', \quad (MCC_1C_2) = \gamma', \quad (MDD_1D_2) = \delta';$$

les coordonnées *relatives* du point A_2 seront alors

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha'}\right)\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta,$$

et l'on a la condition

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha'}\right)\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta r = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha' = \frac{\alpha u}{\Sigma \alpha u}.$$

De ce résultat on conclut aisément

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 1.$$

6. Si l'on transporte le point M à l'infini, on obtient la généralisation du n° 1, à savoir :

Les droites menées par les sommets d'un tétraèdre ABCD *parallèlement à une même direction rencontrent les faces opposées en* A_1, B_1, C_1, D_1 *et un plan quelconque en* A_2, B_2, C_2, D_2. *On a la relation*

$$\frac{AA_2}{AA_1}+\frac{BB_2}{BB_1}+\frac{CC_2}{CC_1}+\frac{DD_2}{DD_1}=1.$$

Nous laissons au lecteur de transformer la proposition du n° 5 par voie de dualité.

BIBLIOGRAPHIE.

Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis von Dr Max Simon. Leipzig et Berlin, B. G. Teubner, 1906. (In-8° cartonné de VI-108 pp.) Prix : 3 marcs 20 pf.

La *Methodik der elementaren Arithmetik* de M. Max Simon est plus un cours de méthodologie qu'un vrai traité d'arithmétique. L'auteur nous y donne le texte de ses leçons à l'université de l'empereur Guillaume, pendant le semestre d'été 1904. Son but était d'initier les étudiants à l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre dans les neuf classes des gymnases et Realschulen, et de leur apprendre à procéder méthodiquement et par degrés.

L'ouvrage se compose de deux parties parallèles : la généralisation de la notion du nombre, depuis le simple concept du nombre jusqu'à celui du nombre complexe; la résolution algébrique des équations.

Le concept du nombre développable en série et le calcul de ces nombres a été l'objet d'une attention spéciale. L'auteur s'attache à la méthode de Georg Cantor, supérieure, à son avis, à celles de Dedekind et de Weierstrass.

Tout le volume de Max Simon est des plus intéressants, plein de remarques de bon sens.

Autre qualité bien rare : M. Max Simon multiplie partout les notions historiques; et ces notions toujours heureusement choisies, sont aussi toujours très exactes, mérite qui vaut bien la peine d'être signalé.

Voici le plan de l'auteur :

Introduction. 1° Nombre; compter. 2° Addition. 3° Soustraction. 4° Introduction des quantités négatives.

Opérations du 2d degré. 5° Multiplication. 6° Division. 7° Calcul des fractions. 8° Calcul décimal. 9° Calcul des nombres concrets. 10° Équations du 1r degré. 11° Calcul des nombres développables en séries.

Opérations du 3e degré. 12° Puissance et racines. 13° Équations quadratiques. 14° Logarithmes. 15° Théorème du binôme. 16° Équations cubiques. 17° Nombres complexes. 18° Complément de la théorie des équations du 3e degré. Les équations des 4e et 5e degrés. 19° Fonction exponentielle. 20° Les logarithmes naturels.

H. Bosmans, S. J.

Grundriss einer analytischen Geometrie der Ebene von J. Thomae in Iena. Mit 8 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1905. (In-8° cartonné de x-184 pages). Prix : 3 marcs 80 pf.

La préface du professeur d'Iéna fait bien connaître le but et l'esprit de son livre. Je la traduis, mais un peu librement.

« Pour aider mes élèves, dans mes leçons de Géométrie analytique plane, dit-il, je me suis contenté, pendant bien des années, de leur mettre entre les mains un simple *squelette*, composé de l'énoncé des propositions et d'un très court aperçu de leurs démonstrations. Les exemplaires du *squelette* sont épuisés. Cédant au désir de mes amis, je l'édite en le développant un peu. Mon intention n'est pas de rendre ainsi l'explication orale superflue, mais je veux mettre les étudiants à même de suivre la leçon, sans la préoccupation distrayante de notes à prendre, préoccupation qui rend souvent la classe pénible à suivre.

» Mon *Précis* comprend la géométrie du point, de la droite et du plan. Dans cette dernière, j'ai soumis les coniques, la collinéation et la dualité à une discussion approfondie. De nos jours, les élèves connaissent bon nombre des propriétés des coniques définies par leurs équations rapportées à des axes de coordonnées. Après avoir étudié à fond le cercle, il est donc permis de passer immédiatement aux coniques sous leur forme la plus générale. A mon ouvrage est jointe une table analytique des matières. Le lecteur qui se donnera la peine de la consulter, sera vite renseigné sur les sujets traités.

» Un *Précis* ayant pour objet une matière souvent rebattue ne peut guère prétendre à la nouveauté. Il y aurait cependant, j'aime à le croire, exagération à dire que mon opuscule ne contient rien de neuf. Toutefois, mon but principal a été d'y suivre toujours un ordre très systématique. Les propositions élémentaires de la Géométrie projective doivent, d'après moi, marcher de pair avec les propositions de la Géométrie analytique. Je les ai démontrées par la voie analytique. Au surplus, je n'ai pas négligé les propriétés métriques.

» Mon ouvrage était déjà sous presse, quand j'eus connaissance des *Leçons de Géométrie analytique* de MM. Heffter et Köhler qui venaient de paraître chez mon éditeur. Les auteurs de ces *Leçons* passent, comme moi, de la Géométrie à une dimension, à celle à deux dimensions. Pour moi, voilà tantôt vingt ans que je suis cette méthode. Nos ouvrages se rencontrent, naturellement, en bien des points. C'est la conséquence nécessaire de l'identité des sujets traités. Entre les *Leçons* de MM. Heffter et Köhler et mon *Précis* il y a cependant une différence importante. Le *Précis* ne se contente pas de classifier, il étudie les constructions. Consultez au contraire, au mot *Construction*, la table analytique des matières des *Leçons*, vous n'y trouverez qu'un seul renvoi : la construction du quatrième rayon d'un faisceau harmonique dont trois rayons sont donnés.

» Puisse mon *Précis* remplir le but pour lequel il a été écrit! Puisse-t-il faciliter aux élèves l'étude à la Géométrie analytique et de la Géométrie projective! »

Les chapitres du *Précis* de M. Thomae n'ont pas de numéros d'ordre. Je crois utile de les ajouter.

1° Introduction. 2° La Géométrie sur une droite et dans un faisceau. 3° Coordonnées ponctuelles, dans le plan. 4° Dualité et coordonnées tangentielles.

5° Des Déterminants. 6° Classification des coniques. Diamètres conjugués. 7° Propriétés métriques des coniques. 8° Coniques passant par cinq points. 9° Similitude des coniques. 10° Pôles et polaires. Dualité. 11° Collinéation. 12° Théorèmes et propositions complémentaires. H. Bosmans, S. J.

Traité de trigonométrie plane et sphérique par l'abbé E. Gelin, Dr. S. Th. et Ph., professeur de mathémati ques supérieures au Collège S. Quirin à Huy. Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique; spécialement recommandé par le Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen pour les classes supérieures des Athénées et l'École militaire de Bruxelles Deuxième édition. Bruxelles, Schepens & C^ie^; Namur, Wesmael-Charlier; Huy, chez l'auteur; 1906. (In-8° de 288 pp.) Prix : 5 francs.

Nouvelle édition de cet excellent Traité, très complet, où toutes les questions classiques de la trigonométrie et beaucoup d'autres sont exposées d'une manière logique, rigoureuse, claire et concise, parfois trop concise. Dans le livre I, consacré à la théorie des lignes trigonométriques, n'aurait-il pas été utile de représenter géométriquement les courbes $y = \sin x$, $y = \operatorname{tang} x$, et de faire ressortir davantage le caractère fonctionnel des lignes trigonométriques; dans le livre IV, d'introduire la notation e^{xi} pour représenter $\cos x + i \sin x$, et de donner un aperçu de la théorie des fonctions hyperboliques?

Le Traité de M. l'abbé Gelin contient un très grand nombre d'applications théoriques et pratiques (construction des tables; résolution des triangles; questions de maxima et minima, etc.); à cause de cela, on peut le recommander aux jeunes gens qui veulent subir les examens d'entrée aux écoles d'ingénieurs. Pour les commençants, il est trop touffu : ils feront mieux d'employer le *Précis de trigonométrie rectiligne* de l'auteur, sous la direction d'un maître expérimenté. (P. M.)

N.-H. Abel, sa vie et son œuvre, par Lucas de Pesloüan. Paris, Gauthier-Villars, 1906 (In-8° cartonné de XIII-169 pp. avec un portrait). Prix : 5 fr.

L'auteur a voulu donner un récit de l'existence d'Abel en même temps qu'une analyse de son œuvre; il a cherché à montrer suivant quel ordre cette œuvre a été créée et à déterminer quels accords il peut y avoir entre sa création et les circonstances qui ont accompagné cette création.

Cette biographie d'Abel est donc avant tout la vie d'un homme où sont mêlées, dans le récit, des choses mathématiques et des choses d'ordre personnel; il y a dans ce travail quelque chose d'imaginatif et même, peut-être, de romanesque, mais il est écrit avec sympathie pour Abel et une connaissance suffisante de ses travaux mathématiques et il est vraiment intéressant et instructif(*).

Sommaire. Note préliminaire. Préface. Chap. I. Christiania. Jeunesse (1802-

---

(*) M. L. de Pesloüan semble ne pas savoir que M. Mittag-Leffler a retrouvé et publié dans les *Acta mathematica*, les *Recherches sur les fonctions elliptiques*, second mémoire.

1825). Chap. II. Le Voyage (1825-1827). Chap. III. Dernières années (1827-1829). Chap. IV. Quelques réflexions à propos d'Abel. Notes et textes d'Abel.

Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulare di G. Vivanti, prof. ordinario nella R. Università di Messina. Milano, Hoepli, 1906 (In-12 cartonné de VIII-437 pp.). Prix : 3 lire.

Introduction à l'étude des leçons de M. F. Klein sur l'icosaèdre et la résolution de l'équation du 5e degré et sur les fonctions modulaires elliptiques.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1°. *Exercice de géométrie.* Soient A, B, C, D les sommets d'un tétraèdre et A', B', C', D' les centres de gravité des faces BCD, ...

Le lieu d'un point M tel que la somme $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$ a une valeur constante K^2, est une sphère de centre D'.

De même, le lieu d'un point M tel que $\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$ soit égale à K^2 est une sphère de centre A'.

Si la constante K^2 a la même valeur dans les deux cas, on a MA = MD; donc les deux sphères de centre D' ou A', qui se rapportent à la même valeur de K^2 se coupent constamment dans le plan perpendiculaire au milieu de l'arête AD.

(Hernandez, professeur à Valencia)

2°. *Sur le tétraèdre.* Soient $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a_1$, $DB = b_1$, $DC = c_1$ les longueurs des arêtes d'un tétraèdre DABC, et $A'A'_1 = a_2$, $B'B'_1 = b_2$. $CC'_1 = c_2$ les longueurs des droites joignant les milieux A', A'_1... des arêtes a, a_1, ... Une sphère passant par les points A, B, C coupe les arêtes DA, DB, DC, en des points A'', B'', C'' tels que le plan A''B''C'' est parallèle au plan tangent mené en D à la sphère ABCD et que $DA.DA'' = DB.DB'' = DC.DC''$. Le triangle A''B''C'' est une *section antiparallèle* des tétraèdres. Des triangles semblables donnent facilement

$$\frac{B''C''}{a} = \frac{DC''}{c_1}, \qquad \frac{C''A''}{b} = \frac{DC''}{a_1}.$$

En égalant les valeurs de DC'' qu'on tire de ces proportions, on voit que

$$\frac{B''C''}{aa_1} = \frac{C''A''}{bb_1} = \frac{A''B''}{cc_1}.$$

Cette relation est bien connue : *Les trois produits des côtés opposés*

d'un quadrangle complet (plan ou gauche) *sont proportionnels aux côtés d'un certain triangle.*

On en conclut que le plus grand des produits aa_1, bb_1, cc_1 est moindre que la somme des deux autres.

Les triangles $A'B'A'_1$, $A'B'B'_1$ donnent

$$4a_2^2 = c^2 + c_1^2 - 2cc_1 \cos cc_1, \quad 4b_2^2 = c^2 + c_1^2 + 2cc_1 \cos cc_1;$$

d'où, par soustraction,

$$b_2^2 - a_2^2 = cc_1 \cos cc_1.$$

De cette égalité et de ses deux analogues, on conclut

$$aa_1 \cos aa_1 \pm bb_1 \cos bb_1 \pm cc_1 \cos cc_1 = 0,$$

où il faut choisir convenablement les signes des deux derniers termes d'après les angles adoptés pour les arêtes opposées.

Cette relation, bien connue, montre que les trois angles aa_1, bb_1, cc_1 ne peuvent être égaux entre eux à moins d'être droits ; car on aurait, par exemple, $aa_1 = bb_1 + cc_1$, ce qui est impossible (D'après une communication de M. Cikot, professeur à Bois-le Duc).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 597.

(Voir *Mathesis*, (1), t. VII, p. 280).

L'équation indéterminée en nombres entiers,

$$1.2.3 \ldots x + 1 = y^2,$$

n'admet pas d'autres solutions que

$$x = 4, 5, 7, \quad y = 5, 11, 71. \qquad \text{(H. Brocard)}$$

Solution par M. A. Gérardin (Nancy). Nous résumerons ici la note que nous venons de publier dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1906) en réponse à la même question que M. H. Brocard y avait proposée en 1885 sous le n° 1532 et dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 287, sous le n° 166.

La difficulté réside en la nature de l'expression

$$N! = 1.2.3.4 \ldots . N$$

qui ne peut se représenter par les symboles de l'Algèbre. C'est pourquoi,

il ne nous paraît possible de l'étudier que par échelons successifs, ce qui multiplie les hypothèses auxiliaires.

De nombreuses recherches dans la théorie des nombres nous ont montré le rôle particulièrement important de la résolution en nombres entiers de l'équation

$$ax^2 + bx + c = y^2$$

et la corrélation de ce problème avec celui de l'équation

$$N! + 1 = y^2.$$

Le présent travail est destiné à développer cette idée, et il montrera, à défaut de certitude décisive, que, s'il existe d'autres solutions que $x = 4, 5, 7$, elles doivent être extrêmement grandes.

L'hypothèse fondamentale, reconnue exacte, est que l'équation

$$x! + 1 = y^2$$

n'a pas de solution entre $x = 7$ et $x = 25$.

Nous supposerons donc x au moins égal à 25, ce qui donnera

$$x! + 1 = 10^6 h + 1 = y^2.$$

On est ainsi d'abord amené à rechercher une solution de l'équation

$$10^6 h + 1 = y^2.$$

y ne peut être ici que $10u + 1$ ou $10u + 9$.

1° $y = 10u + 1$. On aura

$$100u^2 + 20u + 1 = 10^6 h + 1,$$

d'où

$$10u^2 + 2u = 10^5 h,$$

$$2u(5u + 1) = 2^5 5^5 h.$$

Or, $5u + 1$ ne sera jamais $m.5$, d'où

$$u = 5^5 a,$$

et alors

$$2.5^5 a(5^6 a + 1) = 2^5 5^5 h$$

ou

$$a(5^6 a + 1) = 2^4 h,$$

ce qui donne

$$a = 16l \quad \text{ou} \quad a = 16l + 7.$$

Donc h ne peut avoir que les deux formes

$$250000l^2 + l \quad \text{ou} \quad 250000l^2 + 218751l + 47853,$$

ce qui donne pour y

$$500000l + 1, \quad 218751.$$

2° $y = 10u + 9$. Cette hypothèse, développée de la même façon, montrera que y doit être ici de la forme

$$y = 1000000f + 781249,$$

d'où

$$h = 1000000f^2 + 1562498f + 610350,$$

et enfin

$$y = 1000000f + 999999,$$

d'où

$$h = 1000000f^2 + 217998f + 854198.$$

D'autre part, nous savons qu'un carré impair n'est jamais de la forme $6g + 5$, il y aurait donc pour le problème général *seize* formules.

Mais pour le problème particulier :

$$y^2 = 10^6h + 1 = x! + 1,$$

nous n'aurons que les *quatre* formules précédentes où h sera $6m$.

Il reste à exprimer dans la seconde partie des recherches que chacune des formules est séparément divisible par 2^{16}, 3^{10}, 7^3, 11^2, 13, 17, 19, 23, *au moins*. Ceci donnera toutes les conditions particulières, qui, très probablement, ne seront pas toutes compatibles entre elles.

L'étude de ces nouvelles hypothèses est un peu longue et aride ; en conséquence, nous ne la développerons pas ici.

La conclusion de nos premières recherches est que, si la question comporte une autre solution, elle donnera pour y un nombre de 20 à 30 chiffres au moins.

Il serait peut être intéressant d'étudier

$$10^8h + 1 = y^2.$$

Nous avons d'abord essayé d'autres méthodes, mais celle qui vient d'être exposée nous semble préférable.

Note. Pour la bibliographie du problème et de questions analogues, voir aussi :

NGM, F. Proth, quest. 301, 1877, p. 399 ; E. Lucas, 1878, p. 123 (généralisation).

Intermédiaire des Mathématiciens. A. Thorin, quest. 334, 1894, p. 186; E. Fauquembergue, 1895, p. 125 ; H. Tarry, 1895, p. 363 ; 1896, p. 276. E. Fauquembergue, quest. 1087; 1897, p. 146. E. B. Escott, quest. 1264, 1898, p. 78 ; question 2546, 1903, p. 69 ; P. F. Teilhet, 1904, p. 51. G. de Rocquigny, quest. 2746, 1904, p. 68 ; quest. 2813, 1904, p. 190 ; quest. 2822, 1904, p. 214.

×Question 1496.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, 261).

Si a, b, c, d sont des quantités positives comprises entre zéro et l'unité,

$$P=(a+b+c+d)^3-4bcd(a+b+c+d)-8a^2bcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

est positif.

Solution par M. N. Plahkovo. On a

$$P=(a+b+c+d)[(a+b+c+d)^2-4bcd]-8a(bcd+acd+abd+abc)$$
$$=(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd-4bcd)-8a(bcd+acd+abd+abc).$$

Or, puisque b et c sont inférieurs à l'unité,

$$2bd+2cd-4bcd=2bd(1-c)+2cd(1-b)=\varepsilon,$$

ε étant positif, et l'on a

$$P=(a+b+c+d)[a^2+b^2+2ab+c^2+d^2+2cd+2ac+2ad+\varepsilon]-8a(bcd+acd+abd+abc).$$

On sait que

$$a^2+b^2+2ab+c^2+d^2+2cd=(a+b)^2+(c+d)^2\overline{\overline{>}}2(a+b)(c+d).$$

Par suite

$$P\overline{\overline{>}}(a+b+c+d)[2(a+b)(c+d)+2ac+2ad+\varepsilon]-8a(bcd+acd+abd+abc).$$

Mais

$$Q=(a+b+c+d)\cdot 2(a+b)(c+d)=2(a+b)^2(c+d)+2(a+b)(c+d)^2,$$

et comme

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\overline{\overline{>}}2ab+2ab=4ab,\quad (c+d)^2\overline{\overline{>}}4cd,$$

on a

$$Q\overline{\overline{>}}8ab(c+d)+8cd(a+b)=8(abc+abd+acd+bcd).$$

Donc

$$P\overline{\overline{>}}(a+b+c+d)(2ac+2ad+\varepsilon)+8(1-a)(acc+abd+acd+bcd),$$

quantité évidemment positive puisque l'on a $a<1$.

Question 1552.

(Voir *Mathesis*, (3). VI, p. 40).

Etant donnée une cubique plane de la quatrième classe C_4^3, *prenons la conique polaire* C^2 *d'un point arbitraire* O *de la courbe; cette conique*

touche C_4^5 *au point* O, *passe par son point double* P *et la coupe en deux autres points* 3, 4. *Démontrer que les tangentes à la cubique en son point double* P *coupent* C^2 *aux points doubles de l'involution définie sur cette conique par les deux couples de points conjugués* (3, 4), (P, O).

(V. Retali.)

Solution par M. Fr. Dupont. La cubique C_4^5 est le produit de deux faisceaux correspondants de sommets O et P. A un rayon du premier correspondent deux du second et à un rayon de celui-ci n'en correspond qu'un du faisceau [O] : car une droite issue de O rencontre la cubique en deux nouveaux points, tandis qu'une droite passant par P ne la coupe qu'en un seul. La relation entre les deux faisceaux s'exprime donc par une équation de la forme :

$$(Ax + B)y^2 + 2(Cx + D)y + Ex + F = 0. \qquad (1)$$

x et y sont des paramètres déterminant la position des rayons correspondants des faisceaux [O] et [P]; nous supposerons pour plus de facilité que la droite OP, considérée dans chacun des faisceaux soit déterminée par $x = 0$ et $y = 0$. Les paramètres x et y sont, par exemple, les abscisses, comptées sur une droite quelconque, des points de rencontre de celle-ci avec les rayons de [O] et de [P], l'origine étant prise sur la droite OP.

Si z détermine le rayon PQ conjugué harmoniquement à PO par rapport à deux rayons PM, PM_1 correspondant à un même rayon OMM_1, on aura

$$z = \frac{2yy_1}{y + y_1} = -\frac{Ex + F}{Cx + D} \qquad (2)$$

y et y_1 étant les paramètres relatifs à PM et PM_1.

Cette relation caractérise la conique polaire du point O.

Les points 3 et 4 étant les points de contact des tangentes menées du point O, les deux rayons PM et PM_1 doivent se confondre avec PQ, pour chacune des tangentes P3 et P4. L'équation (1) ayant alors deux racines égales en y, on aura

$$(Cx + D)^2 = (Ex + F)(Ax + B), \qquad (3)$$

équation déterminant les rayons O3 et O4.

On obtiendra les rayons P3, P4 en éliminant x entre (2) et (3) :

$$(BC - AD)z^2 + (BE - AF)z + DE - CF = 0.$$

Le rayon PO est caractérisé par $y = 0$ et la tangente en P à la conique se tire de l'équation (2) en y faisant $x = 0$. On trouve $z = -\frac{F}{D}$.

L'involution définie par les couples des points (3, 4) et (P, O) a pour points doubles les intersections de la conique avec les rayons du faisceau [P] déterminés par l'équation

$$\begin{vmatrix} y^2 & 2y & 1 \\ DE - CF & AF - BE & BC - AD \\ 0 & -F & D \end{vmatrix} = 0,$$

qui se simplifie et devient

$$By^2 + 2Dy + F = 0. \qquad (4)$$

Or, si dans l'équation (1), nous faisons $x = 0$, nous obtiendrons les tangentes en P à la cubique et leur équation est identique à (4).

×Question 1561.

(Voir *Mathesis*, (3); VI, p. 88).

On peut trouver sur les côtés BC, CA, AB *d'un triangle* ABC *une infinité de triples de points* A_1, B_1, C_1 *tels que les triangles* A_1CB_1, B_1AC_1, C_1BA_1 *soient équivalents. Quand on donne le point* A_1, *il suffit de mener* A_1B_2 *parallèle à* AB *et rencontrant* AC *en* B_2, B_2C_1 *parallèle à* BC *et rencontrant* AB *en* C_1, C_1A_2 *parallèle à* CA *et coupant* BC *en* A_2, *enfin* A_2B_1 *parallèle à* BA.

Quand on donne la surface A_1CB_1 *comment construire le triple* $A_1B_1C_1$?

(Sanjana)

Solution par MM. J. Rose et H. Lez. Soit C_2 le point où la parallèle à BC menée par B_1 coupe AB; on voit aisément par la considération de triangles semblables que C_2A_1 est parallèle à AC. Il en résulte que $CB_2 = AB_1$, $CB_1 = AB_2$ et la même chose pour les autres côtés. Par suite, les triangles CA_1B_2, AB_1C_2, BC_1A_2 sont égaux; à cause du parallélisme, les triangles $B_1C_1C_2$, $A_2C_2C_1$, $A_1C_1A_2$ sont équivalents et conséquemment les triangles A_1CB_1, B_1AC_1 et C_1BA_1 sont équivalents. Ils sont de plus équivalents aux trois autres triangles équivalents A_2CB_2, B_2AC_2, C_2BA_2. Soit k le rapport des surfaces des triangles C_1A_1B et CAB. On a

$$k = \frac{CA_1}{CB} \times \frac{CB_1}{CA} = \frac{CA_1}{CB} \times \frac{CA_2}{CB}$$

ou, en désignant CA_1 par x et CB par a,

$$k = \frac{x(a-x)}{a^2}.$$

On a donc l'équation du 2e degré

$$x^2 - ax + a^2k = 0,$$

et $$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4a^2k}{4}} = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1-4k}.$$

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut que $k \leq \frac{1}{4}$ ce qui est du reste évident à priori, la valeur $k = \frac{1}{4}$ se produisant quand A_1 est au milieu de BC. Les deux valeurs trouvées donnent les points A_1 et A_2 et les triangles correspondants A_1CB_1 et A_2CB_2 sont équivalents.

On peut supposer les trois points A_1, B_1, C_1 sur les prolongements des trois côtés du triangle ABC; alors k est négatif. (J. N.)

Question 1562.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 88).

On forme toutes les permutations distinctes des lettres du mot parisienne. *On demande le nombre de ces permutations :* 1° *où cinq lettres consécutives forment le mot* perse; 2° *où cinq lettres consécutives sont celles du mot* perse (*abstraction faite de l'ordre*); 3° *où il reste le mot* perse *si on supprime les autres lettres;* 4° *où trois consonnes, et seulement trois, se suivent;* 5° *ou trois voyelles, et seulement trois, se suivent.*

(J. Neuberg)

Solution (partielle) *par* M. Hernandez (Valencia). 1° Désignons le mot *perse* par une seule lettre λ. Nous aurons toutes les permutations où cinq lettres consécutives forment le mot *perse* en formant toutes les permutations distinctes des six lettres a, i, i, n, n, $)$, et en y écrivant perse au lieu de λ. Le nombre cherché est donc

$$\frac{P_6}{P_2^2}.$$

2° Dans les permutations que l'on vient de considérer, remplaçons la lettre λ successivement par chacune des permutations des lettres du mot *perse*; le nombre total des disposition ainsi obtenues sera

$$\frac{P_6}{P_2^2} \times \frac{P_5}{P_2} = \frac{P_5 P_6}{P_2^3}.$$

3° Supposons dix cases placées l'une à côté de l'autre sur une même ligne horizontale. Choisissons-en cinq pour y mettre, de gauche à droite, successivement les lettres *p*, *e*, *r*, *s*, *e* (une lettre par case); le choix peut se faire de C_{10}^{5} manières. Dans les cinq cases restantes, nous mettrons de toutes les manières possibles les autres lettres *a*, *i*, *i*, *n*, *n* (une lettre par case), ce qui peut se faire de $P_5 : P_2^2$ manières. Par conséquent, le nombre de permutations où l'on rencontre le mot perse après suppression des autres lettres a pour expression

$$C_{10}^{5} \times \frac{P_5}{P_2^2} = \frac{P_{10}}{P_5 . P_2^2}.$$

*Solution des n*os 4 *et* 5. Le mot *parisienne* comprend :

cinq consonnes **p, r, s, n, n** et cinq voyelles **a, i, i, e, e.**

Désignons par la lettre γ les permutations de *parisienne* où trois consonnes et seulement trois se suivent.

Les trois consonnes consécutives, abstraction faite de leur ordre, peuvent être :

prn, psn, rsn, prs, pnn, rnn, snn.

Soit μ l'une quelconque des P_3 permutations des lettres *p*, *r*, *n*. Si une permutation γ commence par μ, la 4e lettre doit être l'une des voyelles *a*, *i*, *e*; nous aurons alors à considérer des dispositions représentées par

$$(\mu)a(sneeii), \quad (\mu)e(snaeii), \quad (\mu)i(snaeei),$$

où les parenthèses sont à remplacer par toutes les permutations distinctes des lettres qu'elles renferment ; par conséquent, les permutations γ dont les trois premières lettres sont les consonnes *p*, *r*, *n* dans un ordre quelconque, sont au nombre de

$$P_3 \left(\frac{P_6}{P_2^2} + 2 \frac{P_6}{P_2} \right).$$

Si l'on renverse toutes les permutations que l'on vient de considérer, on obtient les dispositions γ se terminant par les consonnes *p*, *r*, *n* dans un ordre quelconque.

Les autres permutations γ renfermant le groupe μ s'obtiennent en faisant toutes les inversions possibles dans les systèmes suivants de six éléments :

$$[a(\mu)e]sneii, \quad [e(\mu)a]sneii, \quad [a(\mu)i]sniee, \quad [i(\mu)a]sniec,$$
$$[e(\mu)i]snaei, \quad [i(\mu)e]snaei, \quad [i(\mu)i]snaee, \quad [e(\mu)e]snaii,$$

où chaque crochet est considéré comme un seul élément. Leur nombre est donc

$$P_3\left(6\frac{P_6}{P_2}+2P_6\right).$$

On a donc, en tout,

$$2P_3P_6\left(\frac{1}{P_2^2}+\frac{5}{P_2}+1\right) \qquad (1)$$

permutations γ où les consonnes p, r, n se suivent; par analogie, tel est aussi le nombre des permutations γ où les consonnes p, s, n ou bien r, s, n se suivent.

Quant à celles où les consonnes p, r, s se suivent, c'est le nombre précédent divisé par P_2, parce que les deux autres consonnes n, n viennent se substituer à deux consonnes qui étaient distinctes, c'est-à-dire

$$2P_3P_6\left(\frac{1}{P_2^3}+\frac{5}{P_2^2}+\frac{1}{P_2}\right). \qquad (2)$$

Les permutations γ où p, n, n ou r, n, n ou s, n, n sont les consonnes consécutives donnent le même nombre (1), sauf que P_3 est remplacé par $P_3 : P_2$; leur nombre est donc encore le nombre (2).

La réponse définitive est par conséquent

$$6P_3P_6\left(\frac{1}{P_2^2}+\frac{5}{P_2}+1\right)+8P_3P_6\left(\frac{1}{P_2^3}+\frac{5}{P_2^2}+\frac{1}{P_2}\right)$$

$$=\frac{2P_3P_6}{P_2^3}(3P_2^5+19P_2^2+23P_2+4)=135000.$$

Le 5° se résout de même par l'énumération des différents cas possibles.

Existe-t-il un raisonnement plus simple pour trouver les réponses aux n^{os} 4 et 5 de la question 1562?

Question 1567.

(Voir *Mathesis*, p. 112).

On a

$$\cos x = 1-\sqrt{9+3x^2}+\theta\frac{x^6}{180}, \qquad 0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{ch} x = 1-\sqrt{9-3x^2}-\theta'\frac{3x^6}{400}, \qquad 0\leqq x\leqq 1$$

θ et θ' étant compris entre zéro et l'unité.

Solution par M. G. VERHEUGEN. 1° Posons

$$y = 4 - \cos x - \sqrt{9 + 3x^2}, \quad z = 4 - \cos x + \sqrt{9 + 3x^2},$$
$$u = yz = (4 - \cos x)^2 - (9 + 3x^2) = 7 - 8\cos x + \cos^2 x - 3x^2.$$

On trouve aisément les dérivées successives :

$$u' = 8\sin x - \sin 2x - 6x, \qquad u^{IV} = -8\cos x + 8\cos 2x,$$
$$u'' = 8\cos x - 2\cos 2x - 6, \qquad u^{V} = 8\sin x - 16\sin 2x,$$
$$u''' = -8\sin x + 4\sin 2x, \qquad u^{VI} = 8\cos x - 32\cos 2x = F(x).$$

On peut écrire

$$u''' = -8\sin x\,(1 - \cos x),$$

d'où il résulte que u''' est négative pour les valeurs de x comprises entre zéro et $\frac{1}{2}\pi$. Comme u'', u', u sont nulles pour $x = 0$, on en conclut que ces fonctions sont négatives pour x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Comme u^{IV} et u^{V} sont nulles aussi pour $x = 0$, on a

$$u = \frac{x^6}{6!} F(\theta x),$$

θ étant compris entre 0 et 1. Puisque x est négative, il en est de même de $F(x)$. Or,

$$Fx = 8(1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}x) - 32(1 - 2\sin^2 x)$$
$$= -24 + 8(8\sin^2 x - \sin^2 \tfrac{1}{2}x),$$

dont la valeur minima est -24. On a donc

$$u > \frac{x^6}{6!}(-24), \quad \text{ou} \quad -u < \frac{x^6}{30},$$

c'est-à-dire

$$-yz = -y\,[4 - \cos x + \sqrt{9 + 3x^2}] < \frac{x^6}{30}$$

$$-y < \frac{x^6}{30} : [4 - \cos x + \sqrt{9 + 3x^2}] < \frac{x^6}{30} : 6 = \frac{x^6}{180}.$$

Donc enfin, en mettant pour $-y$ sa valeur,

$$\cos x = 4 - \sqrt{9 + 3x^2} + \theta\frac{x^6}{180}, \quad 0 < \theta < 1.$$

2° Posons

$$y = 4 - \operatorname{ch} x - \sqrt{9 - 3x^2}, \quad z = 4 - \operatorname{ch} x + \sqrt{9 - 3x^2},$$
$$u = yz = (4 - \operatorname{ch} x)^2 - (9 - 3x^2) = 7 - 8\operatorname{ch} x + \operatorname{ch}^2 x + 3x^2.$$

On en déduit

$$u' = -8\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{sh}\,2x + 6x, \qquad u^{IV} = -8\,\mathrm{ch}\,x + 2\,\mathrm{ch}\,2x + 6,$$
$$u''' = -8\,\mathrm{sh}\,x + 4\,\mathrm{sh}\,2x, \qquad u^{IV} = -8\,\mathrm{ch}\,x + 8\,\mathrm{ch}\,2x,$$
$$u^{V} = -8\,\mathrm{sh}\,x + 16\,\mathrm{sh}\,2x, \qquad u^{VI} = -8\,\mathrm{ch}\,x + 32\,\mathrm{ch}\,2x,$$
$$u^{VII} = -8\,\mathrm{sh}\,x + 64\,\mathrm{sh}\,2x, \qquad u^{VIII} = -8\,\mathrm{ch}\,x + 128\,\mathrm{ch}\,2x,$$
$$u^{IX} = -8\,\mathrm{sh}\,x + 256\,\mathrm{sh}\,2x, \qquad u^{X} = -8\,\mathrm{ch}\,x + 512\,\mathrm{ch}\,2x.$$

Pour $x = 0$, les dérivées de u de rang impair sont nulles, ainsi que u, u'', u^{IV}. On a d'ailleurs $u''' = -8\,\mathrm{sh}\,x + 8\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x = 8\,\mathrm{sh}\,x\,(\mathrm{ch}\,x - 1)$, positive et croissante pour $x > 0$. Il en est de même, par suite, pour u'', u', u. Les dérivées de rang pair à partir de u^{VI}, pour $x = 0$, ont les valeurs suivantes :

$$u^{VI} = 32 - 8 = 24, \quad u^{VIII} = 128 - 8 = 120; \quad u^{X} = 512 - 8 = 504, \text{ etc.}$$

La partie positive de chacune des différences que nous venons d'écrire est égale à 4 fois la partie positive de la différence précédente. Le rapport d'une dérivée à la précédente u est 5 au début, et va sans cesse en décroissant; il a 4 pour limite. On a donc

$$u = \frac{24x^6}{6!} + \frac{120x^8}{8!} + \frac{504x^{10}}{10!} + \text{etc.}$$
$$< \frac{24x^6}{6!}\left[1 + \frac{5x^2}{7.8} + \frac{(5x^2)^2}{7.8.9.10} + \text{etc.}\right],$$

et, *a fortiori*,

$$u < \frac{x^6}{30}\left[1 + \frac{5x^2}{56} + \left(\frac{5x^2}{56}\right)^2 + \text{etc.}\right] = \frac{x^6}{30}\,\frac{1}{1 - \frac{5x^2}{56}}.$$

Pour fixer les idées, supposons x^2 au plus égal à l'unité, de manière que la valeur la plus grande $1 : \left[1 - \frac{5x^2}{56}\right]$ soit $56 : 51$. Alors nous pourrons écrire

$$u = yz = (4 - \mathrm{ch}\,x)^2 - (9 - 3x^2) < \frac{x^6}{30} \cdot \frac{56}{51} = \frac{28x^6}{765}.$$

Quand $\mathrm{ch}\,x = 4$, on a $3x^2 > 9$, car on sait que u est positif. Si $3x^2$ est < 9, ou $x < \sqrt{3}$, $\mathrm{ch}\,x$ sera inférieur à 4, car x et $\mathrm{ch}\,x$ varient dans le même sens. Il en résulte que

$$z = 4 - \mathrm{ch}\,x + \sqrt{9 - 3x^2},$$

pour ces valeurs de x, est positif, et, par suite,

$$y = 4 - \mathrm{ch}\,x - \sqrt{9 - 3x^2}$$

aussi, puisque $u = yz$ est positif. On a donc

$$4 - \operatorname{ch} x > \sqrt{9 - 3x^2}$$

$$z = 4 - \operatorname{ch} x + \sqrt{9 - 3x^2} > 2\sqrt{9 - 3x^2},$$

et si l'on suppose x tout au plus égal à l'unité

$$z > 2\sqrt{6}.$$

On déduit aisément de cette inégalité et de celle qui est relative à u

$$y < \frac{1}{z}\frac{28x^6}{765} < \frac{28x^6}{2\sqrt{6}.765} = \frac{14x^6}{765\sqrt{6}} < \frac{3x^6}{400},$$

ou, en remplaçant y par sa valeur,

$$4 - \operatorname{ch} x - \sqrt{9 - 3x^2} < \frac{3x^6}{400}.$$

Donc enfin

$$\operatorname{ch} x = 4 - \sqrt{9 - 3x^2} - \theta\frac{3x^6}{400}.$$

Remarques. 1. C'est M. d'Ocagne qui a récemment appelé l'attention sur la formule précédente (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1905, 1er semestre), et nous a suggéré les questions 1538 et 1567. On remplace ordinairement, dit il, la chaînette rapportée à son axe et à la tangente au sommet,

$$y = -a + a\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{a} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{x^4}{a^3} + \text{etc},$$

par la parabole osculatrice en son sommet,

$$y = \frac{x^2}{2a},$$

qui a, avec elle, un contact du troisième ordre. Mais il est plus avantageux de remplacer la chaînette par l'ellipse osculatrice au sommet

$$y = 3a - \sqrt{9a^2 - 3x^2}$$

qui a, avec elle, un contact du cinquième ordre. La parabole osculatrice est extérieure, l'ellipse osculatrice intérieure à la chaînette. Le demi grand axe de l'ellipse dont la direction est celle de l'axe de la chaînette est égal à $3a$, l'autre demi-axe à $a\sqrt{3}$. Par suite, *le triangle ayant pour sommets les extrémités du petit axe de l'ellipse et le sommet de la chaînette est équilatéral.*

II. La formule approchée

$$\cos x = 4 - \sqrt{9 + 3x^2} \qquad (m)$$

permet de résoudre approximativement un triangle ABC, rectangle en A, dont on connaît les angles A, B, C et l'un des côtés a, b, c, au moyen de deux des formules suivantes :

$$b = a \cos B = a\,(4 - \sqrt{9 + 3B^2}),$$
$$c = a \cos C = a\,(4 - \sqrt{9 + 3C^2}),$$
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

On sait qu'inversement la règle de Cusa,

$$B = \frac{3b}{2a + c}, \qquad (n)$$

permet de trouver à peu près le plus petit angle B du triangle rectangle ABC, quand l'on connaît les côtés a, b, c.

Dans les deux cas, on suppose les angles exprimés en fonction du rayon.

La résolution de tous les triangles peut se ramener à celle des triangles rectangles, et celle-ci, comme on le voit, peut se faire très approximativement au moyen des deux formules (m) et (n). (P. M.)

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1290. De l'équation

$$y = \frac{\text{arc sin } x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

déduire l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy - 1 = 0,$$

et conclure de celle-ci le développement de y en série par la formule de Maclaurin. (*Ec. polyt. de Delft*, 1905).

1291. Trouver les points de la courbe

$$4x^2 + y^2 = 4a^2, \quad x^2 + 2az = 2a^2$$

tels que la tangente fasse un angle maximum ou minimum avec l'axe OZ. (*Ec. polyt. de Delft*, 1905).

1292. Montrer que les deux droites

$$x + y = a - b, \qquad bx = ay,$$

ont leur point de rencontre sur la parabole

$$\sqrt{ax}+\sqrt{by}=\sqrt{a^2-b^2}.$$

(E. N. Barisien)

Les coordonnées du point de rencontre

$$x=\frac{a(a-b)}{a+b},\qquad y=\frac{b(a-b)}{a+b},$$

satisfont bien à l'équation de la parabole.

On voit, de plus, que la droite $x+y=a-b$ est tangente à la parabole en ce point. (E. N. Barisien)

1893. Soit un quadrilatère convexe ABCD dans lequel

$$AC+AD=BC+BD.$$

Montrer que les bissectrices intérieures des angles ABD et ACB ont même point de concours que les bissectrices extérieures des angles CAD et DBC. (E. N. Barisien)

Cette question n'est pas nouvelle. C'est la réciproque du théorème sur le quadrilatère circonscrit à un cercle, lorsque le cercle est *exinscrit*.

1894. Soient C et C′ deux cercles tangents entre eux extérieurement en O, S leur centre de similitude externe. Par S on mène une droite quelconque qui rencontre le cercle C en A et A′ et le cercle C′ en B et B′. (A et B sont deux points homologues).

Montrer que les deux angles AOB et A′OB′ sont droits.

(E. N. Barisien)

Menons la tangente commune OT qui passe entre A et B; alors *angle* TOA $=\frac{1}{2}$ ACO $=\frac{1}{2}$ BC′S $=$ BOS $=90°-$ TOB (la figure suppose C′O < CO).

1895. La quartique

$$y^2=x^2(1-x^2)$$

a mêmes sommets et même point double que la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2.$$

Montrer que le rapport des aires de la quartique et de la lemniscate est $\frac{4}{3}$. (E. N. Barisien)

La première aire a pour expression

$$4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-2\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}d(1-x^2)=\frac{4}{3};$$

pour la seconde, en passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$2\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\cos 2\omega.d\omega=1.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1586**. Trouver, entre les côtés $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ d'un quadrilatère lobatchefskien ABCD, la relation nécessaire et suffisante pour qu'il soit *asymptotique*, c'est-à-dire tel que BA soit asymptote de CD, BC de AD. Construire un pareil quadrilatère dont on connait trois côtés? (P. M.)

1587. D'un point quelconque M, on mène à une parabole les trois normales MP_1, MP_2, MP_3 qui rencontrent la courbe une seconde fois en P'_1, P'_2, P'_3. Si les tangentes aux points P_1, P_2, P_3, P'_1, P'_2, P'_3 font avec l'axe de la parabole les angles $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, démontrer les relations

$$\Sigma \cot \alpha' + 2\Sigma \operatorname{tang} \alpha = 0, \quad \Sigma \cot \beta \cot \gamma - \Sigma \cot \beta' \cot \gamma' = 6.$$

(Beard)

×**1588**. Dans tout triangle ABC dont les rayons des cercles tritangents sont r, r_a, r_b, r_c, le rayon du cercle circonscrit est R, on a les relations

$$12Rr - r^2\left(\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}+\frac{r_a}{r_c}+\frac{r_c}{r_a}+\frac{r_b}{r_c}+\frac{r_c}{r_b}\right)$$

$$= (ab + ac + bc) - \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}+\frac{r_a}{r_c}+\frac{r_c}{r_a}+\frac{r_b}{r_c}+\frac{r_c}{r_b} = \frac{4R}{r} - 3.$$

(E. N. Barisien)

1589. Etant donnés quatre rayons a, b, c, d d'un faisceau, trouver une transversale u qui les coupe en des points A, B, C, D tels que $AB = m.CD$, m étant un nombre donné. Cas particulier où c est la bissectrice de l'angle ad et $m = 1$. (Abramescu)

1590. La tangente en un point M d'une courbe plane (C) rencontre l'axe OY en T; la perpendiculaire abaissée de T sur le rayon OM coupe l'axe OX en R. Déterminer la courbe (C) par la condition que la distance OR soit à la sous normale ou à la sous-tangente en M dans un rapport constant. (J. Rose)

Rectification. — Page 110, nous avons oublié de mentionner une bonne solution de la question 1554 par M. Barisien. — Page 194, note, lire (1), VII, p. 129 au lieu de (2), VII, p. 129.

SUR UN THÉORÈME DE CHASLES,

par J. Neuberg.

Dans la question 2995 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (janvier 1906), M. Mathieu (Saïgon) demande une démonstration géométrique du théorème suivant :

Si l'on considère deux positions P_1 *et* P_2 *d'un solide et si par un point quelconque* S *on mène des droites* $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$, ... *égales et parallèles aux droites* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, ... *qui en joignent des points homologues, les extrémités* α, β, γ, ... *de ces parallèles sont situées dans un même plan.*

Nos jeunes lecteurs nous sauront peut être gré de reproduire ici, de cet intéressant théorème, une démonstration fondée sur des considérations cinématiques assez élémentaires pour qu'elle puisse être considérée comme géométrique. Nous la ferons suivre de quelques remarques sur la disposition des points α, β, γ, ... et nous étendrons le théorème de Chasles aux systèmes affins.

1. Pour faire coïncider P_1 avec P_2, il suffit d'amener le triangle $A_1B_1C_1$ sur son homologue $A_2B_2C_2$.

On peut distinguer trois cas :

a. Si les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sont égales et parallèles, une translation rectiligne mesurée par A_1A_2 amène $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$. Dans cette hypothèse, toutes les droites $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$, ... se réduisent à une seule.

b. Si P_1 et P_2 ont un point commun, supposons que ce point soit A_1. Les plans perpendiculaires aux milieux B_3, C_3 des droites B_1B_2, C_1C_2, se coupent généralement suivant une certaine droite A_1X. Les trièdres $A_1XB_1C_1$, $A_1XB_2C_2$ sont égaux comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune; par conséquent, une rotation autour de l'axe A_1X fait coïncider le premier trièdre avec le second et par suite P_1 avec P_2. Un point quelconque D_1 de P_1 décrit alors un arc de cercle D_1D_2 dans un plan perpendiculaire à l'axe A_1X. On en conclut que les droites $S\beta$, $S\gamma$, $S\delta$, ... sont situées dans un même plan perpendiculaire à A_1X.

Les plans perpendiculaires en B_3, C_3 sur B_1B_2, C_1C_2 coïncideraient si B_1C_1 et B_2C_2 étaient symétriques par rapport au plan $A_1B_3C_3$. On prendrait alors pour *axe* l'intersection des plans $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$.

c. Si les triangles égaux $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ont des positions relatives quelconques, imprimons à P_1 une translation rectiligne mesurée par A_1A_2; soient alors B_1', C_1', D_1', ... les nouvelles positions des points B_1, C_1, D_1, ... Les droites A_1A_2, B_1B_1', C_1C_1', D_1D_1', ... sont égales et parallèles. D'après le cas précédent, il existe un axe A_2Y tel qu'une rotation autour de cette droite amène B_1', C_1', D_1', ... en B_2, C_2, D_2, ... Les droites $B_1'B_2$, $C_1'C_2$, $D_1'D_2$, ... sont perpendiculaires à A_2Y. Menons maintenant les droites $S\alpha$, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, ... égales et parallèles aux droites A_1A_2, $B_1'B_2$, $C_1'C_2$, $D_1'D_2$, ... Les droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, ... seront situées dans un même plan perpendiculaire à A_2Y, et comme les vecteurs $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$, $S\delta$, ... sont équipollents aux vecteurs A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2, ..., le théorème est démontré.

8. Soient A_1B_1, A_2B_2 deux droites égales quelconques, et soient M_1, M_2 deux points *homologues* de ces droites, c'est-à-dire tels que $A_1M_1 = A_2M_2$, $B_1M_1 = B_2M_2$. Construisons les parallélogrammes $A_2A_1M_1H$, $B_2B_1M_1G$; nous aurons $A_2H = A_2M_2$, $B_2G = B_2M_2$, d'où l'on conclut que les points H, M_2, G sont en ligne droite et que $HM_2 : M_2G = A_1M_1 : M_1B_1$. Reproduisons la figure $M_1H\,M_2G$ en traçant par un même point S des droites $S\alpha$, $S\beta$, $S\mu$ égales et parallèles à A_1A_2, B_1B_2, M_1M_2; les points α, β, γ seront en ligne droite et $\alpha\mu : \mu\beta = A_1M_1 : M_1B_1$.

Ainsi, *si par un même point* S *on mène des droites équipollentes à celles qui joignent les points homologues de deux droites égales* A_1B_1, A_2B_2, *les extrémités de ces nouvelles droites sont en ligne droite et sont les éléments d'une ponctuelle semblable à celle des points correspondants de* A_1B_1.

Considérons maintenant deux triangles égaux $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ non situés dans un même plan et soient D_1, D_2 deux points homologues de ces triangles. Les droites C_1D_1, C_2D_2 rencontrent respectivement A_1B_1, A_2B_2 en des points homologues M_1, M_2. Menons les droites $S\mu$, $S\delta$ égales et parallèles à M_1M_2, D_1D_2. D'après la proposition précédente, puisque $A_1M_1 = A_2M_2$, $M_1D_1 = M_2D_2$, μ partage $\alpha\beta$ dans le rapport $A_1M_1 : M_1B_1$ et δ partage $\mu\gamma$ dans le rapport $M_1D_1 : D_1C_1$.

Par conséquent, *la droite qui joint deux points homologues* D_1, D_2 *des triangles égaux* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *est équipollente à la droite qui joint* S *au point* δ *qui a, par rapport au triangle* $\alpha\beta\gamma$ *les mêmes coordonnées barycentriques que* D_1 *par rapport au triangle* $A_1B_1C_1$.

3. Soient ensuite E_1, E_2 deux points formant avec les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ deux tétraèdres égaux $E_1A_1B_1C_1$, $E_2A_2B_2C_2$. Menons la droite $S\varepsilon$ équipollente à E_1E_2 et appelons δ le point où elle rencontre le plan $\alpha\beta\gamma$, D_1 et D_2 les points qui, dans les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, ont les mêmes coordonnées barycentriques que δ dans le triangle $\alpha\beta\gamma$. La droite D_1D_2 sera équipollente à $S\delta$ et, par suite, parallèle à E_1E_2. Mais les droites E_1D_1, E_2D_2 sont égales entre elles; elles forment donc avec les parallèles E_1E_2, D_1D_2 un parallélogramme et $E_1E_2 = D_1D_2 = S\delta = S\varepsilon$, ce qui démontre de nouveau le théorème de Chasles dans le cas général. L'hypothèse que les droites E_1D_1, E_2D_2 se rencontrent en un point O rentre dans le cas particulier *b* du § 1; car elle entraîne $OE_1 = OE_2$ et donne un point commun O aux deux systèmes égaux dans lesquels les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ se correspondent, de sorte que les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sont parallèles à un même plan.

4. Il est facile de généraliser les notions qui précèdent. Etant donnés deux triangles quelconques $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ situés ou non dans un même plan, si l'on considère comme homologues deux points D_1, D_2 ayant les mêmes coordonnées barycentriques respectivement par rapport aux triangles $A_1B_1C_1$. $A_2B_2C_2$, on dit que les points A_1, B_1, C_1, D_1 ... et A_2, B_2, C_2, D_2 .... se correspondent dans deux *systèmes affins*.

Les résultats du § 3 peuvent s'étendre à ces systèmes, et l'on a la proposition suivante :

Si par un même point on mène des droites équipollentes à celles qui joignent deux points correspondants de deux systèmes plans affins, les extrémités de ces droites forment un troisième système affin aux deux premiers.

5. Soient maintenant $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ deux tétraèdres quelconques, et appelons E_1, E_2 deux points qui ont les mêmes coordonnées barycentriques respectivement par rapport à ces solides. Les droites A_1E_1, A_2E_2 vont rencontrer les plans $B_1C_1D_1$, $B_2C_2D_2$ en deux points F_1, F_2 qui ont les mêmes coordonnées barycentriques dans les triangles $B_1C_1D_1$, $B_2C_2D_2$, et l'on a $F_1E_1 : E_1A_1 = F_2E_2 : E_2A_2$. On dit encore que les points E_1, E_2 se correspondent dans deux *systèmes affins*.

Cela posé, menons par un même point S des droites $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$, $S\delta$, $S\varepsilon$, $S\varphi$ équipollentes aux droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2, E_1E_2, F_1F_2. Les points F_1, F_2, φ sont des points homologues des systèmes affins dans

lesquels les triangles $B_1C_1D_1$, $B_2C_2D_2$, $\beta\gamma\delta$ sont des éléments correspondants, et les points E_1, E_2, ε divisent les droites A_1F_1, A_2F_2, $\alpha\varphi$ dans un même rapport.

Par conséquent, étant donnés deux systèmes affins, si par un même point on mène des droites équipollentes à celles qui joignent deux points homologues quelconques de ces systèmes, leurs extrémités forment un troisième système affin aux deux premiers.

6. La démonstration analytique de ce théorème est très facile. En effet, rapportons la figure à trois axes de coordonnées menés par S et représentons par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... (x_1', y_1', z_1') . . les coordonnées des points A_1, B_1, ..., A_2, ... Les coordonnées des points E_1, E_2 sont de la forme

$$x = \frac{\Sigma m_1 x_1}{\Sigma m_1}, \quad y = \frac{\Sigma m_1 y_1}{\Sigma m_1}, \quad z = \frac{\Sigma m_1 z_1}{\Sigma m_1},$$

$$x' = \frac{\Sigma m_1 x_1'}{\Sigma m_1}, \quad y' = \frac{\Sigma m_1 y_1'}{\Sigma m_1}, \quad z' = \frac{\Sigma m_1 z_1'}{\Sigma m_1}.$$

Le vecteur $S\alpha$ étant équipollent à A_1A_2, les coordonnées de α sont $x_1' - x_1$, $y_1' - y_1$, $z_1' - z_1$; celles de β, γ, δ ont des valeurs analogues et celles de ε sont

$$\frac{\Sigma m_1 (x_1' - x_1)}{\Sigma m_1}, \quad \frac{\Sigma m_1 (y_1' - y_1)}{\Sigma m_1}, \quad \frac{\Sigma m_1 (z_1' - z_1)}{\Sigma m_1}.$$

La forme de ces dernières expressions montre que ε a les mêmes coordonnées barycentriques par rapport au tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ que E_1 et E_2 par rapport à $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$ ce qui démontre le théorème.

7. Il peut arriver que les points α, β, γ, δ soient dans un même plan; alors ε sera aussi dans ce plan. La condition pour qu'il en soit ainsi, est

$$\begin{vmatrix} x_1' - x_1 & y_1' - y_1 & z_1' - z_1 & 1 \\ x_2' - x_2 & y_2' - y_2 & z_2' - z_2 & 1 \\ x_3' - x_3 & y_3' - y_3 & z_3' - z_3 & 1 \\ x_4' - x_4 & y_4' - y_4 & z_4' - z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans ce cas, *si l'on transporte en* α, β, γ, δ *les masses qui attachées en* A_1, B_1, C_1, D_1 *ou en* A_2, B_2, C_2, D_2 *ont pour centre de gravité* E_1 *ou* E_2, *le centre de gravité sera encore* ε.

Lorsque α, β, γ, δ ne sont dans un même plan, le point ε détermine complètement les points E_1, E_2. Mais lorsqu'ils sont dans un même plan,

les masses qu'il faut attacher en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que ε en soit le centre de gravité peuvent être choisies d'une infinité de manières ; par suite, il existe une infinité de droites E_1E_2 équipollentes au vecteur $S\varepsilon$.

Pour trouver les droites E_1E_2, cherchons, dans les systèmes affins déterminés par les triangles $\beta\gamma\delta$, $B_1C_1D_1$, $B_2C_2D_2$, les homologues A_1' et A_2' de α, E_1' et E_2' de ε, F_1' et F_2' d'un point quelconque φ de la droite $\alpha\varepsilon$; les points A_1', E_1', F_1 seront en ligne droite ainsi que les points A_2', E_2', F_2. Les droites $A_1'A_2'$, $E_1'E_2'$, $F_1'F_2'$ seront respectivement équipollentes aux vecteurs $S\alpha$, $S\varepsilon$, $S\varphi$. Il en résulte d'abord que les droites A_1A_2, $A_1'A_2'$ sont équipollentes et que les droites homologues AA_1', BB_1' des systèmes affins $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ sont égales et parallèles ; par suite, les droites joignant des points homologues de ces droites sont équipollentes à A_1A_2. Si l'on divise les droites homologues A_1F_1, A_2F_2 aux points E_1, E_2 dans le rapport $\alpha\varepsilon : \varepsilon\varphi = A_1'E_1' : E_1'F_1 = A_2'E_2' : E_2'F_2$, la droite E_1E_2 joint deux points homologues des systèmes affins $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$. Or, il est facile de voir que les droites $E_1'E_1$, $E_2'E_2$ sont parallèles aux deux droites parallèles A_1A_1', A_2A_2' et égales entre elles. Par conséquent, les points cherchés E_1, E_2 forment deux ponctuelles égales sur les droites homologues $E_1'E_1$, $E_2'E_2$.

Le cas de deux positions d'un même solide rentre dans le cas particulier de deux systèmes affins que nous venons de considérer.

SUR UN THÉORÈME DE SYLVESTER,

par M. St. Mirea.

1. Considérons les équations

$$F_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0, \tag{1}$$

$$e^{-x}F_n(x) = 0. \tag{2}$$

Il est évident que les racines réelles de l'équation (1), s'il y en a, sont négatives et sont les mêmes que celles de l'équation (2), car le facteur exponentiel e^{-x} ne s'annule pour aucune valeur réelle et finie de x.

Si l'on cherche l'équation dérivée de (2), on trouve

$$-\frac{e^{-x}x^n}{n!} = 0$$

qui a pour racines $x = 0$, $x = \infty$.

Cela posé, on voit aisément que la suite de Rolle de l'équation (2) est

$$-\infty, \qquad 0, \qquad +\infty.$$

On en déduit que l'équation (2), ou bien (1), ne peut avoir plus d'une racine réelle (SYLVESTER, N.A.M., Question 775).

Ce petit artifice(*), — la multiplication de $F_n(x)$ par e^{-x} —, que je crois neuf dans les questions de ce genre, permet de donner immédiatement une généralisation de ce théorème.

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\lambda$, λ nombres entiers positifs, rangés dans l'ordre de grandeur croissante, et soient $a_1, a_2, \dots a_p$, p nombres réels ($p \leqslant \lambda$) quelconques.

L'équation suivante, où $F_n(x)$ désigne la polynome (1),

$$\Phi(x) \equiv a_1 F_{\alpha_1}(x) + a_2 F_{\alpha_2}(x) + \dots + a_i F_{\alpha_i}(x) + \dots + a_p F_{\alpha_\lambda}(x) = 0 \quad (3)$$

ne peut avoir plus de $\alpha_\lambda - \alpha_1 + 2$ racines réelles.

Je partirai de l'équation

$$\Psi(x) \equiv e^{-x}\Phi(x) = 0$$

dont la séparatrice est

$$\Psi'(x) \equiv e^{-x}x^{\alpha_1}\left(a_1 + a_2 x^{\alpha_2-\alpha_1} + \dots + a_i x^{\alpha_i-\alpha_1} + \dots + a_p x^{\alpha_\lambda-\alpha_1}\right) = 0. \quad (4)$$

Les racines réelles de l'équation $\Psi(x) = 0$ sont évidemment séparées par la suite de Rolle de l'équation (4), suite formée par les racines de cette équation et les deux infinis. Cette suite comprenant au plus $\alpha_\lambda - \alpha_1 + 3$ termes, l'équation $\Psi(x) = 0$ et, par suite, l'équation (3) ne peut avoir plus de $\alpha_\lambda - \alpha_1 + 2$ racines réelles.

On peut déduire de là des conséquences intéressantes; par exemple l'équation

$$\frac{x^n}{1.2.3\dots n} + \frac{2.x^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} + \frac{3x^{n-2}}{1.2.3\dots(n-2)!} + \dots = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles; car l'équation séparatrice correspondant aux valeurs $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, est

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0,$$

et ne peut avoir plus d'une racine réelle.

(*) Un artifice semblable, mais non identique, a été employé par Laguerre, dans sa célèbre démonstration du théorème de Descartes (NAM, (2), XIX, 1880).

3. En général, si l'on suppose

$$e^{ax}\tau(x)dx = d(e^{ax}\sigma(x)),$$

on peut quelquefois déduire, de la nature des racines de l'équation $\tau(x) = 0$, quelques indications sur la nature des racines de l'équation $\sigma(x) = 0$; en particulier, pour maintes formes simples de l'expression $\tau(x)$, — tel que le cas étudié dans la présente note —, on peut indiquer le nombre maximum des racines réelles de l'équation $\sigma(x) = 0$.

Comme application, nous énonçons le théorème suivant : *L'équation*

$$a\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\right)$$
$$+b\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{1.2\ldots n}\right)+c=0$$

ne peut avoir plus de trois racines réelles (*Mathesis*, Q. 676, posée par Sylvester; énoncé modifié par M. C.-A. Laisant).

BIBLIOGRAPHIE.

Mathematische Uebungsaufgaben für Primaner von Realanstalten und jüngere Studierende gestellt und zum Teil mit Lösungen versehen von Dr Oskar Gutschke. Leipzig et Berlin, Teubner, 1905 (In-8° cartonné de IV-82 pp.). Prix : 1.20 marc.

Depuis quelques années, d'éminents professeurs allemands parmi lesquels il suffit de citer Felix Klein, réclament la réforme des programmes de mathématiques dans l'enseignement moyen : suppression de certaines parties non indispensables et introduction des éléments de mathématiques supérieures (calcul infinitésimal). Cette réforme, on le sait, n'est plus à faire en France; elle sortira sans doute, chez nous, des délibérations de la commission chargée d'étudier la réorganisation de nos athénées.

M. Gutschke, chargé depuis 1888 de l'enseignement des mathématiques en Prima à l'Oberrealschule de Breslau, ne s'en est pas tenu aux programmes officiels; il a toujours jugé indispensable d'initier ses élèves aux principes du calcul infinitésimal. Il publie aujourd'hui un excellent recueil des questions posées à Breslau aux examens de maturité (avec les solutions) ou résolues en classe ou proposées en devoir (au nombre de 342).

Nous recommandons volontiers le livre de M. Gutschke aux professeurs et aux élèves se préparant aux écoles spéciales ou abordant les études universitaires.

NOTES MATHÉMATIQUES.

21. *Sur l'hypocycloïde de Steiner*, par M. E. WEBER. 1. On sait que les droites de Simson de deux points diamétralement opposés sur la circonférence circonscrite au triangle ABC sont perpendiculaires entre elles et sont des transversales réciproques par rapport à ce triangle.

On peut partir de cette proposition pour trouver l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites de Simson. En effet, les équations de deux transversales réciproques sont (coordonnées normales)

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0, \quad \frac{a^2\alpha}{u} + \frac{b^2\beta}{v} + \frac{c^2\gamma}{w} = 0. \tag{1}$$

Appliquons la condition d'orthogonalité, à savoir

$$\Sigma uu' - \Sigma(uv' + u'v)\cos C = 0;$$

nous aurons pour l'équation tangentielle de l'hypocycloïde triangulaire

$$uvw\Sigma a^2 = \Sigma u(vc^2 + wb^2)\cos A. \tag{2}$$

Si l'on y fait $u = 0$, on voit que les tangentes issues du sommet A sont données par les équations

$$v = 0, \quad w = 0, \quad v\cos C + w\cos B = 0;$$

donc elles coïncident avec les côtés AB, AC et la hauteur AH, résultat connu.

2. On obtient l'équation de la courbe sur laquelle se coupent deux tangentes rectangulaires en éliminant u, v, w entre les trois équations (1) et (2). Or, si l'on élimine u entre les deux équations (1), il vient

$$a^2\alpha^2 = (v\beta + w\gamma)\left(\frac{b^2\beta}{v} + \frac{c^2\gamma}{w}\right),$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2 = \frac{\beta\gamma(b^2w^2 + c^2v^2)}{vw}; \tag{3}$$

d'autre part, on peut mettre l'équation (2) sous la forme

$$\Sigma a^2 = \Sigma\frac{b^2w^2 + c^2v^2}{vw}\cos A. \tag{4}$$

On déduit facilement de (3) et (4) l'équation cherchée :

$$\Sigma a^2 = \Sigma\frac{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2}{\beta\gamma}\cos A. \tag{5}$$

Elle est du 3e degré ; mais nous allons montrer qu'elle se décompose.

En effet, on peut l'écrire ainsi

$$\Sigma a\alpha(a\beta\gamma - a\alpha^2\cos A + a\alpha\beta\cos B + a\alpha\gamma\cos C) = 0,$$

puis remplacer dans les deux derniers termes a cos B par $c - b\cos A$, a cos C par $b - c\cos A$, ce qui donne

$$\Sigma a\alpha[a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta - a\cos A(a\alpha + b\beta + c\gamma)] = 0$$

ou

$$\Sigma a\alpha[\Sigma a\beta\gamma - \Sigma a\alpha^2\cos A] = 0.$$

On trouve ainsi pour le lieu cherché la droite de l'infini $\Sigma a\alpha = 0$ qui est à la fois sa propre transversale réciproque et est perpendiculaire à elle-même, et le cercle des neuf points représenté par l'équation $\Sigma a\beta\gamma - \Sigma a\alpha^2\cos A = 0$.

×**88**. *Formules relatives aux rayons des cercles tritangents.* M. Vercellin a publié dans le *Supplemento al Periadico di Matematica* (Janvier 1906) une trentaine de formules se rapportant aux rayons r, r_a, r_b, r_c des cercles inscrits et exinscrits à un triangle ABC. Quoique la plupart de ces relations soit connues, les jeunes lecteurs de *Mathesis* nous sauront gré de les reproduire ici en partie.

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right),$$

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c), \quad b^2 = (r_b - r)(r_c + r_a), \cdots$$

$$(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4Rr^2,$$

$$S = \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)}{R}},$$

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)}{R}},$$

$$b^2 - c^2 = (r + r_a)(r_b - r_c), \quad \frac{r_a + r}{r_a - r} = \frac{b + c}{a},$$

$$\frac{r_b + r_c}{r_b - r_c} = \frac{a}{b - c}, \quad r_b + r_c = 4R\cos^2\frac{1}{2}A, \quad r_a - r = 4R\sin^2\frac{1}{2}A,$$

$$r_b r_c = bc\cos^2\tfrac{1}{2}A, \quad rr_a = bc\sin^2\tfrac{1}{2}A,$$

$$r_b r_c + rr_a = bc, \quad r_b r_c - rr_a = bc\cos A$$

$$r_a + r = (b + c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A, \quad r_b - r_c = (b - c)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A.$$

$$4(R + r) = \Sigma(b + c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \Sigma a\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} = \Sigma\frac{a^2}{r_a}.$$

M. Vercellin déduit de ces formules la construction d'un triangle dont on donne : 1° $r_b + r_c$, $r_a - r$, h_a; 2° r_b, r_c, R. 3° r_a, r, R; 4° $b - c$, $r_b - r_c$, r.

CONCOURS GÉNÉRAL DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN (1906).

Géométrie analytique.

Soient A, A' *les extrémités du grand axe, et* F, F' *les foyers d'une ellipse donnée* (E). *Par le point* F, *on mène une corde quelconque* MM' *de l'ellipse* (E) *et l'on demande de trouver :*

1° *L'équation générale des hyperboles équilatères* (H) *qui passent par les points fixes* A, A' *et les points variables* M, M';

2° *Les équations des asymptotes des hyperboles* (H);

3° *Le lieu des centres des mêmes hyperboles ;*

4° *Le lieu du pôle de la corde* AA' *par rapport aux hyperboles* (H);

5° *Le lieu des points de contact des tangentes aux mêmes hyperboles perpendiculaires à* AA';

6° *Le lieu des points de contact des tangentes aux hyperboles* (H) *parallèles à* AA'.

Expliquer pourquoi ce lieu peut être imaginaire.

Solution par M. L. Godeaux, élève à l'Athénée Royal d'Ath. Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y=m(x-c)$$

les équations de l'ellipse et d'une corde focale.

1° L'équation générale des hyperboles (H) est

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2-\lambda y(y-mx+mc)=0,$$

sous la condition $a^2-\lambda+b^2=0$; en remplaçant λ par a^2+b^2, puis $(a^2+b^2)m$ par μ, on obtient définitivement

$$f(x,y)\equiv b^2(y^2-x^2)-\mu y(x-c)+a^2b^2=0. \qquad (1)$$

2° Les coefficients angulaires γ des asymptotes sont racines de l'équation

$$b^2(\gamma^2-1)-\mu\gamma=0, \qquad (2)$$

et l'équation d'une asymptote étant $\gamma f'_y+f'_x=0$, l'élimination de γ conduit à l'équation quadratique des deux asymptotes,

$$b^2(f'^2_x+f'^2_y)+\mu f'_x f'_y=0,$$

où $$f'_x\equiv-2b^2x-\mu y, \quad f'_y\equiv 2b^2y-\mu(x-c).$$

3° Le centre de (H) vérifie les équations $f'_x=0$, $f'_y=0$; en élimi-

nant μ on obtient pour le lieu du centre le cercle

$$x^2 + y^2 - cx = 0,$$

décrit sur OF comme diamètre.

4° La polaire du point (α, β) a pour équation $xf'_\alpha + yf'_\beta + f'_\gamma = 0$, où $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ représente l'équation (1) rendue homogène et entière par la substitution de $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$ à x, y; on trouve

$$[2b^2\beta - \mu(\alpha - c)]\,y - [2b^2\alpha + \mu\beta]\,x + \mu c\beta + 2a^2b^2 = 0. \qquad (3)$$

Si α, β sont les coordonnées du pôle de la corde AA', l'équation (3) doit se réduire à $y = 0$, ce qui donne

$$2b^2\alpha + \mu\beta = 0, \qquad c\mu\beta + 2a^2b^2 = 0,$$

et, après l'élimination de μ,

$$c\alpha - a^2 = 0.$$

Par conséquent, le pôle de la corde AA' décrit la directrice de l'ellipse donnée.

5° Si x, y sont les coordonnées d'un point de (H) où la tangente est perpendiculaire à AA', on a $f'_y = 0$. Eliminant μ entre l'équation (1) et la condition $f'_y = 0$, on obtient le cercle principal $x^2 + y^2 = a^2$.

6° L'élimination de μ entre l'équation (1) et la condition $f'_x = 0$ donne le cercle imaginaire

$$y^2 + (x - c)^2 + b^2 = 0.$$

Note. 1° Les hyperboles (H) forment un faisceau dont les points fondamentaux sont déterminés par les équations

$$y^2 - x^2 + a^2 = 0, \quad y(x - c) = 0. \qquad (3)$$

La première de ces équations représente l'hyperbole équilatère H' qui a pour axe transverse le grand axe AA' de l'ellipse proposée; la seconde représente la droite AA' et la perpendiculaire FZ élevée en F sur AA'. Ces deux lieux, H' et le système des droites rectangulaires AA', FZ, sont les coniques du faisceau (1) qui correspondent respectivement à $\mu = 0$ et à $\mu = \infty$. Ils se coupent en deux points réels, A et A', et en deux points imaginaires ($x = c$, $y = \pm b\sqrt{-1}$).

2° Les points A et A' appartiennent toujours à des branches différentes d'une hyperbole (H); car s'ils étaient sur une même branche, celle-ci couperait FZ en un point réel. Or, on sait qu'il n'y a pas de

tangente réelle qui soit parallèle à une corde joignant deux points de deux branches d'hyperbole.

3° Si l'extrémité M de la corde focale de l'ellipse est du même côté de FZ que A, une branche d'hyperbole passe par A et M; l'autre passe par A′ et M′. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 1569.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 56).

On donne dans un plan P *deux droites parallèles* α, β, *et un point* O *dont les distances à* α, β *sont respectivement* a, b; *sur la perpendiculaire menée en* O *au plan* P *on prend une longueur* OS $= h$.

Trouver un point A *sur la droite* α *et un point* B *sur la droite* β, *de telle sorte que l'angle* ASB *soit droit et que le plan* ASB *forme avec le plan* P *un angle donné* φ.

Solution par M. Ferreira. 1° Menons OC perpendiculaire à AB et traçons la droite CS; l'angle OCS sera égal à l'angle donné φ. La distance OC $= h \operatorname{cotg} \varphi$ étant connue, la droite AB est tangente à la circonférence (O. $h \operatorname{cotg} \varphi$). Appelons cette circonférence V.

2° Cherchons l'enveloppe d'une droite AB telle que le segment compris entre α et β soit vue de S sous un angle droit.

Lorsqu'on donne sur α le point A, le point B est déterminé par l'intersection de β avec le plan perpendiculaire en S sur SA. Si le point A parcourt α, la droite SA engendre un faisceau de rayons qui est évidemment projectif avec le faisceau engendré par le plan perpendiculaire en S sur SA ; il résulte de là que les points A et B se correspondent dans deux ponctuelles projectives. Par suite, la droite AB enveloppe une conique U qui touche les supports α, β aux points qui correspondent au point $\alpha\beta$ considéré comme élément de l'autre ponctuelle. Ces points de contact sont évidemment les intersections A_1, B_1, de α, β avec la perpendiculaire menée de O sur α et β.

(*) Nous avons encore à mentionner de bonnes solutions des questions suivantes : 1561, p. 233, par MM. Abramescu et Petrof; 1177, p. 185, par M. Barisien; 1559, p. 194, par M. Abramescu; 1531, p. 135, par MM. Dupont et Rose; 1569, p. 197, par M. Prange; 1533, p. 101, 1527, p. 17 et 1586, p. 103, par M. Janne; 1544, p. 105, par M. Lez; enfin, 1554, p. 110, par M. Barisien.

A_1 et B_1 sont deux sommets de U, et le milieu O_1 de la distance A_1B_1 est le centre de U.

Dans le plan P, décrivons la circonférence (O_1, O_1S) et supposons d'abord qu'elle rencontre α et β aux extrémités de deux diamètres A_2B_2, A_3B_3. Ces diamètres sont des positions de la droite AB et comme ils passent par le centre O_1, le conique U est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites A_2B_2, A_3B_3.

Si la circonférence (O_1, O_1S) ne rencontre pas α et β, U est une ellipse; les points A et B sont toujours situés d'un même côté de l'axe A_1B_1.

Cette circonférence peut toucher α et β; cela suppose O situé sur le segment A_1B_1 et $O_1S = O_1A_1 = O_1B_1$. L'enveloppe U se compose alors des deux points A_1 et B_1; autrement dit, toute droite joignant A_1 à un point quelconque B′ de β ou B_1 à un point quelconque A′ de α est vue de S sous un angle droit. En effet, si M est, par exemple, le milieu de A_1B', les triangles MO_1S, MO_1A_1 sont égaux, d'où $MS = MA_1 = MB'$.

3° Dans les deux premiers cas, la droite cherchée AB est une tangente commune aux deux courbes U, V; celles-ci ayant même axe de symétrie A_1B_1, ont quatre tangentes communes qui sont symétriques deux à deux par rapport à A_1B_1; par suite, la recherche de A_1A ou de B_1B doit conduire à une équation bicarrée et le problème est résoluble par la règle et le compas.

Remarque. L'enveloppe de la droite AB, vue de S sous un angle droit, est encore une conique lorsque les droites α et β se coupent en un point I situé à distance finie. Les points de contact de α et β avec cette conique se déterminent au moyen du plan perpendiculaire en S à la droite SI.

Pour traiter la question par le calcul, prenons pour origine le point O_1, pour axes coordonnés la droite O_1A_1, une parallèle à α et une perpendiculaire à P; les coordonnées des points A, B, S seront $(\lambda, \mu, 0)$, $(-\lambda, \mu', 0)$, $(\lambda', 0, h)$, où μ et μ' sont les inconnues du problème. Les cosinus directeurs des droites SA, SB doivent vérifier la relation $\cos\alpha\cos\alpha' + \cdots = 0$, qui est ici

$$(\lambda' - \lambda)(\lambda' + \lambda) + \mu\mu' + h^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \mu\mu' = k,$$

k étant une constante; ce résultat montre que AB enveloppe une conique proprement dite (à moins que l'on n'ait $k = 0$ ou $\lambda^2 = \lambda'^2 + h^2$). L'équation de la droite AB, dans le plan P, étant

$$x(\mu - \mu') - 2y\lambda + \lambda(\mu' + \mu) = 0,$$

la condition que la distance de cette droite au point O soit égale à $h\cot\varphi$ donne

$$\frac{\lambda'(\mu-\mu')+\lambda(\mu'+\mu)}{\sqrt{\lambda^2+(\mu-\mu')^2}}=h\cot\varphi$$

ou $\mu^2(\lambda'+\lambda)^2+\mu'^2(\lambda'-\lambda)^2-2\mu\mu'(\lambda'^2-\lambda^2)=h^2\cot^2\varphi\,(\lambda^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu')$.

En remplaçant μ' par $k:\mu$ on obtient une équation bicarrée en μ. (J. N.)

Autre solution algébrique par M. Rose qui exprime que l'angle ASB est droit au moyen de la relation $\overline{AB}^2=\overline{SA}^2+\overline{SB}^2$.

Question 1565.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 88).

D'un point M *quelconque d'une parabole on abaisse les deux normales à la courbe, dont les pieds sont* P *et* Q.

Trouver : 1° *l'enveloppe de la droite qui joint les centres de courbure relatifs à* P *et* Q.

2° *Le lieu du point de rencontre de cette droite a) avec* PQ ; *b) avec la tangente en* M. (E. N. Barisien).

Solution par J. Rose : 1° Soient (x', y'), (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des points M, P, Q. Les ordonnées y', y_1, y_2 sont racines de l'équation

$$y^3+2p(p-x')y-2p^2y'=0;$$

par conséquent,

$$y_1+y_2=-y',\quad y_1y_2=2p^2. \tag{1}$$

Les centres de courbure P', Q' relatifs à P et Q ayant pour coordonnées

$$3x_1+p,\quad -\frac{y_1^3}{p^2}\ \text{ et }\ 3x_2+p,\quad -\frac{y_2^3}{p^2},$$

l'équation de la droite P'Q' est

$$\begin{vmatrix} x & p^2y & 1 \\ 3x_1+p & -y_1^3 & 1 \\ 3x_2+p & -y_2^3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Si l'on y remplace x_1, x_2 par $(y_1^2 : 2p)$, $(y_2^2 : 2p)$ on trouve d'abord

$$3p^2y(y_1+y_2)-3y_1^2y_2^2+2p(x-p)(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)=0;$$

ensuite, eu égard aux relations (1),

$$2(x-p)(y'^2-2p^2)-3p(yy'+4p^2)=0.$$

Cette équation étant du second degré par rapport au paramètre variable y', il suffit d'égaler à zéro son discriminant pour obtenir l'équation de l'enveloppe de la droite P'Q'; on trouve

$$9y^2 + 32(x - p)(x + 2p) = 0.$$

2° *a*. La droite PQ a pour équation

$$yy' + 2p(x + p) = 0. \qquad (3)$$

Pour avoir le lieu du point d'intersection des droites PQ, P'Q'. il suffit d'éliminer y' entre les équations (2) et (3); il vient

$$(x - p)[y^2 + 4(x + p)^2] = 0 \qquad (4)$$

Le lieu proprement dit est la droite $x - p = 0$, symétrique de la directrice de la parabole par rapport au sommet.

2° *b*. L'équation de la tangente en M étant

$$yy' = p(x + x'), \text{ ou } 2(yy' - px) - y'^2 = 0 \qquad (5)$$

le lieu du point où cette droite rencontre la droite P'Q' est représenté par le résultat de l'élimination de y' entre les égalités (2) et (5).

La même question a été résolue par MM Abramescu, Lez et Prange qui trouvent pour le dernier lieu

$$y^2(4x - 7p)(7x + 8p) = 8(x^2 + 2p^2)^2$$

équation d'une quartique dont deux asymptotes sont $4x - 7p = 0$, $7x + 8p = 0$ et dont deux autres asymptotes ont pour coefficient angulaires $\pm\sqrt{\frac{8}{7}}$.

Question 1572.

(Voir *Mathesis*, (3); VI, p. 144).

Soient M *et* M' *deux points variables d'une ellipse, qui sont les extrémités de deux diamètres conjugués.* 1° *L'enveloppe de l'hyperbole d'Apollonius relative au point* M *est une Kreuzcurve;* 2° *Le lieu des points de rencontre des hyperboles d'Apollonius relatives à* M *et* M' *est une Kreuzcurve;* 3° *la ligne des centres de ces deux hyperboles est tangente à une ellipse fixe* (Enoncé rectifié). (E. N. Barisien)

Solution par M. H. Lez. Si les coordonnées de M sont $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, celles de M' seront $x = -a\sin\varphi$, $y = b\cos\varphi$.

Par suite, les hyperboles d'Apollonius, par rapport aux points M et M' auront pour équations

$$a^2y\cos\varphi - b^2x\sin\varphi - c^2xy = 0, \qquad (1)$$

$$a^2y\sin\varphi + b^2x\cos\varphi + c^2xy = 0. \qquad (2)$$

1° Entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à φ,

$$a^2y \sin \varphi + b^2x \cos \varphi = 0 \qquad (3)$$

éliminant la variable φ, on aura l'enveloppe de l'hyperbole (1). Or, de (1) et (3) on tire

$$\sin \varphi = -\frac{c^2b^2x^2y}{a^6y^2 + b^6x^2}, \quad \cos \varphi = -\frac{c^2a^2xy^2}{a^6y^2 + b^6x^2};$$

l'enveloppe a donc pour équation

$$c^4b^6x^4y^2 + c^4a^6x^2y^4 = (a^6y^2 + b^6x^2)^2,$$

ou

$$\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = c^4. \qquad (4)$$

Cette courbe est une Kreuzcurve.

2° Eliminant encore φ entre les équations (1) et (2), on aura le lieu de leurs points communs. Or, de ces équations, on tire

$$\sin \varphi = -\frac{c^2xy(a^2y + b^2x)}{a^6y^2 + b^6x^2}, \quad \cos \varphi = \frac{c^2xy(a^2y - b^2x)}{a^6y^2 + b^6x^2};$$

alors, le lieu cherché a pour équation

$$c^4x^2y^2[(a^2y + b^2x)^2 + (a^2y - b^2x)^2] = (a^6y^2 + b^6x^2),$$

ou

$$2c^4x^2y^2 = a^6y^2 + b^6x^2, \qquad (5)$$

ce qui représente une nouvelle Kreuzcurve.

3° Enfin, les centres des hyperboles équilatères (1) et (2) ont pour coordonnées

$$x = \frac{a^2}{c^2}\cos \varphi, \quad y = -\frac{b^2}{c^2}\sin \varphi,$$

$$x = -\frac{a^2}{c^2}\sin \varphi, \quad y = -\frac{b^2}{c^2}\cos \varphi;$$

la droite qui les joint a pour équation

$$c^2a^2(\sin \varphi + \cos \varphi)y + c^2b^2(\sin \varphi - \cos \varphi)x + a^2b^2 = 0. \qquad (6)$$

Eliminant toujours φ entre l'équation (6) et sa dérivée

$$b^2(\sin \varphi + \cos \varphi)x - a^2(\sin \varphi - \cos \varphi)y = 0,$$

on aura l'enveloppe de la droite (6).

De ces équations, on tire :

$$\cos \varphi = -\frac{c^2(b^2x - a^2y)}{a^2b^2}, \quad \sin \varphi = -\frac{c^2(b^2x + a^2y)}{a^2b^2}.$$

Le lieu cherché a donc pour équation

$$a^6b^6 = 2c^4(b^6x^2 + a^6y^2),$$

c'est donc une ellipse concentrique à l'ellipse donnée.

La même question a été résolue par MM. Rose, Ferreira, Abramescu et van Dinter.

La trajectoire orthogonale de la droite joignant les centres des deux hyperboles d'Apollonius a pour équation différentielle

$$a^6dx^2 + b^6dy^2 = 2c^2(xdx + y\,ly)^2. \qquad \text{(Abramescu)}$$

×Question 1576.

(Voir *Mathesis* (3), VI, p. 168).

Deux cercles O, O′ *se coupent aux points* A *et* B. *D'un point* M *de la corde commune* AB *on mène les tangentes* MC, MC′. *Connaissant la distance* OO′ = D *des centres, les rayons* R *et* R′ *et l'angle* CMC′ = α, *calculer les longueurs* AM, BM, MC, CC′.

Solution par M. Abramescu. Soient E le point de rencontre de OO′ avec AB, F celui des rayons CO et C′O′. Posons CM = X ; nous aurons

$$X^2 = MA\ MB = (ME - AE)(ME + AE)$$

d'où

$$\overline{ME}^2 - X^2 = \overline{AE}^2. \qquad (1)$$

Des triangles égaux CFM, C′FM, on déduit

$$OF = CF - R = X\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - R, \quad O'F = X\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - R'.$$

Portons ces valeurs dans l'égalité

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{O'F}^2 - 2OF.O'F\cos OFO' ;$$

il vient

$$D^2 = \left(X\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - R\right)^2 + \left(X\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - R'\right)^2 + 2\left(X\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - R\right)\left(X\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - R'\right)\cos\alpha,$$

ou

$$4X^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2X(R + R')\sin\alpha + R^2 + R'^2 + 2RR'\cos\alpha - D^2 = 0.$$

On en conclut, après quelques réductions faciles

$$X = \frac{(R + R')\cos\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{D^2 - (R - R')^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Comme on a D > R — R′, le problème est toujours possible.

CM étant connu, on calcule CC′, MA, MB au moyen des relations :

$$CC' = 2CM \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \overline{ME}^2 = X^2 + \overline{AE}^2,$$

$$MA = ME - AE, \quad MB = ME + EB;$$

AE est la hauteur du triangle OAO′ dont les trois côtés sont donnés.

M. Majorin (Malonne) a résolu la même question en remplaçant le triangle OO′F par son symétrique OO′M′ par rapport à OO′, M′ est le point d'intersection des rayons OG, O′G′ menés aux seconds points d'intersection des circonférences données avec la droite CC′.

Du point M, on peut mener deux tangentes MC, MK au cercle O, et deux tangentes MC′, MK′ au cercle O′. M. Abramescu a considéré l'angle des tangentes à l'intérieur duquel sont situés les deux cercles; la mise en équation est donc incomplète. (J. N.)

Question 1578.

(Voir *Mathesis*, (3); VI, p. 168).

La normale en un point M *d'une ellipse de centre* O *rencontre les axes en* N *et* N′. *Soient* MP, MP′ *les deux tangentes menées de* M *à la circonférence de diamètre* NN′. *Démontrer :* 1° *que* MP *est égal au demi-diamètre conjugué avec* OM; 2° *que les points* P, P′ *se trouvent sur les diagonales du rectangle des axes.* (Beard)

Solution par M. E. N. Barisien. Si φ est l'angle d'anomalie excentrique en M, on a

$$ON = \frac{c^2}{a}\cos\varphi, \quad ON' = -\frac{c^2}{b}\sin\varphi.$$

L'équation du cercle de diamètre NN′ est donc

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{a}x\cos\varphi + \frac{c^2}{b}y\sin\varphi = 0. \tag{1}$$

1° La puissance de M par rapport à ce cercle est

$$\overline{MP}^2 = \overline{MP'}^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - c^2\cos^2\varphi + c^2\sin\varphi$$
$$= a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi;$$

elle est donc égale au carré du demi-diamètre conjugué à OM.

2° La polaire de M par rapport au cercle (1) a pour équation

$$\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = \frac{c^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi. \tag{2}$$

En formant une combinaison homogène de (1) et (2), du second degré

en x et y, on a l'équation qui donne à la fois les deux droites OP, OP', c'est-à-dire

$$\frac{c^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi.(x^2+y^2) - c^2\left(\frac{x}{a}\cos\varphi - \frac{y}{b}\sin\varphi\right)\left(\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi\right) = 0$$

d'où $$\frac{x^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}{a^2} - \frac{y^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}{b^2} = 0,$$

ou $$b^2x^2 - a^2y^2 = 0, \quad y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Les droites OP et OP' sont donc bien les diagonales du rectangle des axes.

Remarques. 1° *On a la relation*

$$\overline{OP}^2 + \overline{OP'}^2 = \frac{2c^4}{a^2+b^2}.$$

2° *La droite* PP' *rencontre la normale* MNN' *au point de Frégier* φ *relatif à* M.

Cette propriété, qui paraît nouvelle, peut se déduire de ce que OM et Oφ sont symétriques par rapport à OA, de manière que (MφNN') est un quaterne harmonique.

3° *On a entre les coordonnées des points* P *et* P', *la relation*

$$x_p.y_p - x_{p'}.y_{p'} = \frac{2abc^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

4° La tangente à l'ellipse en M rencontre les axes en T et T'.

La puissance du point M *par rapport à la circonférence de diamètre* TT' *est égale à moins le carré du demi-diamètre conjugué de* OM (théorème connu).

5° *La polaire de* M *par rapport à cette circonférence rencontre la tangente* TT' *sur la quartique*

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = a^2b^2(b^2x^2 + a^2y^2).$$

6° *L'enveloppe de la polaire du point* M *par rapport au cercle de diamètre* NN' *est une courbe unicursale du* 6° *degré ayant pour aire*

$$U = \frac{3\pi abc^4}{2(a^2+b^2)^2}.$$

7° *Le lieu de la projection du centre* O *sur cette polaire est une courbe du* 6° *degré ayant pour aire*

$$U = \frac{\pi c^4[(a^2+b^2)(a+b)^2 - 4a^2b^2]}{2(a+b)^2(a^2+b^2)^2}.$$

8° *Le lieu de la projection du centre* O *sur la polaire de* M *par rapport au cercle de diamètre* TT′ *est la courbe*

$$(x^2+y^2)^2(b^2x^2-a^2y^2)^2=(a^2+b^2)^2x^2y^2(b^2x^2+a^2y^2).$$

9° *Le cercle de diamètre* TT′ *enveloppe la courbe du* 12° *degré*

$$(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}=(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}.$$

10° *Le cercle de diamètre* NN′ *enveloppe la quartique*

$$(x^2+y^2)^2=c^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

qui est la podaire du centre de l'ellipse dont les sommets sont les points de rebroussement de la développée de l'ellipse donnée.

11° *La droite qui joint les centres des cercles de diamètres* TT′ *et* NN′ *est tangente à l'ellipse*

$$a^2x^2+b^2y^2=\frac{c^4}{4}.$$

12° *Le lieu du second point de rencontre (autre que* O*) des cercles de diamètres* TT′ *et* NN′ *est la quartique du* 10°.

13° *Soient t le quatrième sommet du rectangle* TOT′, *n le quatrième sommet du rectangle* NON′. *La droite tn passe par le second point de rencontre* R *des cercles de diamètres* TT′ *et* NN′, *et est perpendiculaire à* OR.

14° Les droites TN′ et T′N se rencontrent en R. Chacune d'elles enveloppe une courbe unicursale du 8° degré, et le lieu du milieu de TN′ ou T′N est une quartique.

15° Le lieu du centre de similitude externe des cercles (TT′), (NN′) est la quartique

$$4(a^2x^2+b^2y^2-c^2xy)^2=c^4[(a^2+b^2)(x^2+y^2)-2c^2xy];$$

le lieu du centre de similitude interne est la quartique

$$4(a^2x^2+b^2y^2+c^2xy)^2=c^4[(a^2+b^2)(x^2+y^2)+2c^2xy].$$

Ces deux quartiques seront des courbes fermées si

$$a>b>a(\sqrt{2}-1).$$

De bonnes solutions de la question 1578 nous ont été adressées par MM. Majorin (Malonne), Rose, Abramescu, Lez, Pranck et Dupont.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1296. On considère deux cercles O, O′ qui se touchent extérieurement en A. Trouver le rayon d'un cercle O″ qui touche les deux cercles O, O′ et leur tangente commune extérieure t.

Soient D, D′ les points de contact de t avec les cercles donnés, et B, B′, C les points de contact du cercle O″ avec les cercles O, O′ et la droite t. Désignons par R, R′ ρ, les rayons. Si le cercle O″ est inscrit dans le triangle curviligne ADD′, on a

$$DD' = DC + CD', \quad DD' = 2\sqrt{RR'}, \quad DC = 2\sqrt{R\rho}, \quad CD' = 2\sqrt{R'\rho};$$

par conséquent,

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}.$$

Si $R < R'$, il existe un cercle O″ qui touche t sur le prolongement de D′D et les cercles O, O′ extérieurement; le rayon ρ′ de ce cercle est donné par

$$\frac{1}{\sqrt{\rho'}} = \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{1}{\sqrt{R'}},$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{\sqrt{\rho'}}\right).$$

(E. N. Barisien)

1297. Le centre O d'une ellipse variable parcourt une droite sur laquelle on a marqué deux points fixes A, B; les axes Ox, Oy se déplacent parallèlement à eux-mêmes et ont respectivement pour longueurs 2OA, 2OB. Démontrer que cette ellipse passe par un point fixe. (A. Gob)

Menons Ay′ parallèle à Oy, Bx′ parallèle à Ox; soit M l'intersection de ces parallèles. Lorsque O est en A ou en B, l'ellipse se réduit à un segment de longueur 2AB et dirigé suivant Ay′ ou Bx′; donc le point fixe dont il est question, est nécessairement le point M. La vérification de la proposition est maintenant facile, les coordonnées de M par rapport Ox, Oy étant égales en valeur absolue à $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$, où φ désigne l'angle BOx.

1298. Dans un triangle ABC, on désigne par R, r, r' les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit et du cercle exinscrit qui touche intérieurement le côté BC.

1° La condition $R = r' - r$ entraîne $A = 60°$;

2° Si $R = \frac{1}{2}(r' + r)$, la droite OI est parallèle à BC;

3° L'égalité $R = \sqrt{rr'}$ exige que $A = 90°$, $AB = AC$;

4° On a toujours $R >$ ou $= \dfrac{(r' + r)^2}{4(r' - r)}$.

(*Journal de Vuibert*, 15 avril 1906)

On a $R = \frac{a}{2 \sin A}$, $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$, $r' = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$.

1° La condition $R = r' - r$ devient $\sin^2 \frac{1}{2} A = 1$.

2° La condition $R = \frac{1}{2}(r' + r)$ se ramène à

$$R = r + \frac{r' - r}{2} = r + \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = r + R \sin A \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$= r + 2R \sin^2 \frac{A}{2} = r + R (1 - \cos A),$$

d'où $r = R \cos A$; or, $R \cos A$ est la distance de O à BC.

3° La condition $R = \sqrt{rr'}$ s'écrit

$$R^2 = rr' = p (p-a) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = (p-b)(p-c),$$

d'où l'on déduit

$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{a}{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}.$$

En exprimant que $\sin^2 A < \text{ou} = 1$ on obtient $(b-c)^2 < \text{ou} = 0$; donc l'hypothèse $b = c$ est seule admissible, ...

4° La relation proposée se ramène à

$$a^2 > \text{ou} = (2p-a)^2 \sin^2 \frac{A}{2}, \quad \text{ou} \quad \sin \frac{A}{2} < \text{ou} = \frac{a}{b+c}.$$

Remplaçons la dernière fraction par son égale $\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$, etc.

1299. Construire les projections d'un tétraèdre régulier ABCD sachant que le sommet A est placé en un point donné de la ligne de terre, que la base BCD est située dans un plan donné par ses traces et que le côté BC est horizontal.

Le centre E de la face BCD est la projection de A sur le plan donné; la distance AE, hauteur du tétraèdre, fait connaître la grandeur de l'arête, etc.

1300. Vérifier l'identité

$$(a+b+c)^2 (ab+c^2)(ac+b^2) + (a+b+c)(bc+a^2)(b^2+c^2+2abc) + bc(bc-a^2)^2 = (b^2+c^2+bc)^2 (a+b)(a+c).$$

(E. N. Barisien)

1301. On a

$$\sqrt{a + 2m\sqrt{a-m^2}} + \sqrt{a - 2m\sqrt{a-m^2}} = 2m \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{a-m^2}$$

suivant que l'on a

$$2m^2 > a > m^2 \quad \text{ou} \quad a > 2m^2,$$

m étant supposé positif.

1302. Démontrer que

$$\frac{\sqrt[4]{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c})}+\frac{\sqrt[4]{b}}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}+\frac{\sqrt[4]{c}}{(\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{c}-\sqrt{b})}$$
$$=\frac{-1}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c})(\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{a})}.$$

On retrouve une identité bien connue en remplaçant $\sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{b}, \sqrt[4]{c}$ par α, β, γ et $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ par $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

1303. Démontrer l'identité

$$\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{cotg}^6 x+6(\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{cotg}^4 x)+15(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x)+20$$
$$=\sec^6 x+\operatorname{cosec}^6 x+3(\sec^4 x+\operatorname{cosec}^4 x)+6(\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x).$$

(*Gazeta Mathematica*, 1906)

Les deux membres ont pour valeur commune $1 : \cos^6 x \sin^6 x$.

1304. Soient u', u'' les deux racines de l'équation en u

$$(\sin x+\cos x)u^2+(\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)u+\sec x+\operatorname{cosec} x=0.$$

Pour quelles valeurs de l'arc x, ces racines sont-elles réelles? pour quelles valeurs sont-elles toutes deux positives?

Trouver les valeurs de x comprises entre 0° et 360° pour lesquelles $u'^2+u''^2=40$. (*Gazeta Mathematica*, mai 1906)

1305. On considère un cercle de centre O et un point A de son plan. Soit M un point variable de la circonférence O. Les deux bissectrices de l'angle MOA rencontrent MA en P et Q. Le lieu de chacun des points P et Q est un cercle. (E. N. Barisien)

En effet, les rapports AP : AM, AQ : AM sont constants.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1501. Un triangle isoscèle variable ABC a sa base BC fixe. Montrer que : 1° le lieu des points de contact des cercles tritangents à ABC avec le côté AB se compose d'un cercle et d'une conchoïde de Nicomède; 2° le lieu des pieds des bissectrices situés sur AB est une hyperbole.

(E. N. Barisien)

1502. Calculer à moins de $(1 : 10^7)$ près la somme de la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\cdots$$

dont les termes sont les inverses des nombres de Fibonacci. (Ots)

×**1593.** I étant le centre du cercle inscrit au triangle ABC, on décrit des sommets A, B, C comme centres trois circonférences passant par I; la première coupera AB en A_c et AC en A_b; la seconde, BC en B_a et BA en B_c; la troisième, CA en C_b et CB en C_a. Les cordes A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b en se coupant deux à deux déterminent un triangle $A_1B_1C_1$. Cela posé :

1° Les droites IA_1, IB_1, IC_1 sont respectivement perpendiculaires sur BC, CA, AB.

2° I est le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$.

3° $A_bB_1 = C_1A_c$, $B_aA_1 = C_1B_c$, $C_aA_1 = B_1C_a$.

4° Le triangle $A_1B_1C_1$ est semblable à chacun des triangles $A_1C_aB_a$, $C_bB_1A_b$, $B_cA_cC_1$ et égal à leur somme.

Des propriétés analogues ont lieu pour les cercles exinscrits.

(VERKAART)

1594. Une droite AB de longueur constante glisse sur une droite donnée m. Par ses extrémités A, B et par un point donné C, on trace une parabole (P) dont la directrice est parallèle à m. Trouver les lieux du sommet, du foyer et du pied de la directrice de cette parabole.

1595. Chercher les courbes où les droites TN', T'N ont une direction constante, TT' et NN' étant la tangente et la normale coupant respectivement les axes de coordonnées supposés rectangulaires, respectivement en T et T', N et N'. (G. VERHEUGEN)

Même problème en supposant entre $OT = t$ et $ON' = n$, la relation $at + bn = c$. (J. N.)

Rectification. Page 183, ligne 7 en remontant, lire :

$$\overline{PQ}^2 = -\Sigma(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)\frac{a_{12}^2}{h_1h_2}.$$

Page 183, dernière ligne, lire $-(\rho_1 - \rho_2)^2\frac{a_{34}^2}{h_3h_4}$.

Page 184, ligne 7, lire $r = OO_1 = \frac{1}{2}A_1O_1$, au lieu de $r = IH = \frac{1}{2}A_1H$. Ligne 13, remplacer la lettre H par O_1. Ligne 15, lire $\frac{a}{10}$, au lieu de $\frac{10}{a}$.

SUR UN SOI-DISANT THÉORÈME CHINOIS,

par T. Hayashi,

professeur de mathématiques à l'Ecole normale supérieure de Tōkyō.

Sous la dénomination *Un théorème chinois de géométrie, Mathesis*, (3), V, pp. 268-269, 1905, a reproduit, d'après un article de l'*Archiv de Grunert*, (3) IX, pp. 308-310, avec un léger changement de la démonstration trigonométrique, la proposition suivante qui avait été directement communiquée à M. Gutzmer par M. Y. Mikami :

Etant donné un polygone inscrit à un cercle, la somme des rayons des cercles inscrits dans les différents triangles qu'on obtient en menant les diagonales partant d'un même sommet, est la même quel que soit ce sommet.

Ce théorème a été repris ensuite par M. Greenstreet dans la *Mathematical Gazette*, vol. III, pp. 269-270, 1906.

On voit que ce théorème assez curieux a attiré l'attention de plusieurs personnes.

Cependant, son origine chinoise est douteuse, car M. Mikami dit que le théorème a été *proposé* par un certain mathématicien chinois à l'un de ses amis.

Ainsi que M. Mikami le fait remarquer, le théorème général s'établit aisément par induction lorsqu'il est démontré pour le quadrilatère inscrit.

Mais ce cas particulier du quadrilatère se rencontre dans un des ouvrages mathématiques japonais, *Zoku Shimpeki-Sampō*, publié par Kagen Fujita en 1806. Ce livre fait suite au *Shimpeki-Sampō*, publié en 1789. Ce titre signifie mathématiques suspendues aux temples de Shintō(*). C'était une coutume à cette époque de suspendre aux murs des temples des tablettes sur lesquelles se trouvaient un problème de mathématiques et sa solution.

Aujourd'hui encore on trouve souvent des tablettes de ce genre dans les chapelles ou temples du Japon. Cette coutume peut provenir de deux causes : L'une d'elles était que l'on pensait être parvenu à résoudre des problèmes aussi difficiles grâce à l'assistance des Dieux, et, par conséquent, qu'on devait les remercier de cette façon; l'autre

(*) Le *Shintoïsme* est une des religions du Japon.

cause était que les auteurs pouvaient satisfaire leur vanité en montrant au public leurs connaissances en mathématiques. Les deux livres mentionnés ci-dessus étaient des collections de tels problèmes.

Ces ouvrages étaient fort employés par les mathématiciens appartenant à l'ancienne *Ecole de Seki*, école qui est bien connue en Europe des historiens des mathématiques.

Le théorème qui nous occupe, figurait sur une tablette qui a été suspendue dans un temple de Shintō de la province de Uzen, par Ryōkwan Maruyama, un disciple de Ryōgen Maruyama en 1800. Ryōgen Maruyama était l'un des meilleurs élèves de Sadasuke Fujita, père du Kagen Fujita mentionné ci dessus, dont le nom a fixé l'attention des personnes s'intéressant à l'histoire des mathématiques au Japon.

Il est certain que ce théorème a été démontré par Ryōkwan Maruyama au moyen de la méthode particulière aux mathématiques japonaises, mais la démonstration ne nous est pas parvenue.

Après avoir vu l'énoncé du théorème dans le Zoku-Shimpeki-Sampō, M. K. Nagasawa l'a démontré par une voie purement géométrique et l'a communiqué à M. Chou-ta, mathématicien chinois, qui en a donné deux démonstrations, l'une par la trigonométrie, l'autre par la géométrie seule. M. Chou-ta a ensuite étendu le théorème au cas d'un polygone.

M. Mikami l'ayant démontré par la trigonométrie, je vais en donner cinq démonstrations purement géométriques trouvées par MM. Nagasawa, Chou, Nozaki, Sawayama et par deux de mes élèves.

1° *Démonstration de M. Nagasawa.* Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. Appelons r_1, r_2, r_3, r_4 les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABC, BCD, CDA, DAB, et a, b, c, d, e, f les perpendiculaires abaissées de O sur AB, BC, CD, DA, AC, BD. Alors, d'après un théorème bien connu (Rouché et de Combrousse, *Traité de Géométrie*, 7° édition, 1° partie, p. 383),

$$R + r_1 = a + b + e, \quad R + r_3 = c + d - e;$$

d'où

$$2R + r_1 + r_3 = a + b + c + d.$$

Par analogie

$$2R + r_2 + r_4 = a + b + c + d;$$

donc

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4.$$

2° *Démonstration de M. Sawayama.* Abaissons de O les perpendiculaires sur AB, BC, CD, DA, AC, BD et appelons μ_1, μ_2, ... μ_6 les portions de ces perpendiculaires comprises respectivement entre ces droites et la circonférence (Le lecteur est prié de faire la figure). Alors, d'après un théorème connu (Rouché et de Comberousse, p. 383),

$$2R - r_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_5, \quad 2R - r_3 = \mu_3 + \mu_4 + (2R - \mu_5);$$

d'où $$2R - r_1 - r_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4.$$

Par analogie,

$$2R - r_2 - r_4 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4;$$

donc $$r_1 + r_3 = r_2 + r_4.$$

Cette méthode paraît être plus élégante que la première et que celles qui vont suivre, parce qu'elle est entièrement applicable au cas général d'un polygone.

3° *Méthode de Nozaki.* Soient I_1, I_2, I_3, I_4 les centres des cercles inscrits aux triangles ABC, BCD, CDA, DAB. Alors le quadrilatère $I_1I_2I_3I_4$ est un rectangle (Catalan, *Théorèmes et Problèmes de géométrie élémentaire*, Livre II, théorème 26).

Si S est le point d'intersection des diagonales de ce rectangle, on a

$$\overline{OI_1}^2 + \overline{OI_3}^2 = 2\overline{OS}^2 + \overline{2I_1S}^2 = \overline{2OS}^2 + \overline{2I_4S}^2 = \overline{OI_2}^2 + \overline{OI_4}^2.$$

Mais, d'après un théorème connu (Catalan, Livre III, théorème 76),

$$\overline{OI_1}^2 = R^2 - 2Rr_1, \quad \overline{OI_2}^2 = R^2 - 2Rr_2, \text{ etc.}$$

On en conclut $$r_1 + r_3 = r_2 + r_4.$$

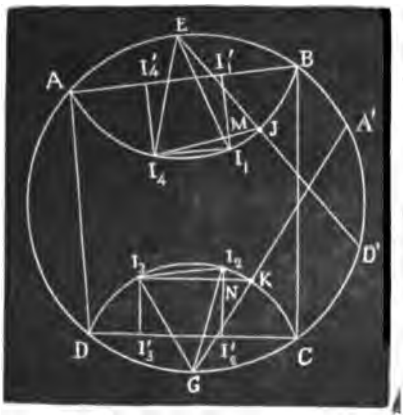
4° *Démonstration de MM. Matsuo et Ômori,* mes élèves. Désignons par V, W les points d'intersection des droites AC et I_1I_3 et BD et I_2I_4. Alors, à cause des relations

$$\text{angle } I_3AV = I_2BW, \quad I_4I_3V = I_1I_2W;$$
$$\text{angle } AI_3I_4 = ADE = BCE = BI_2I_1,$$

les triangles AI_3V et BI_2W sont semblables. Il en résulte que l'angle de AC avec I_1I_3 est égal à celui de BD avec I_2I_4. Par conséquent, puisque $I_1I_3 = I_2I_4$, la projection orthogonale de I_1I_3 sur une perpendiculaire quelconque à AC est égale à la projection de I_2I_4 sur une perpendiculaire à BD; or, ces projections sont précisément égales l'une à $r_1 + r_3$, l'autre à $r_2 + r_4$.

5° *Démonstration de M. Chou.* Projetons I_1, I_4 en I'_1, I'_4 sur AB et I_2, I_3 en I'_2, I'_3 sur CD; alors $I_1I'_1 = r_1$, $I_2I'_2 = r_2$, $I_3I'_3 = r_3$, $I_4I'_4 = r_4$.

Prenons l'arc EBD′ = EAD et l'arc GCA′ = GDA, E et G étant les milieux des arcs AB, CD. La corde ED′ coupe l'arc BI_1I_4A en un point J, et la corde GA′ coupe l'arc CI_2I_3D en un point K.



Appelons M le point d'intersection des droites JI_4, $I_1I'_1$ et soit N celui des droites KI_3, $I_2I'_2$. Alors

$$\textit{angle}\ I_1I_4J = \tfrac{1}{2}\, I_1EJ = \tfrac{1}{2}\, CED',$$
$$\textit{angle}\ I_2I_3K = \tfrac{1}{2}\, I_2GK = \tfrac{1}{2}\, BGA'.$$

Mais puisque

$$\text{arc } BA' = \text{arc } CD',$$
$$\textit{angle}\ I_2I_3K = I_1I_4J,$$

les deux triangles rectangles I_1I_4M, I_2I_3N sont semblables.

Cela posé, représentons par a, b, c, d, e, f les longueurs AB, BC, CD, DA, AC, BD; nous aurons

$$AI'_1 = \tfrac{1}{2}(a + e - b), \quad AI'_4 = \tfrac{1}{2}(a + d - f).$$

On en conclut

$$I'_4I'_1 = I_4M = \tfrac{1}{2}(e + f - b - d);$$

par analogie

$$I'_2I'_3 = I_3N = \tfrac{1}{2}(e + f - b - d).$$

Par suite, les triangles II_4M, I_2I_3N sont égaux; il en résulte $I_1M = I_2N$, c'est-à-dire

$$r_1 - r_4 = r_2 - r_3 \quad \text{ou} \quad r_1 + r_3 = r_2 + r_4.$$

25 août 1906.

POUR UNE HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

d'après G. Loria (*)

par H. Bosmans, S. J.

Les *Vorlesungen ueber Geschichte der Trigonometrie* de von Braunmühl ont montré à tout le monde, combien les monographies consacrées à l'histoire détaillée de chacune des branches particulières des Mathématiques complètent

(*) Résumé de la note intitulée : *Pour une histoire de la géométrie analytique* von G. Loria aus Genua, dans les *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses* de Heidelberg (Leipzig, Teubner, 1905), pp. 562-574. (P. M.)

utilement la grande histoire de Cantor. Pénétré de cette idée, M. Loria songeait à écrire une histoire de la Géométrie analytique dont il trace à grands traits le plan dans une note lue au troisième congrès international des Mathématiciens tenu à Heidelberg. Personne n'est plus qualifié que l'érudit professeur de l'Université de Gênes pour mettre ce projet à exécution. Personne, je le répète avec intention, n'est plus qualifié que lui. Et si j'y mets cette insistance, c'est que M. Loria semble avoir la velléité regrettable d'être prêt à y renoncer. Pour se documenter, il lui faudrait, dit-il, avoir à sa portée des bibliothèques d'une richesse comparable à celles de Paris, de Londres, de Munich ou de Rome; or, ces bibliothèques il ne les possède pas à Gênes. L'argument est sérieux, mais est-il irréfutable? Espérons que non, car qui donc oserait entreprendre une histoire de la Géométrie analytique, si malgré son érudition, l'auteur des *Spezielle algebraische und transscendente Kurven* lui-même, recule devant une telle besogne?

Le projet d'histoire de la Géométrie Analytique lu par M. Loria à Heidelberg, est divisé en neuf petits chapitres, dont voici le résumé, chapitre par chapitre.

1. L'*Analytische Geometrie* de Richard Baltzer est le premier traité de Géométrie analytique offrant tous les caractères d'une Application de l'Algèbre à la Géométrie entendue dans le sens moderne du mot. La rigueur apportée par l'auteur pour préciser le sens des signes, lui donne des formules d'une généralité parfaite, prêtes à pouvoir servir à l'application sans recourir à la figure. L'emploi des coordonnées homogènes combinées avec les concepts fondamentaux de la Géométrie Projective lui permet la considération des éléments à l'infini. Enfin, la théorie des formes, celle des déterminants, et aussi des notations heureuses donnent à tous ses calculs une élégance et une symétrie irréprochables.

Baltzer n'exclut pas précisément de son traité l'application de l'algèbre à la résolution des *problèmes déterminés*, mais sa Géométrie analytique est cependant à proprement parler une théorie des *lieux géométriques*. Et à ce propos, un lecteur peu au courant de l'histoire de la géométrie analytique pourrait croire que le savant professeur de l'Université de Giessen ne dédaignait pas toujours le paradoxe. « Les théories que j'expose, dit Baltzer dans l'avant-propos, sont les arrières petites nièces de celles que l'antiquité nous a léguées avec la marque de fabrique d'Apollonius! »

2. En effet, contrairement à l'idée qu'on s'en forme parfois, la plus ancienne des Géométries analytiques, celle de Descartes, est toute pénétrée par la pensée des mathématiciens grecs. La célèbre solution du problème de Pappus notamment ne nous paraît plus aujourd'hui, dit M. Loria, « qu'une lourde traduction de la géométrie hellène dans le langage de l'algèbre élémentaire. » Mais, ces procédés si grossiers, si primitifs du géomètre français, sont-ils pour cela sans valeur? Bien au contraire, et la preuve en est dans les conséquences qu'ils ont données entre les mains de leur inventeur. « Ils étaient autant au-dessus de la géométrie ordinaire, écrivait Descartes à Mersenne, que la rhétorique de Cicéron est au delà de l'*a*, *b*, *c* des enfants. » Il y a du vrai dans l'assertion, mais elle appelle des réserves. Ainsi, deux points importants dont on rapporte volontiers le mérite de l'invention à Descartes restent indécis. L'auteur de la *Géométrie* avait-il l'idée des transformations des coordonnées et,

s'il l'avait, en connaissait-il le mécanisme? Ensuite, savait-il tracer exactement une courbe définie par son équation?

3. Au contraire, chez Fermat, contemporain de Descartes, plus de doute. Le point de départ de ses considérations géométrico-analytiques est l'observation fondamentale et tout à fait originale que toute équation entre deux variables représente une courbe, à condition de considérer ces variables comme les coordonnées d'un point du plan. Partant de là, le célèbre géomètre découvre d'abord que l'équation du premier degré représente toujours une ligne droite. Il montre ensuite, que par transformation de coordonnées, on peut déterminer l'espèce d'une section conique représentée par une équation du 2d degré donnée arbitrairement. Enfin, sa généralisation de la spirale d'Archimède le place à la tête de ceux qui enrichirent la géométrie du système des coordonnées polaires.

La géométrie analytique de Fermat est donc bien plus proche de la nôtre, que celle de Descartes. Mais le Toulousain négligeait de faire imprimer ses immortelles découvertes. Ses idées eurent une diffusion relativement restreinte et n'exercèrent pas une influence proportionnée à leur mérite.

4. Attribuer à l'auteur du *Discours de la méthode* la paternité de la géométrie analytique est donc une assertion historiquement fausse. Comment en a-t-on contracté l'habitude? C'est plus aisé à expliquer qu'à justifier. En effet, tous les travaux auxquels la méthode des coordonnées est redevable de quelque progrès dérivent, à peu près sans exception, de la *Géométrie* de Descartes; tels sont, par exemple, le traité anonyme du *Calcul de Mons. Descartes*, et les travaux de de Beaune, de Schooten et de Wallis.

La méthode des coordonnées présentait chez Descartes une lacune fort grave, l'absence des signes des coordonnées. Les lettres de Sluse, de Schooten, d'Huygens, de Leibniz en montrent les conséquences fâcheuses. On en connaît un exemple célèbre chez Wallis, à propos de la parabole cubique. Comment n'a-t-on pas corrigé immédiatement cette imperfection? Pour le comprendre, il faut se rappeler l'invention du Calcul différentiel, découvert si peu d'années après la Géométrie analytique. Le nouveau calcul absorbe l'attention des mathématiciens. Le désir de montrer toute sa puissance leur fait oublier la Géométrie analytique, sa sœur aînée, et la nécessité de s'en occuper ex professo. Bref, pendant toute cette époque l'histoire de la Géométrie analytique se confond avec celle de l'application du Calcul différentiel.

5. Quelques savants continuent néanmoins à cultiver, malgré tout, la méthode des coordonnées. Parmi eux, trois noms méritent d'être retenus : Roberval, pour son mémoire intitulé *De geometrica planarum et cubicarum aequationum resolutione*; La Hire, pour son opuscule *Les Lieux géométriques*, publié en appendice à ses *Nouveaux éléments des sections coniques* et enfin, par dessus tous, le marquis de L'Hôpital. Le *Traité analytique des Sections coniques* de L'Hôpital est un beau et bon livre, qui exerça la meilleure influence tant en France qu'à l'étranger. Aujourd'hui même, on le lit encore avec plaisir. Les conventions relatives aux signes des coordonnées n'y atteignent pas encore toute la précision désirable, mais les valeurs négatives des coordonnées y sont admises et interprétées. Les axes des coordonnées commencent à y jouer leur vrai rôle. Enfin, pour le marquis de l'Hôpital, comme pour La Hire, la théorie des lieux géométriques n'est pas le but suprême de la Géométrie analytique; elle est plutôt une

préparation à la résolution des *problèmes déterminés*, à l'aide de l'intersection des lignes. N'aurions-nous pas, de nos jours, une tendance à tomber dans l'excès contraire? Nous avons le tort de trop négliger ce côté de l'étude des courbes, si important au double point de vue de la théorie et de la pratique.

6. L'année 1707 vit paraître l'*Enumeratio linearum tertii ordinis* de Newton et marque une date dans l'histoire de la Géométrie analytique. Dans l'*Enumeratio*, comme le titre l'indique, Newton se propose de classifier les courbes planes du 3e degré. Dans ce but, il réduit, par transformation des coordonnées, les équations de toutes les cubiques planes à cinq formes canoniques, d'où il déduit l'existence d'un nombre égal de courbes. Toutes les cubiques peuvent être tirées des cinq premières par des *ombres*. Le changement des axes des coordonnées devient, dans les mains du célèbre mathématicien anglais, un vrai instrument de recherches géométriques.

L'*Enumeratio* est un ouvrage capital qui en suscita une foule d'autres. Les uns, comme ceux de Nicole et de Clairaut, eurent pour but d'établir la vérité des nombreux théorèmes énoncés sans démonstration par Newton. D'autres eurent surtout en vue de développer les idées du maître. Tels furent les ouvrages de Mac-Laurin, de l'abbé de Bragelongne et de Gua de Malves. A côté de ces noms illustres il faut placer le nom plus modeste d'un savant italien, le P. Caraccioli, professeur à l'Université de Pise. On lui doit d'avoir remarqué la possibilité de déduire d'une courbe plane quelconque toute une classe d'autres courbes, en variant les constantes qui entrent dans l'équation cartésienne ou polaire de la première.

7. Au milieu du 18e siècle, nouveau et marquant progrès, dû à l'impulsion puissante de deux ouvrages qui virent le jour, presque simultanément : le tome II de l'*Introductio in Analysim Infinitorum* d'Euler (1748); et l'*Introduction à l'Analyse des courbes planes algébriques* de Gabriel Cramer (1750).

Euler donne une attention toute spéciale aux signes et à la transformation des coordonnées. On lui doit l'emploi constant de l'axe des ordonnées à côté de celui des abscisses et, le premier, il établit que les deux coordonnées d'un point sont deux grandeurs absolument de même nature. Enfin, il répandit partout l'habitude d'employer les coordonnées polaires, tout aussi bien que les coordonnées cartésiennes. L'*Introductio* d'Euler contient, on le sait, la première exposition élémentaire de la Géométrie analytique de l'espace, dont les travaux de Parent et de Clairaut faisaient cependant déjà prévoir depuis quelque temps le bel avenir.

Ecrit sur un plan moins vaste que celle d'Euler, l'*Introduction* de Cramer est peut-être, par cela même, encore plus profonde. Pour Cramer, comme pour Euler, le but de la Géométrie analytique semble être d'établir les équations des courbes et de les discuter. Le moyen le meilleur d'y arriver est la transformation des coordonnées. Néanmoins, comme chez tous leurs prédécesseurs, on chercherait vainement, chez Cramer ou chez Euler, des formules générales pour déterminer les grandeurs géométriques. Aucun de ces puissants génies *ne semble avoir entrevu la possibilité d'appliquer les coordonnées à l'étude des figures de la géométrie élémentaire*, telles que les angles, les distances, les triangles, etc.

8. C'est à un savant italien, l'illustre Lagrange, qu'en était réservé l'honneur. Ses *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides*

triangulaires, publiées, en 1773, dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin*, sont le premier travail vraiment écrit dans l'esprit de la Géométrie analytique moderne. On y trouve des formules d'une élégance parfaite et d'une généralité sans bornes. Il faut citer encore comme conçus dans le même ordre d'idées la *Mécanique analytique* de Lagrange et le grand *Traité de Calcul différentiel et intégral* de Lacroix. C'est même à Lacroix qu'est dû le nom de « Géométrie analytique », qui devait rester définitivement pour désigner cette branche de la science.

9. Une dernière question : comment les méthodes de Lagrange et de Lacroix se répandirent-elles et pénétrèrent-elles peu à peu dans l'enseignement? Ce fut surtout, grâce à un petit volume, qui depuis 1802, jouit en France et à l'étranger d'une influence toute à fait exceptionnelle et d'une renommée des plus méritées : l'*Essai de Géométrie analytique* de J. B. Biot. L'*Essai* de Biot est le premier traité élémentaire qui commence par l'exposition des questions relatives aux points, aux droites et au plan. Pour la première fois, les lieux géométriques du premier et du second ordre y occupent, comme ils le doivent, une place prépondérante. Enfin l'*Essai* de Biot est encore le premier ouvrage, où la géométrie du plan soit traitée conjointement avec celle de l'espace.

Concluons. La nouvelle direction donnée à la Géométrie analytique par l'école des Lagrange, des Lacroix, des Biot est si rationnelle que tout le monde l'adopta. Monge et ses élèves l'ont améliorée dans les détails, les progrès récents de la géométrie projective et de l'algèbre l'ont considérablement augmentée, mais son programme est, somme toute, resté tel qu'il y a un siècle. Les trente dernières années du 18e siècle ont donc pour la Géométrie analytique une importance comparable à celle de l'époque de Descartes et de Fermat, car c'est depuis lors que cette science a cessé d'être un simple chapitre d'introduction à l'analyse infinitésimale, pour devenir une branche des mathématiques ayant son but propre et ses méthodes particulières.

×SUR UN TRIANGLE PARTICULIER,

par M. G. Delahaye (Roye).

1. *Il existe des triangles* ABC, *autres que le triangle équilatéral, pour lesquels la hauteur* h_a *partant de* A, *la bissectrice* l_b *partant de* B *et la médiane* m_c *partant de* C *sont égales.*

Les théorèmes élémentaires donnent

$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2],$$

$$l_b^2 = \frac{ac}{(a+c)^2}[(a+c)^2 - b^2], \quad m_c^2 = \frac{1}{2}\left(a+b^2 - \frac{c^2}{2}\right).$$

Par conséquent, en égalant ces trois quantités et remplaçant a par

ca, b par $c\beta$, on obtient les équations à deux inconnues α et β,

$$\frac{[(\alpha+1)^2-\beta^2][\beta^2-(\alpha-1)^2]}{4\alpha^2}=\frac{\alpha[(\alpha+1)^2-\beta^2]}{(\alpha+1)^2}=\frac{2\alpha^2+2\beta^2-1}{4}. \quad (1)$$

On vérifie immédiatement la solution $\alpha=1$, $\beta=1$ qui correspond au triangle équilatéral.

En égalant les deux premières fractions (1) et écartant la solution $(\alpha+1)^2-\beta^2=0$, qui donnerait $b=a+c$, on trouve

$$\beta^2=(\alpha-1)^2+\frac{4\alpha^3}{(\alpha+1)^2}. \quad (2)$$

Si l'on porte cette valeur de β^2 dans l'égalité formée par les deux dernières des fractions (1), il vient

$$\left[(\alpha-1)^2+\frac{4\alpha^3}{(\alpha+1)^2}\right]\left[1+\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}\right]+\alpha^2-2\alpha-\tfrac{1}{2}=0. \quad (3)$$

Cette équation est du sixième degré en α; mais comme elle admet la solution $\alpha=1$, elle se réduit au cinquième si après l'avoir rendue entière on la divise par $\alpha-1$. On trouve

$$4\alpha^5+24\alpha^4+49\alpha^3+21\alpha^2-\alpha-1=0. \quad (4)$$

L'équation (4) n'ayant qu'une seule variation admet une seule racine positive. Les substitutions $\alpha=0$, $\alpha=1$ donnent des résultats de signes contraires; donc la racine positive est comprise entre 0 et 1, et l'on a $a<c$; l'égalité (2) donne ensuite pour β une seule valeur réelle positive.

Démontrons maintenant que la racine positive de (4) correspond à un triangle réel. Les inégalités

$$a<b+c, \quad b<c+a, \quad c<a+b$$

correspondent à

$$\alpha<\beta+1, \quad \beta<\alpha+1, \quad 1<\alpha+\beta.$$

Comme $\alpha<1$, la première est vérifiée; les deux autres reviennent à

$$1-\alpha<\beta<\alpha+1,$$

ou en substituant la valeur (2) de β

$$(1-\alpha)^2<(1-\alpha)^2+\frac{4\alpha^3}{(\alpha+1)^2}<(\alpha+1)^2. \quad (5)$$

La première des conditions (5) est vérifiée; la seconde se ramène à $\alpha^2<(\alpha+1)^2$, de sorte qu'elle a également lieu.

La proposition est donc démontrée.

2. La condition $h_a^2 = l_b^2$ donne successivement,

$$\frac{b^2-(a-c)^2}{4a^2}=\frac{ac}{(a+c)^2},\quad \frac{(p-a)(p-c)}{ac}=\left(\frac{a}{a+c}\right)^2,$$

$$\sin\frac{B}{2}=\frac{a}{a+c}. \tag{6}$$

De l'égalité (6), on déduit

$$\sin\frac{B}{2}=\frac{\sin A}{\sin A+\sin C}=\frac{\sin A}{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}=\frac{\sin A}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}},$$

d'où

$$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sin A}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}. \tag{7}$$

Enfin, en considérant le triangle formé par l_b, a et b, on trouve

$$l_b : a = \sin C : \sin\left(C+\frac{B}{2}\right)=\sin C : \cos\frac{A-C}{2}$$

d'où, en ayant égard à la formule (7),

$$l_b = b\sin C = c\sin B;$$

mais ce résultat se conclut immédiatement de la condition $l_b = h_a$.

NOUVELLE MÉTHODE
POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS COMPLÈTES DU 4me DEGRÉ,

par M. H. G. A. Verkaart.

Soit l'équation

$$F(x)\equiv x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Posons

$$F(x)=(x^2+mx+p+\sqrt{p^2-d})(x^2+nx+p-\sqrt{p^2-d})$$
$$=x^4+(m+n)x^3+(mn+2p)x^2+[(m+n)p-(m-n)\sqrt{p^2-d}]x+d.$$

Pour déterminer m, n et p on a les relations :

$$m+n=a, \tag{1}$$
$$mn+2p=b, \tag{2}$$
$$(m+n)p-(m-n)\sqrt{p^2-d}=c. \tag{3}$$

De (1) et (2) on tire

$$m-n=\pm\sqrt{a^2-4b+8p}.$$

En substituant les valeurs de $m+n$ et $m-n$ dans (3) on trouve

$$ap - c = \pm\sqrt{(p^2-d)(8p+a^2-4b)}.$$

En élevant au carré

$$8p^3 - 4p^2 + 2p(ac-4d) - d(a^2-4b) - c^2 = 0.$$

Dans cette résolvante, on peut poser $2p = q$.

EXEMPLE (Voir *Mathesis*, juin 1906; supplément, p. 11, l. 4)

$$z^4 - 9z^3 + 26z^2 - 24z + 1 = 0.$$

La résolvante est

$$8p^3 - 104p^2 + 424p - 553 = 0.$$

Posons $2p = q$; alors

$$q^3 - 26q^2 + 212q - 553 = 0.$$

Cette équation a une racine $q = 7$.

$$p = \tfrac{7}{2}, \quad \sqrt{p^2-d} = \tfrac{5}{2}\sqrt{5},$$

$$m+n = -9$$

$$m-n = \frac{(m+n)p - c}{\sqrt{p^2-d}} = -\sqrt{5},$$

$$m = -\tfrac{1}{2}(9+\sqrt{5}), \quad n = -\tfrac{1}{2}(9-\sqrt{5}).$$

De l'équation

$$z^2 - \tfrac{1}{2}z(9+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}(7+3\sqrt{5}) = 0,$$

on tire

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}(9+\sqrt{5} \pm \sqrt{30-6\sqrt{5}}),$$

et de l'équation

$$z^2 - \tfrac{1}{2}z(9-\sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}(7-3\sqrt{5}) = 0,$$

$$\left.\begin{matrix} z_3 \\ z_4 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}(9-\sqrt{5} \pm \sqrt{30+6\sqrt{5}}).$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

88. *Exercice sur les radicaux.* On considère tous les nombres N qui sont de la forme

$$N = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},$$

où a, b, c, d représentent des nombres commensurables positifs, négatifs

ou nuls. Démontrer : 1° que si deux nombres N sont égaux, les coefficients a, b, c, d ont la même valeur pour les deux nombres; 2° que le quotient de deux nombres N est un nombre de la même forme.

(*Journal de Vuibert*, 15 déc. 1905).

1° Soit $N' = a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} + d'\sqrt{6}$; la différence $N - N'$ est de la forme $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6}$. Or, si $N = N'$, on peut écrire

$$\alpha + \delta\sqrt{6} = -(\beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3}),$$
$$\alpha^2 + 6\delta^2 + 2\alpha\delta\sqrt{6} = 2\beta^2 + 3\gamma^2 + 2\beta\gamma\sqrt{6}.$$

La dernière égalité, d'après un théorème connu, entraîne les suivantes

$$\alpha^2 + 6\delta^2 = 2\beta^2 + 3\gamma^2, \quad \alpha\delta = \beta\gamma. \tag{1}$$

En élevant au carré l'égalité

$$\alpha + \gamma\sqrt{3} = -(\beta\sqrt{2} + \delta\sqrt{6}),$$

on trouve les conditions

$$\alpha^2 + 3\gamma^2 = 2\beta^2 + 6\delta^2, \quad \alpha\gamma = 2\beta\delta. \tag{2}$$

Les premières des égalités (1) et (2) donnent immédiatement

$$\alpha^2 = 2\beta^2, \quad 3\gamma^2 = 6\delta^2 \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta\sqrt{2}, \quad \gamma = \delta\sqrt{2}.$$

Comme α, β, γ, δ sont rationnels, on doit avoir $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, d'où $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$.

2° Il suffit de démontrer que le produit de deux nombres est de la même forme. On trouve

$$\begin{aligned} NN' &= (aa' + 2bb' + 3cc' + 6dd') + (ab' + a'b + 3cd' + 3dc')\sqrt{2} \\ &\quad + (ac' + a'c + 2b'd + 2bd')\sqrt{3} + (ad' + a'd + bc' + b'c)\sqrt{6} \\ &= A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Toutefois, on peut se demander si le déterminant du système en a', b', c', d' :

$$aa' + 2bb' + 3cc' + 6dd' = A, \quad ab' + a'b + 3cd' + 3dc' = B, \ldots,$$

ne peut s'annuler pour des valeurs rationnelles de a, b, c, d. Pour écarter tout doute, on peut transformer le quotient

$$\frac{A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6}}{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}}$$

en rendant le dénominateur rationnel. A cet effet, on peut multiplier les deux termes d'abord par $(a + d\sqrt{6}) - (b\sqrt{2} + c\sqrt{3})$, ensuite par $a^2 + 6d^2 - 2b^2 - 3c^2 - 2(ad - bc)\sqrt{6}$ Ces multiplications conservent au numérateur la même forme.

La même proposition s'applique aux nombres de la forme $a+b\sqrt{\lambda}+c\sqrt{\mu}+d\sqrt{\lambda\mu}$, λ et μ étant des nombres premiers entre eux.

(J. N.)

24. *Sur trois cercles du plan d'un triangle.* G étant le centre de gravité du triangle ABC, un théorème connu donne

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\overline{MG}^2. \qquad (1)$$

On en déduit que le lieu des points M du plan ABC dont la somme des carrés des distances aux sommets du triangle ABC est constante, est une circonférence de centre G.

Parmi les circonférences ainsi obtenues, on peut distinguer celles qui passent par A, par B ou par C; elles sont respectivement les lieux des points tels que la somme $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2$ est égale à b^2+c^2, c^2+a^2 ou a^2+b^2. Elles recoupent la circonférence circonscrite au triangle ABC au symétrique de A, B ou C par rapport à la droite d'Euler OH.

Si le triangle ABC est équilatéral, les trois circonférences considérées coïncident avec la circonférence circonscrite au triangle ABC; celle-ci jouit donc de la propriété que la somme des carrés des distances de chacun de ses points aux sommets du triangle est égale à deux fois le carré d'un côté; ce que l'on déduit aussi directement de l'équation (1).

(Hernandez, professeur à Valencia).

25. *Lieu discontinu.* Le lieu géométrique des sommets A des triangles rectangles ayant même hypoténuse a et satisfaisant à la condition $\frac{b}{\beta}$ commensurable et $\frac{c}{a}$ commensurable est donné par les équations

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{4}, \qquad (1)$$

$$y=\pm\frac{2mn(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}a. \qquad (2)$$

m et n étant deux nombres premiers entre eux; l'équation (2) représente des parallèles à l'axe des X dont les intersections avec la circonférence (1) sont le lieu des sommets A, sans répétition. (Edouard Delville)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1177.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 176 et (3) VI, p. 185).

Trouver les points de contact des tangentes perpendiculaires à l'axe polaire, menées à une courbe ayant pour équation polaire

$$r = f(\theta).$$

Application aux spirales représentées par les équations : $r = a\theta$ (*spirale d'Archimède*); $r = \frac{a}{\theta}$ (*spirale hyperbolique*); $r = ae^{m\theta}$ (*spirale logarithmique*); $r^2 = \frac{a^2}{\theta}$ (*spirale polaire*); $r = \frac{a \sin \theta}{\theta}$ (*cochléoïde*); $r = \frac{a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}$ (*spirale de Poinsot*); $r^2 = a^2\theta$ (*spirale parabolique de Fermat.*)

(H. Brocard)

Solution par M. E. N. Barisien. Au point M, on a

$$r = f(\theta), \quad \operatorname{tg} V = \frac{r}{r'} = \operatorname{cotg} \theta.$$

Nous allons déterminer une seconde courbe passant par les points cherchés

1° $r = a\theta$, $r' = a$, $\theta = \operatorname{cotg} \theta$; donc les points de contact sont sur la courbe (*cappa*)

$$r = a \operatorname{cotg} \theta, \quad \text{ou} \quad a^2x^2 = y^2(x^2 + y^2).$$

2° $$r = \frac{a}{\theta}, \quad r' = -\frac{a}{\theta^2}, \quad -\theta = \operatorname{cotg} \theta;$$

d'où $$r = -a \operatorname{tg} \theta,$$

équation d'un cappa.

3° $$r = ae^{m\theta}, \quad r' = ame^{m\theta}, \quad \frac{1}{m} = \operatorname{cotg} \theta, \quad m = \operatorname{tg} \theta;$$

donc $$\theta = \operatorname{arc\,cotg} \frac{1}{m} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg} m.$$

Les points de contact sont sur la droite $y = mx$.

4° $$r^2 = \frac{a^2}{\theta}, \quad r' = -\frac{1}{2} a\theta^{-\frac{5}{2}}, \quad -2\theta = \operatorname{cotg} \theta;$$

d'où $$r^2 = -2a^2 \operatorname{tg} \theta, \quad \text{ou} \quad x(x^2 + y^2) = -2a^2y.$$

5° $r = a\dfrac{\sin\theta}{\theta}$, $\dfrac{r}{r'} = \dfrac{\theta\sin\theta}{\theta\cos\theta - \sin\theta} = \operatorname{cotg}\theta$; en éliminant l'arc θ, figurant en dehors des lignes trigonométriques, on obtient

$$r = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}, \quad \text{ou} \quad y^2 = x^2\frac{a-x}{x+a},$$

équation d'une strophoïde droite.

6° $r = \dfrac{a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}$, $\dfrac{r}{r'} = -\dfrac{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}{m(e^{m\theta} - e^{-m\theta})} = \operatorname{cotg}\theta$;

d'où $$e^{m\theta} = \sqrt{\frac{m\operatorname{cotg}\theta + 1}{m\operatorname{cotg}\theta - 1}}.$$

Les points de contact sont sur la courbe

$$r = \frac{a\sqrt{m^2\operatorname{cotg}^2\theta - 1}}{2m\operatorname{cotg}\theta}.$$

7° $r^2 = a^2\theta$, $2rr' = a^2$, $\dfrac{r}{r'} = 2\theta = \operatorname{cotg}\theta$;

d'où $$r^2 = \frac{a^2}{2}\operatorname{cotg}\theta,$$

courbe de même espèce que celle du 4°, tournée de 90° autour du pôle.

Question 1571.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 144).

On considère une ellipse et un point M *de cette courbe. De ce point on mène les trois normales autres que celle de* M. *Lorsque* M *varie, trouver le lieu du foyer des paraboles passant par* M *et les trois autres points. Trouver aussi le lieu du sommet de ces paraboles.*

Examens oraux de l'Ecole Polytechnique de Paris, en 1904. — On trouve des quartiques.

Solution par MM. Abramescu et H. Lez. Soit M$(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ un point de l'ellipse

$$E \equiv a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0. \qquad (1)$$

Les pieds des autres normales issues de M sont sur l'hyperbole d'Apollonius de M,

$$H \equiv c^2xy - a^2y\cos\varphi + b^2x\sin\varphi = 0. \qquad (2)$$

Toute conique passant par les pieds des quatre normales menées de

M a une équation de la forme $E + 2\lambda H = 0$; pour avoir une parabole, il faut poser $\lambda = \pm \frac{ab}{c^2}$. En ne prenant que le signe + on a pour cette courbe

$$f(x, y) \equiv c^2(ay + bx)^2 - 2a^4by \cos\varphi + 2ab^4x \sin\varphi - a^2b^2c^2 = 0. \quad (3)$$

Un diamètre ayant pour équation $ay + bx = 0$, l'équation de l'axe est $bf'_x + af'_y = 0$, ou

$$c^2(a^2 + b^2)(ay + bx) = ab(a^3 \cos\varphi - b^3 \sin\varphi). \quad (4)$$

Pour avoir le lieu des sommets il faut éliminer φ entre les équations (3) et (4). De celles-ci, on tire pour $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ les valeurs

$$\frac{c^2[2(a^2 + b^2)\delta x - b\delta^2 + a^2b^2]}{2a^4b(ax - by)},$$

$$\frac{c^2[2(a^2 + b^2)\delta y - a\delta^2 + a^2b^2]}{2ab^4(ax - by)},$$

où $\delta \equiv ay + bx$. Par suite l'équation cherchée est du quatrième degré en x et y.

On sait que le foyer (x, y) vérifie les équations

$$4(A - C)f(x, y) = f'^2_x - f'^2_y, \quad 4Bf(x, y) = f'_x f'_y ;$$

l'une de ces équations peut être remplacée par (4).

Il est plus simple d'identifier l'équation (3) avec l'équation focale

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x \cos\mu + y \sin\mu + t)^2,$$

ou

$$(y \cos\mu - x \sin\mu)^2 - 2y(\beta + t \sin\mu) - 2x(\alpha + t \cos\mu) + \alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0.$$

En divisant l'égalité (3) par $c^2(a^2 + b^2)$, on voit que l'on peut prendre

$$\cos\mu = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\mu = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\beta + t \sin\mu = \frac{a^4b \cos\varphi}{c^2(a^2 + b^2)}, \qquad \alpha + t \cos\mu = -\frac{ab^4 \sin\varphi}{c^2(a^2 + b^2)}, \quad (5)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - t^2 = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}. \quad (6)$$

Le point (α, β) étant sur l'axe de la parabole, on a aussi

$$c^2(a^2 + b^2)(a\beta + b\alpha) = ab(a^3 \cos\varphi - b^3 \sin\varphi). \quad (7)$$

Par suite, pour trouver le lieu des foyers, on peut substituer, dans (7), les valeurs de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ tirées des relations (5); il reste alors à remplacer, dans le résultat, t par la valeur déduite de (6). (J. N.)

Question 1587.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 232).

D'un point quelconque M, *on mène à une parabole les trois normales* MP_1, MP_2, MP_3 *qui rencontrent la courbe une seconde fois en* P_1', P_2', P_3'. *Si les tangentes aux points* P_1, P_2, P_3, P_1', P_2', P_3' *font avec l'axe de la parabole des angles* α, β, γ, α', β', γ', *démontrer les relations*

$$\Sigma \cot \alpha' + 2\Sigma \operatorname{tang} \alpha = 0, \quad \Sigma \cot \beta \cot \gamma - \Sigma \cot \beta' \operatorname{cotg} \gamma' = 6 \quad \text{(Beard)}$$

Solution par M. Dupont. Les coordonnées de M étant désignées par a, b, les trois points P_1, P_2, P_3 se trouvent sur l'hyperbole d'Apollonius

$$xy + py - ay - pb = 0. \tag{1}$$

Cette équation combinée avec celle de la parabole $y^2 = 2px$ (2), fournit les ordonnées des pieds des normales,

$$y^3 + 2p^2y - 2pya - 2p^2b = 0. \tag{3}$$

Or, l'angle α, par exemple, est donné par la relation $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y_1}$, il s'ensuit que, de l'équation (3), on tire en remplaçant y par $p \cot \alpha$

$$\Sigma \cot \alpha = 0, \quad \Sigma \cot \beta \cot \gamma = 2\frac{p-a}{p} \quad \text{et} \quad \cot \alpha \cot \beta \cot \gamma = \frac{2b}{p}.$$

On aura la valeur de l'ordonnée du point P_1' en éliminant x entre l'équation de la parabole et celle de la normale MP_1,

$$Y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(X - x_1).$$

Après avoir divisé par $Y - y_1$ la relation obtenue, on trouve pour l'ordonnée cherchée : $Y = -\frac{y_1^2 + 2p^2}{y_1} = -\frac{2p}{y}(p + x_1)$.

L'angle α' sera donné par l'égalité $\cot \alpha' = -\frac{2(p+x)}{y}$, (4), où l'on a écrit x, y au lieu de x_1, y_1.

Pour éliminer x et y entre (1), (2) et (4), substituons, dans (1) et (2), à y sa valeur tirée de (4), ce qui donne

$$2(p+x)^2 - 2a(p+x) + pb \cot \alpha' = 0,$$
$$2(p+x)^2 - px \cot^2 \alpha' = 0;$$

d'où, en soustrayant,

$$x(p \cot^2 \alpha' - 2a) = 2ap - pb \cot \alpha'.$$

Cette valeur de x étant portée dans une des deux équations précédentes, on obtient finalement

$$bp\cot^2\alpha' + (2p^2 - 2ap)\cot^2\alpha' - (4bp + 2ab)\cot\alpha' + 2b^2 + 4a^2 = 0.$$

Cette égalité permet d'écrire les trois suivantes :

$$\cot\alpha'\cot\beta'\cot\gamma' = -\frac{4a^2+2b^2}{bp}, \quad \Sigma\cot\beta'\cot\gamma' = -2\frac{2p+a}{p},$$

$$\Sigma\cot\alpha' = 2\frac{a-p}{b}.$$

On aura donc

$$\Sigma\cot\alpha' + 2\frac{\Sigma\cot\beta\cot\gamma}{\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma} = \Sigma\cot\alpha' + 2\Sigma\operatorname{tg}\alpha$$

$$= 2\frac{a-p}{b} + 2\frac{p-a}{p}\cdot\frac{p}{b} = 0.$$

De plus,

$$\Sigma\cot\beta\operatorname{cotg}\gamma - \Sigma\cot\beta'\operatorname{cotg}\gamma' = 2\frac{p-a}{p} + 2\frac{2p+a}{p} = 6.$$

Si le point M était situé sur la parabole, on aurait

$$\cot\alpha'\cot\beta'\cot\gamma' = -\frac{4a}{b}\times\frac{a+p}{p} = \frac{2a}{b}(2 + \Sigma\cot\beta'\cot\gamma')$$

$$= \frac{b}{p}(2 + \Sigma\cot\beta'\cot\gamma') = (2 + \Sigma\operatorname{cotg}\beta'\cot\gamma')\times\frac{1}{2}\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma,$$

ou
$$\frac{\cot\alpha'\cot\beta'\cot\gamma'}{\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma} - \frac{1}{2}\Sigma\cot\beta'\cot\gamma' = 1,$$

ou encore

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha'\operatorname{tg}\beta'\operatorname{tg}\gamma' = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{tg}\beta' + \operatorname{tg}\gamma').$$

Ont résolu la même question MM. Barisien, Lez, Tabascoff et Abramescu.

Autre solution. Voici une solution plus simple de la question 1587.

Prenons pour coordonnées d'un point P(x, y) de la parabole $x = \frac{1}{2}p\cot^2\alpha$, $y = p\cot\alpha$; α sera l'inclinaison de la tangente en P sur l'axe des x. La normale au point P aura pour équation

$$y - p\cot\alpha = -\cot\alpha(x - \tfrac{1}{2}p\cot^2\alpha); \qquad (1)$$

par suite, si dans cette égalité x et y représentent les coordonnées du point M, les valeurs de $\cot\alpha$ aux points P_1, P_2, P_3 sont les racines de l'équation

$$p\cot^2\alpha + 2(p-x)\cot\alpha - 2y = 0, \qquad (2)$$

et l'on a

$$\Sigma\cot\alpha = 0. \qquad (3)$$

Pour trouver la valeur cot α' de cot α qui correspond au point P′ ou la normale en P recoupe la parabole, nous remplaçons, dans l'équation (1), x par $\frac{1}{2}p\cot^2\alpha'$ et y par $p\cot^2\alpha'$, ce qui donne après suppression du facteur cot α' — cot α

$$\cot\alpha' + \cot\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha = 0. \qquad (4)$$

De (3) et (4) on déduit immédiatement $\Sigma\cot\alpha' + 2\Sigma\operatorname{tg}\alpha = 0$. Ensuite,

$$\Sigma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0, \qquad (3')$$

$$\begin{aligned}\Sigma\cot\alpha'\cot\beta' &= \Sigma(\cot\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha)(\cot\beta + 2\operatorname{tg}\beta)\\ &= \Sigma\cot\alpha\cot\beta + 2\Sigma(\cot\alpha\operatorname{tg}\beta + \cot\beta\operatorname{tg}\alpha)\\ &= \Sigma\cot\alpha\cot\beta + 2\Sigma\operatorname{tg}\alpha(\cot\beta + \cot\gamma)\\ &= \Sigma\cot\alpha\cot\beta - 2\Sigma\operatorname{tg}\alpha\cot\alpha = \Sigma\cot\alpha\cot\beta - 6.\end{aligned}$$

Note. On sait que le cercle passant par les points P_1, P_2, P_3 passe par le sommet de la parabole. Un abonné nous signale comme propriété analogue du cercle $P_1'P_2'P_3'$ que la somme des ordonnées des points P_1', P_2', P_3' et du quatrième point de rencontre Q du cercle $P_1'P_2'P_3'$ avec la parabole est égale à zéro. Mais remarquons que cette propriété appartient à quatre points concycliques quelconques de la parabole; car les cordes $P_1'P_2'$, $P_3'Q$ ayant des directions symétriques par rapport à l'axe, les diamètres conjugués sont symétriques par rapport à cet axe. (J. N.)

×Question 1588.

(Voir *Mathesis*, (3). VI, p. 232).

Dans tout triangle ABC *dont les rayons des cercles tritangents sont* r, r_a, r_b, r_c *et le rayon du cercle circonscrit* R, *on a les relations*

$$12Rr - r^2\left(\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_a} + \frac{r_a}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_b}\right)$$
$$= (ab + ac + bc) - \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (1)$$

$$\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_a} + \frac{r_a}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_b} = \frac{4R}{r} - 2. \qquad (2)$$

(E. N. Barisien)

Solution par M. Ch. Nicaise (Nivelles). Représentons par M le premier membre de (2).

1° On peut écrire

$$M = \frac{r_a + r_c}{r_b} + \frac{r_b + r_c}{r_a} + \frac{r_a + r_c}{r_b}.$$

Or, $r_a + r_b + r_c = 4R + r$; par suite

$$M = \frac{4R + r - r_b}{r_b} + \frac{4R + r - r_a}{r_a} + \frac{4R + r - r_c}{r_c}$$

$$= \frac{(4R + r)(p - b)}{T} + \frac{(4R + r)(p - a)}{T} + \frac{(4R + r)(p - c)}{T} - 3$$

$$= \frac{(4R + r)}{T}(p - b + p - a + p - c) - 3 = \frac{(4R + r)p}{T} - 3$$

$$= \frac{4R + r}{r} - 3 = \frac{4R}{r} - 2.$$

2° En remplaçant dans la 1° égalité M par $\frac{4R}{r} - 2$, on trouve successivement

$$12Rr - r^2\left(\frac{4R}{r} - 2\right) = 2r(4R + r) = 2r(r_a + r_b + r_c)$$

$$= 2r\left[\frac{T}{p-a} + \frac{T}{p-b} + \frac{T}{p-c}\right] = \frac{2T^2}{p(p-a)} + \frac{2T^2}{p(p-b)} + \frac{2T^2}{p(p-c)}$$

$$= 2\Sigma(p - b)(p - c) = \tfrac{1}{2}\Sigma(a - b + c)(a + b - c)$$

$$= \tfrac{1}{2}\Sigma[a^2 - (b - c)^2] = \tfrac{1}{2}\Sigma(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = \Sigma bc - \tfrac{1}{2}\Sigma a^2.$$

NOTE. Ont résolu la même question MM. ABRAMESCU, LEZ, DUPONT, DELAMARE, PLAKHOVO et ROSE.

Pour démontrer l'égalité (2), M. Abramescu se servant de la relation $\frac{1}{r} = \Sigma\frac{1}{r_a}$ écrit

$$M = \Sigma r_a\left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) = \Sigma r_a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right) = \frac{1}{r}\Sigma r_a - 3 = \frac{1}{r}(4R + r) - 3 = \frac{4R}{r} - 2$$

MM. Lez, Plakhovo et Rose utilisent les formules

$$T = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$$

pour obtenir

$$M = \Sigma r_a\left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) = \frac{1}{p-a}\left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) = \Sigma\frac{a}{p-a}.$$

expression égale à

$$\frac{4R}{r} - 2 = \frac{abc - 2(p - a)(p - b)(p - c)}{(p - a)(p - b)(p - c)},$$

ce que vérifie M. Lez, ce que M. Plakhovo indique avoir été obtenu par M. LEMOINE et ce que M. Rose démontre en remarquant que

$$\frac{4R}{r} - 2 = 4\Sigma\frac{r_a}{r} - 6 = 4\rho\Sigma\frac{1}{p-a} - 6,$$

de sorte que l'égalité (2) est ramenée

$$\Sigma\frac{4p-a}{p-a}=6, \quad \text{ou} \quad 3p\Sigma=\frac{1}{p-a}=3, \quad \text{ou} \quad \Sigma\frac{r}{r_a}=1.$$

M. Dupont observe que

$$M=\Sigma r_a\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=\Sigma p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(\frac{1}{p\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{1}{p\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\right)=\frac{\Sigma\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}};$$

or, d'après une formule connue, $\Sigma\sin^2\frac{A}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; par suite

$$M=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}-2=\frac{4R}{r}-2.$$

Pour démontrer la formule (1), M. Dupont additionne les trois relations

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \quad b^2=c^2+a^2-2ca\cos B, \ldots$$

ce qui donne successivement

$$\Sigma a^2=2\Sigma bc\cos A, \quad \Sigma bc-\frac{1}{2}\Sigma a^2=\Sigma bc\,(1-\cos A)=\Sigma bc\sin A\,\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

$$\Sigma bc-\frac{1}{2}\Sigma a^2=2T\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2\Gamma}{p}\Sigma p\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\Sigma r\Sigma r_a=2r\,(4R+r).$$

M. Delahaye s'appuie sur les formules connues, où $\delta=4R+r$,

$$\Sigma ab=p^2+r\delta, \quad \Sigma a^2=2p^2-2r\delta,$$

$$\Sigma r_a=4R+r, \quad \frac{1}{r}=\Sigma\frac{1}{r_a}.$$

En appliquant la transformation continue, il trouve les relations suivantes

$$12Rr_a-r_a^2\left(\frac{r}{r_b}+\frac{r_b}{r}+\frac{r}{r_c}+\frac{r_c}{r}-\frac{r_b}{r_a}-\frac{r_c}{r_b}\right)=\frac{1}{2}\Sigma a^2-(bc-ca-ab),$$

$$\frac{r}{r_b}+\frac{r_b}{r}+\frac{r}{r_c}+\frac{r_c}{r}-\frac{r_b}{r_a}-\frac{r_c}{r_b}=\frac{4R}{r_a}+2.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

1806. Si l'on a

$$A_1=x-a, \quad A_2=2x-(a+b), \quad A_3=3x-(a+b+c)\ldots,$$
$$A_m=mx-(a+b+\cdots+l)$$

on a aussi

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & \ldots & A_1 & A_1 & A_1 \\ A_1 & A_2 & A_2 & \ldots & A_2 & A_2 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_3 & A_3 & A_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-2} \\ A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{m-2} & A_{m-1} & A_{m-1} \\ A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{m-2} & A_{m-1} & A_m \end{vmatrix}=(x-a)(x-b)\ldots(x-l).$$

Il suffit de retrancher de la dernière ligne l'avant-dernière et de la dernière colonne l'avant-dernière et ainsi de suite. (HERNANDEZ, Valencia)

1307. Le cercle $x^2+y^2-ax=0$ est tangent à la sextique

$$[2(x^2+y^2)(y-b)+abx]^2-a^2(2y-b)^2(x^2+y^2)=0.$$

Calculer les coordonnées des points de contact. (E. N. BARISIEN)

En remplaçant dans l'équation de la sextique x^2+y^2 par ax, on a

$$x(x-a)(2y-b)^2=0.$$

Donc $y=\frac{b}{2}$ correspond aux points de tangence des deux courbes. Les abscisses de ces points sont donnés par l'équation

$$x^2-ax+\frac{b^2}{4}=0, \text{ etc.}$$

×**1308**. Démontrer l'identité

$$[2b^2x(2x-a)+a^4]^2-a^4b^2(4x-a)^2$$
$$=(4b^2x^2-a^4)[2bx-a(a+b)][2bx+a(a-b)].$$

(E. N. BARISIEN)

1309. Démontrer que l'équation

$$f(x)\equiv x^3(x-2a)+b^2(x-a)^2=0$$

n'a que deux racines réelles. (E. N. BARISIEN)

Supposons $a>0$. Il suffit d'appliquer le théorème de Descartes pour voir qu'il peut y avoir 2 racines positives; il n'y a pas de racine négative. On examine ensuite les signes de $f(0)$, $f(a)$, $f(2a)$.

1310. S_n étant la somme des n premiers nombres entiers, montrer qu'on a

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 & S_3 & S_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-2} & S_{n-2} & S_{n-2} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-2} & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-2} & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} = n!$$

Il suffit de retrancher de la dernière ligne et de la dernière colonne, l'avant dernière ligne et colonne respectivement, et ainsi de suite.

1311. Simplifier la fraction

$$\frac{(2a-c)^3+(2b-c)^3}{a+b-c}.$$

(E. N. BARISIEN)

En appliquant l'identité connue $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, on trouve pour le quotient $2[(a+b-c)^2+3(a-b)^2]$.

1312. Démontrer la relation

$$\begin{vmatrix} x^2-bc & cz-yx & by-xz \\ cz-yx & y^2-ac & ax-zy \\ by-xz & ax-zy & z^2-ab \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} z & b & x \\ a & z & y \\ y & x & c \end{vmatrix}^2$$

(E. N. BARISIEN)

Appliquer le théorème sur les déterminants adjoints.

1313. Si α, β sont deux solutions de l'équation $a\cos\theta+b\sin\theta=c$, former les équations qui ont pour racines 1° $\sin\alpha$ et $\sin\beta$; 2° $\cos 2\alpha$ et $\cos 2\beta$. (REEVES)

Il suffit de rendre rationnelles les équations

$$a\sqrt{1-\sin^2\theta}+b\sin\theta=c, \quad a\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}+b\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=c.$$

1314. u' et u'' désignant les racines de l'équation

$$u^2+(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x)\,u+\operatorname{séc}^2 x+\operatorname{coséc}^2 x=0,$$

pour quelles valeurs de x ces racines sont-elles réelles, et pour quelles valeurs de K l'équation

$$\frac{2(u'+u'')}{u'u''}+u'+u''+(K+1)\,u'u''+12=0$$

admet-elle des valeurs réelles de x^2? (*Gazeta Matematica*, 1906)

1315. Si dans un triangle, deux médianes se coupent à angle droit, la somme de leurs carrés est égale au carré de la troisième médiane.

(*Journal de Vuibert*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1596. Soient A, B, C, ... L des points donnés d'une même sphère O, et soient a, b, c, .. l, s des nombres donnés. Le lieu d'un point M de la sphère tel que

$$a \cos AM + b \cos BM + \cdots + l \cos LM = s,$$

est un cercle dont le plan se déplace parallèlement à lui-même lorsque s varie. (STEINER)

1597. On donne deux plans α, β et un point P. Une sécante quelconque menée par P rencontre α en A, β en B. Sur la droite AB on marque le point M symétrique de P par rapport au milieu Q de la droite AB Trouver le lieu géométrique du point M.

(J. NEUBERG)

×**1598.** Résoudre les trois systèmes d'équations

$$\text{I} \begin{cases} x+y=a, \\ (x^2+y^2)^2+b^2(x^2+y^2)^2=c^6. \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} x+y=a, \\ x^5+y^5+b(x^3+y^3)=c^5. \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} x+y=a, \\ 2(x^7+y^7)-7a(x^6+y^6)=b^7. \end{cases}$$

(E. N. BARISIEN)

1599. Soit M un point fixe d'une conique de centre C et de foyers F et F′.

1° Lieu des centres des coniques tangentes à la conique donnée en M et passant par F et F′.

2° Lieu des centres des coniques tangentes à la conique donnée en M et passant par F et C.

3° Chacun des lieux précédents est une conique dont on demande le lieu des centres lorsque le point M se déplace sur la conique donnée.

(E. N. BARISIEN)

1600. Trouver les courbes telles que l'abcisse à l'origine de la normale en un point M soit une fonction linéaire donnée $ax+by+c$ des coordonnées de M. (J. BOUR)

TABLE DES MATIÈRES (*).

ARITHMÉTIQUE, ANALYSE INDÉTERMINÉE.

	Pages.
Sur la détermination des nombres amiables, par M. A. Gérardin	41
×Sur les solutions de l'équation indéterminée $x^2 + y^2 = z^2$ (P. M.)	113
×Sur un problème d'arithmétique (J. N.)	129
Question 597; solution par A. Gérardin	218

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Identités trigonométriques, par M. E. Barbette	17
×Corollaire du théorème de Fermat, d'après Wissenlink	93
×Formules relatives à l'angle de Brocard, etc., par M. E. Gelin (supplément de 16 pages).	
Sur un théorème de Sylvester, M. St. Mirea	237
Nouvelle méthode pour la résolution des équations complètes du quatrième degré, par M. Verkaart	266
×Exercice sur les radicaux (J. N.)	268
Question 1509; solution par M. Abramescu	130
Question 1569; solution par M. Barbette	197
×Question 1496; solution par M. N. Plakhovo	221
Question 1562; solution par MM. Hernandez et Neuberg	214

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; MÉTAGÉOMÉTRIE.

Les premiers principes de la géométrie, par M. De Tilly	5
Propriétés du quadrilatère inscriptible; par M. J. Neuberg	14
Sur les cercles tritangents (J. N.)	44
Sur le pentagone simple (J. N.)	45
Sur deux cas particuliers du problème d'Apollonius, par M. J. Neuberg	59
Sur le cercle des neuf points d'un triangle, par M. Mineur	66
Point isopérimétrique	93
Triangle bordé de trois rectangles, par M. J. Neuberg	97
Sur la droite de Simson	123
Sur une généralisation de l'orthocentre	124
Exercices de mathématiques élémentaires, par M. G. de Longchamps.	154
Sur le triangle dont le cercle circonscrit et le cercle des neuf points se coupent orthogonalement (J. N.)	155

(*) Pour les rectifications voir pp. 88, 200, 232, 256; de plus, p. 254, Q. 1300, lire $bc - a^2$, au lieu de $bc + a^2$. Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.
Sur un triangle particulier, par M. Delahaye 182
Sphères de Malfatti dans le tétraèdre régulier, d'après M. Godeaux (J. N.) 183
Exercice de Géométrie, par M. Hernandez 217
Sur le tétraèdre, d'après M. Cikot 217
Formules relatives aux rayons des cercles tritangents, d'après M. Vercellin 241
Sur un disant théorème chinois, par M. T. Hayashi 257
Sur un triangle particulier, par M. G. Delahaye 264
Sur trois cercles du plan d'un triangle, par M. Hernandez 269
Question 1517; solution par M. Rose 32
Question 1521; solution par M. Abramescu 36
Question 1523; solutions par MM. Chanteux, Majorin, etc. 37
Question 1535; solution par MM. Seam, Dupont, etc. 38
Question 1530; solution par M. Abramescu 52
Question 1460; note de M J. Neuberg. 64
Question 1527, 1540; solutions par MM. Dupont et Neuberg 77
Question 1543; solution par M. Weber. 83
Question 1536; solutions par MM Malaise et Verheugen 103
Question 1544; solutions par MM. Bastin, Servais, etc. 105
Question 1548; solution par M. Weber. 107
Question 1551; solutions par MM. Rose, Abramescu, etc. 109
Question 1554; solution par MM. Dupont, Abramescu, etc. 110
Question 1531; solution par MM. Lez, Bastin, etc. 135
Question 1550; solution par M. Bastin. 138
Question 1552; solutions par MM Verkaart, Davis, etc. 161
Question 1556; solution par M. Verkaart. 192
Question 1563; solution par M. Sterkens 196
Question 1561; solution par J. Rose et H. Lez. 223
Question 1576; solution par M. Abramescu. 249
Question 1588; solution par M. Ch. Nicaise, etc. 275

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur une enveloppe (J. N.). 44
Sur les transformations linéaires; par M. F. G. Teixeira 57
Sur un théorème de Laguerre (J. N.) 61
Exercice de géométrie analytique, par M. H. Ploumen 177
Théorème sur les quadriques, par M. Cikot 184
Géométrie segmentaire, par M. Tabascof 211
Sur un théorème de Chasles, par M. J. Neuberg. 233
Concours de l'enseignement moyen (1906). Géométrie analytique. Solution par M. L. Godeaux 242
Question 1529; solutions par MM. Sterkens, Abramascu, etc. 50
Question 1532; solutions par MM. Gob, Lez, etc. 53
Question 1513; solutions par MM. Bastin, Abramescu, etc. 71
Question 1518; solution par M. Neuberg 78
Question 1541; solutions par MM. Dalle, Retali, etc. 80
Question 1542; solution par M. Aenden Boom 82
Question 1545; solution par MM. Dupont, Abramescu. 86
Question 1537; solutions par MM. Bastin, ... 103

Pages.
Question 1522; solutions par MM. Bastin, De Backer, etc. 132
Question 1549; solution par M. Bastin. 136
Question 1558; solution par M. Retali 139
Question 1559; solution par M. Retali. 194
Question 1560; solution par M. Ferreira 244
Question 1565; solution par M. Rose 246
Question 1578; solution par M. Barisien 250
Question 1587; solution par M. Dupont 278

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR; COURBES ET SURFACES TRANSCENDANTES; COMPLEXES.

Concours d'admission de l'Ecole polytechnique en 1905; solution par M. Absolonne. 22
Sur l'existence du plan tangent, par M. C. Wasteels 145
Sur les lieux discontinus ou suites iteratives de points, par M. J. Neuberg (suppl. de 10 pages).
Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches, par C. Servais (suppl. de 23 pages).
Sur l'hypocycloïde de Steiner, par M. E. Weber. 240
Un lieu discontinu, par M. E. Delville. 269
Question 376; solutions par MM. Bastin et Neuberg 27
Question 1519; solutions par MM. Barisien, Van Dinter, etc . . . 33
Question 1524; solutions par MM. Retali, Droz-Farny. 48
Question 1535; solution par M. Dupont 63
Question 1553; solution par M. Dupont 221
Question 1572; solution par M. Lez 247
Question 1578; solution par M. Barisien 250
Question 1571; solutions par MM. Abramescu, Lez, etc. 271

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; SÉRIES.

École Polytechnique de Paris. Concours de 1905. Solution par M. Ch. Brignon. 68
Sur une formule approchée donnant x en fonction de $\sin x$ et $\cos x$, par M. P. Stäckel 89
Sur quelques transformations de courbes, par J. Neuberg (suppl. de 12 pages).
Exercices de calcul intégral, par M. E. N. Barisien. 116, 152
Sur quelques transformations géométriques, par M. Demoulin 169
Sur l'emploi de la formule de N. Mercator, par M. A. Aubry 203
Question 1539; solution par MM Rose, Verheugen, etc. 79
Sur la question 1534, par M. P. Bastin. 92
Question 1520; solution par MM. Abramescu, Bastin, etc. 100
Question 1533; solution par M. Couvert 101
Question 1481; solution par M. Neuberg 198
Question 1538; solutions par MM. Verheugen et Mansion. 159, 188
Question 1177; solutions par MM. Rose et Barisien. 185, 270
Question 1567; solution par M. Verheugen 220

HISTOIRE; BIBLIOGRAPHIE; VARIÉTÉS.

Pages

1. Ch. Hermite. Œuvres. Tome I. 2. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes (P. M.) 19
Salmon-Fiedler. Kegelschnitte (J. N.) 20
W. Mantel. Getallenleer (J. N.) 21
Schüssler. Axonometrie (J. N.) 21
Couturat. Algèbre de la logique 46
Couturat. Les principes de mathématiques 46
Cl. G. Bachet. Problèmes plaisants et délectables 46
Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften. 46
Fr. Schülte. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie (J. N.) . . . 47
G. Holzmüller. Planimetrie für das Gymnasium (J. N.) 47
H. Wieleitner. Ebene algebraïsche Kurven höherer Ordnung (Cl. Servais) 47
1. P. Bachmann. Zahlenkörper. 2. E. Lindelöf. Résidus. 3. Nielsen. Cylinderfunktionen. 4. Belza. Calculus of Variations 6. Z. de Galdeano. Teoria de las Funciones. 7. O. Stolz et J. A. Gmeiner. Funktionentheorie 66
D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie (P. M.) 67
K Th. Vahlen. Abstracte Geometrie 67
Bonnes et mauvaises désignations historiques d'après M. Zeuthen (P. M.) 69
H. Mandart. Géométrie analytique plane (P. M.) 94
Müller-Plath. 1. Lehrbuch der Mathematik 2. Sammlung von Aufgaben 94
Doll und P. Nestle. Lehrbuch der praktischen Geometrie 95
C. A. Laisant. Initiation mathématique (J. N.). 95
Seliwanoff. Lehrbuch der Differenzenrechnung (P. M.) 96
G. Vivanti. Analytische Functionen 97
Sur la méthode d'enseignement en Amérique, d'après M. Collins 120
H. B. Fine. A College Algebra 124
Ch. Fassbinder. Approximations numériques 125
J. Tannery. Leçons d'algèbre et d'analyse 126
Fr. Rogel. Das Rechnen mit Vorteil 157
M. d'Ocagne. Le calcul simplifié (P. M.) 157
J. Schul. Etudes sur les assurances-vie (E. Fagnart) 158
E. Cesáro. 1. Analysi algebrica. 2 Calcolo infinitesimale. 3. Algebraische Analysis und Infinitesimalrechnung. 179
I. Lobatchewsky. 1. Imaginäre Geometrie. 2. Pangeometrie. 180
J. Thomae. Elliptische Functionen. 181
N. Nielsen. Gammafunktion 182
Necrologie. 1. De Tilly. 2. E. Cesáro. 3. G. de Longchamps 201
M. Simon. Methodik der elementaren Arithmetik (H. Bosmans, S. J.) . . 214
J. Thomae Analytische Geometrie der Ebene (H. Bosmans, S J.) . . . 215
E. Gelin. Trigonométrie 216
L. de Presiouan. Abel 216
G. Vivanti. Funzioni poliedriche e modulare 217
Gutschke. Mathematische Uebungsaufgaben 239
Pour une histoire de la géométrie analytique d'après G. Loria (H. Bosmans, S. J.) 260

Rapport sur le prix décennal de mathématiques (P. Mansion) (Supplément de 24 pages).

Joseph-Marie De Tilly (1837-1906). Esquisse biographique par P. Mansion (Supplément de 11 pages).

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 1251 à 1263, 1264 à 1267, 1268 à 1272, 1273 à 1275, 1276 à 1279, 1280 à 1284, 1285 à 1289, 1290 à 1295, 1296 à 1305, 1306 à 1315 page 32, 55, 87, 111, 142, 166, 199, 230, 253, 277.

Ecole polytechnique de Paris. Concours d'admission de 1905. Solutions . 23, 68

Ecole polytechnique de Paris. Concours d'admission de 1906 164

Concours général de l'enseignement moyen (1906). Solution 242

SUPPLÉMENTS (96 pages).

1. P. MANSION. Rapport du jury chargé de décerner le prix décennal de mathématiques pures (Période de 1894-1903) (24 pages).
2. J. NEUBERG. Sur quelques transformations de courbes (12 pages).
3. E. GELIN. Formules relatives à l'angle de Brocard et exercices sur les lignes trigonométriques de l'arc de 3° (16 pages).
4. J. NEUBERG. Sur les lieux discontinus ou suites itératives de points (10 pages)
5. CL. SERVAIS. Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches (23 pages)
6. P. MANSION. J. M. De Tilly (1837-1906). Esquisse biographique (11 pages).

QUESTIONS.

Solutions de questions posées dans les deux premières séries.

597. . .	(1) VII, 280 . . 218	1177. . .	(2) VIII, 176 . 185, 270
876. . .	(2) III, 216 . . 27		

Questions résolues et non résolues des tomes I à VI de la troisième série.

R = Résolue; NR = Non Résolue.

Tome I

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1335	215	NR	1338	240	NR

Tome II

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1371	128	NR	1378	184	NR
1374	152	NR			

Tome III

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1429	184	NR	1448	280	NR
×1447. . . .	280	NR			

Tome IV

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1451	32	NR	1492	240	R
1466	103	64	×1496	264	221
1467	104	NR	×1499	280	NR
1481	215	139	1500	280	NR
×1488	216	NR			

Tome V

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1507	56	NR	1532	200	52
1508	56	R	1533	200	101
1509	56	130	1534	200	92
1511	88	NR	×1535	200	88
1512	88	NR	×1536	232	108
1513	88	71	1537	232	103
×1517	111	82	1538	232	159, 188
1518	111	73	1539	232	79
1519	112	88	×1540	232	77
1520	112	100	1541	255	80
1521	144	86	1542	256	82
1522	144	132	×1543	256	83
×1523	144	87	×1544	256	105
1524	144	48	1545	256	86
×1525	144	NR	1546	280	NR
×1527	168	77	1547	280	NR
1529	168	50	×1548	280	107
1530	168	52	1549	280	136
×1531	200	135	×1550	280	138

Tome VI

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
×1551	40	109	×1576	168	249
×1552	40	161	1577	168	R
1553	40	221	1578	168	250
×1554	40	110	1579	158	NR
1555	40	163	1580	168	R
×1556	55	192	1581	200	R
1557	55	NR	1582	200	R
1558	56	139	1583	200	R
1559	56	194	1584	200	R
×1560	56	244	×1585	200	R
×1561	88	223	×1586	232	R
1562	88	224	1587	232	273
×1563	88	196	×1588	232	275
1564	88	NR	1589	232	R
1565	88	246	1590	232	R
1566	112	R	1591	255	R
1567	112	226	1592	255	NR
×1568	112	R	×1593	256	R
×1569	112	197	1594	256	R
1570	112	NR	1595	256	R
1571	144	271	1596	280	NR
1572	144	247	1597	280	NR
×1573	144	R	1598	280	NR
1574	144	R	1599	280	NR
×1575	144	R	1600	280	NR

Questions des deux premières séries résolues mais non publiées.

(I-X) 353, (XI-XX) 892bis, 1057, 1101, 1271, 1275.

Questions non résolues des deux premières séries (voir (2) V, pp. 30 et 113).

(I-X) 513, 598. (XI-XX) 825, 905, 953, 1046, 1079, 1087, 1107, 1123, 1144, 1220, 1225, 1228, 1233, 1240, 1246, 1247.

TABLE DES NOMS.

Cette table ne renferme pas tous les noms cités dans les comptes rendus d'ouvrages; quand un nom revient plusieurs fois dans un article, il n'est indiqué qu'une seule fois dans cette table.

Abel, 216.
Abramescu, 33, 36, 38, 48, 50, 52, 54, 72, 79, 80, 83, 86, 100, 105, 110, 130, 135, 168, 232, 244, 246, 249, 252, 271, 275, 277.
Abeolonne, 22.
Aenden Boom, 82.
Apollonius, 33, 59, 69, 194, 247, 261.
Archimède, 70, 185.
Aristote, 70.
Aubert, 59.
Aubry, 203.
Bachet, 46.
Bachmann, 66.
Baillaud, 19.
Baltzer, 261.
Barbette, 17, 197.
Barisien, 33, 40, 44, 48, 52, 55, 80, 87, 88, 101, 103, 105, 109, 112, 116, 132, 135, 136, 143, 144, 152, 193, 196, 200, 231, 232, 244, 246, 247, 250, 253, 254, 255, 273, 275, 276, 279, 280.
Barran, 168.
Bastin, 27, 36, 37, 38, 49, 50, 54, 71, 79, 80, 83, 85, 86, 92, 100, 104, 109, 110, 133, 135, 136, 134, 142, 162 169.
Beard, 167, 168, 232, 250, 273.
Bernoulli, 96, 204.
Biot, 264.
Bolza, 66.
Boole, 46.
Borda, 207.
Bosmans (S. J.), 214, 216, 264; Suppl.
Bourget (H), 19.
Bragelongne, 263.
Braunmühl (von), 260.
Briggs, 204.
Brignon, 68.
Brocard, 43, 53, 54, 84, 185, 198, 218, 270
Brouncker, 208.
C (A), 38, 40, 110.
Callet, 206.
Caraccioli, 263.
Catalan, 16, 259.
Cesàro (E.), 179, 201.
Chanteux, 37.
Chasles, 233.
Chassiotis, 79.
Chevrel, 41.
Chou-ta, 258, 260.
Cikot, 96, 184, 218.
Clairaut, 263.
Collignon, 168.
Collins, 121.
Comberousse (de), 145, 258.
Cotes, 205.
Couturat, 46.
Couvert, 49, 54, 80, 102, 105.
Cramer, 263.
Dalle, 80.
Davis, 163.
Debacker, 33, 54, 133.
Degueldre, 73.
Delahaye, 135, 183, 264, 273, 277.
Delambre, 205.
Delville (Edouard), 269.
Demeyer (Edgar), 33.
Demoulin, 169.
Deprez, 33, 59.
Descartes, 238, 261.
De Vries (Jan), 59.
Dewulf, 26.
Doll, 95.
Dubourguet, 205
Dupont (Fr.), 33, 38, 50, 54, 72, 77, 79, 80, 86, 105, 109, 110, 163, 164, 222, 244, 252, 273, 277.
Euclide, 5, 70.
Eudoxe, 70.
Euler, 41, 96, 206, 263.
Fagnart, 158.
Fassbinder, 125.
Fauquemberghe, 220.
Fermat, 93, 96, 185, 262.
Ferreira, 244, 249.
Fibonacci, 255.
Fiedler, 20.
Fine, 124.
Fitz-Patrick, 41.
Frégier, 139.
Fujita (Sadasuke), 258.
Fujita (Kagen), 258.
Galdaneo (de), 66.
Garnier, 205.
Gauss, 143, 211.
Gelin, 216.
Gerardin, 41, 218.
Gergonne, 64.
Gisolf, 105.
Gmeiner, 66.
Gob, 53, 253.
Godeaux, 109, 183, 242.
Greenstreet, 257.
Gregory, 203.
Gua de Malves, 263.
Gutschke, 239.
Gutzmer, 97, 257.
Guyon, 125.
Halley, 204.
Haros, 208, 209.
Haton de la Goupillière, 175.
Hayashi, 257.
Hernandez, 198, 217, 234, 269, 278.
Hermite, 19.
Heiberg, 46.
Hilbert, 67.
Holzmüller, 47.
Hopital (Marquis de L'), 262.
Hopkins, 113.
Huntington, 125.
Jahnke, 46.
James (William), 120.
Janne, 79, 244.
Jérabeck, 118.
Kant, 46,
Kantor (S), 124, 144, 168.
Klein (Felix), 239.
Kovalewski, 180.
Kutnewsky, 95.
L., 15.
Labosne, 46.
Lacroix, 264.
Lagrange, 96, 205, 263.
Laguerre, 161, 200, 238.
Laisant, 95, 239.
Lampe, 89.
Lavernède, 208.
Lebesgue (H.), 66.

Lemoine (Emile), 45, 59, 111, 278, 277.
Lez, 35, 49, 54, 80, 85, 88, 101, 105, 111, 134, 135, 163, 193, 223, 244, 246, 252, 271, 275, 277.
Liebmann, 180.
Lindelöf (E.), 66.
Lindt, 47.
Lobatschefsky, 180.
Longchamps (G. de), 154, 201.
Loria (Gino), 94, 260.
Lucas, 96.
Maclaurin, 263.
Majorin, 37, 38, 109, 135, 163, 194, 249, 252.
Maisse, 103, 164.
Malfatti, 183.
Malo, 83.
Mandart, 94.
Mannheim, 129.
Mansion (P.), 20, 67, 70, 93, 94, 96, 115, 146, 169, 182, 188, 192, 202, 216, 230, 232.
Mantel, 21, 39, 97.
Markoff, 96.
Maryuma (Ryôgen), 258.
Maryuma (Ryôkwan), 258.
Mathieu (Saigon), 233.
Mataro, 259.
Mention, 17.
Mercator, 203.
Mikami, 257.
Mirea (St.), 237.
Mineur, 66.
Mittag-Leffler, 216.
Monge, 194, 264.
Monck, 118.
Müller, 95.
Müller (Conradt), 47.
Müller (R.), 156.
Nagasawa, 258.
Nagel, 64, 93.
Neper, 69.
Nesbitt, 40, 161.
Nestlé, 95.
Neuberg, 14, 21, 22, 26, 31, 39, 44, 45, 46, 47, 51, 53, 56, 59, 64, 65, 71, 76, 78, 79, 83, 86, 88, 96, 97, 104, 105, 109, 112, 123, 129, 133, 138, 139, 156, 170, 184, 192, 200, 202, 211, 224, 233, 243, 249, 256, 269, 272, 275, 280.
Newton, 69, 96, 263.
Nicaise, 276.
Nicole, 263.
Nicolesco, 61.
Nielsen, 66, 182.
Nozaki, 259.
Ocagne (d'), 157, 229.
Omori, 259.
Ots, 255.
Ovidio, 94.
P., 37.
Pampuch, 55.
Pappus, 69.
Parent, 263.
Pascal (Blaise), 70, 157.
Peano, 46.
Pelz, 22.
Perrot, 211.
Peslouan (Lucas de), 216.
Petcoff, 109.
Petit Bois, 122.
Petroff, 244.
Peyrard, 70.
Picard (Emile), 19.
Piakhovo, 109, 111, 139, 221, 274, 277.
Plath, 95.
Ploumen, 177.
Poincaré, 67.
Poinsot, 185.
Prange, 244, 246, 256.
Proth, 220.
Puydt (Edm. de), 32, 36
Pythagore, 69.
Reeves, 279.
Retali, 40, 48, 50, 56, 81, 82, 134, 140, 194, 222.
Roberval, 262.
Rocquigny (de), 220.
Rogel, 157.
Rose, 32, 35, 49, 54, 56, 79, 80, 86, 100, 101, 109, 111, 138, 144, 164, 168, 185, 194, 197, 200, 223, 232, 244, 246, 249, 252, 274, 277, 280.
Rouché, 145, 258.
Russell, 46.
Rutherford, 59.
Salmon (G.), 29, 94.
Sanjana, 88, 223.
Sawayama, 259.
Schäfli, 112.
Scheutz, 158.
Schroeder, 46.
Schroeter, 63.
Schuh, 97.
Schul, 158.
Schülte, 47.
Schüssler, 21.
Seam (Ereslav), 38, 49, 54, 86, 135, 138, 139, 142.
Seliwanoff, 96.
Servais (Cl.), 48, 50, 76, 94, 104, 105, 133, 194.
Sharp, 204.
Shervin, 204.
Simon (Max), 214.
Simson (R.), 105, 123, 144.
Sollertinsky, 27, 105, 108.
Speidell, 204.
Spiers, 87.
Stäckel, 89.
Steiner, 17, 116, 240.
Sterkens, 50, 83, 86, 196.
Stern, 188.
Stieltjes, 19.
Stirling, 205, 206.
Stolz, 66.
Sylvester, 237.
Tatascoff, 211, 275, 277.
Tannery (Jules), 196, 200.
Tarry (H.), 229.
Tchebicheff, 158.
Teilhet, 220.
Teixeira (Gomes), 57.
Terquem, 43.
Terracini, 274.
Thieme, 78.
Thomae, 182, 215.
Tilly (De), 5, 201.
Townsend, 65.
Vahlen, 67.
Van Aubel (H.), 52, 112.
Van de Griend, 112.
Van Dinter, 33, 35, 100, 105, 109, 110, 142, 249, 274.
Vercellin, 241.
Verheugen, 79, 103, 159, 227, 256.
Verkaart, 109, 110, 112, 143, 144, 161, 193, 197, 256, 266, 273, 274.
Vigarié, 94.
Vivanti, 97, 217.
Vuibert, 123, 168, 253, 268, 279.
Wallis, 203.
Wasteels (C.), 145.
Weber (E.), 83, 108, 111, 240
Wieleitner, 47, 180.
Wisselink, 93.
Youngmann, 88, 112.
Zeuthen, 69.

Extrait du *Moniteur belge* du 7-8 août 1905, n° 219-220.

MINISTÈRE DE L'INTÉRIEUR ET DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

—

Rapport du jury chargé de décerner le prix décennal de mathématiques pures (période de 1894-1903) (1).

[ABRÉVIATIONS. 1° ASB = *Annales de la Société scientifique de Bruxelles;* A = première partie, B = seconde partie; 2° BB = *Bulletin de l'Académie royale de Belgique;* 3° BM = *Bulletin des sciences mathématiques de Darboux;* 4° BSMF = *Bulletin de la Société mathématique de France;* 5° CR = *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris;* 6° MCB = *Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers de l'Académie royale de Belgique;* 7° M8B = *Mémoires in-8 de l'Académie royale de Belgique.* L'année, la série, le tome et les pages sont indiqués de la manière suivante : BB, 1895, (3), XXX, 61-66 = Bulletin de l'Académie royale de Belgique, année 1895, 3e série, tome XXX, pages 61-66.]

MONSIEUR LE MINISTRE,

Le jury, chargé par arrêté royal du 20 mars 1904 de décerner le prix au meilleur travail sur les mathématiques pures, publié pendant la période décennale, de 1894 à 1903, s'est réuni le 16 avril, le 14 mai, le 21 octobre et le 26 novembre 1904; le 11 février, le 11 mars, le 25 mars et le 30 juin 1905. Dans les deux premières séances, il a arrêté le programme de ses travaux :

(1) Le jury était composé de MM. P. Mansion, professeur à l'université de Gand, président-rapporteur; Jos. Carnoy, professeur à l'université de Louvain; C. Le Paige, professeur à l'université de Liége; J. Massau, professeur à l'université de Gand, et Ad. Mineur, professeur à l'université de Bruxelles, secrétaire.

il a décidé de n'examiner que les écrits qui présentent un caractère suffisant d'originalité ou d'importance; ensuite il a écarté du concours, à la demande des auteurs eux-mêmes, des notes ou mémoires publiés pendant la période actuelle, mais qui, à leurs yeux, n'étaient que la continuation de recherches plus importantes publiées dans la période antérieure.

C'est ainsi que le présent rapport, qui a été approuvé dans la dernière séance du jury, ne contient l'analyse que des travaux de mathématiques pures publiés pendant la période décennale par MM. J. Beaupain, E. Mathy, E. Goedseels, C. Wasteels, M. Stuyvaert, François Deruyts, Cl. Servais, A. Demoulin et Ch.-J. de la Vallée Poussin.

I. *J. Beaupain.* M. J. Beaupain a publié, pendant la période décennale, outre plusieurs notes moins importantes, six mémoires d'analyse tous plus ou moins apparentés à la théorie des eulériennes, auxquels il faut bien rattacher deux mémoires antérieurs qui ont paru en 1893.

Dans le premier de ceux-ci *Sur quelques produits infinis* (MCB, 1893, LIII, 1-8), il démontre plusieurs relations dues à Catalan ou en trouve d'autres analogues. Dans le second, *Sur l'intégrale eulérienne de première espèce* (MCB, 1895, LIII, 1-18), il développe cette fonction en produit infini.

Le premier mémoire contient des applications de la série hypergéométrique de Gauss. C'est à l'étude de propriétés de fonctions plus générales que l'auteur s'est appliqué dans trois *Mémoires sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (MCB, 1894, LIV, 1-46, 1-47; 1897, LVI, 1-52). Après avoir défini ces fonctions, M. Beaupain établit les équations différentielles auxquelles elles satisfont, il détermine les solutions de ces équations sous forme d'intégrales définies et rencontre dans cette recherche, à côté de résultats déjà obtenus par des géomètres éminents, un certain nombre de propriétés nouvelles.

La considération des intégrales eulériennes met un peu plus tard M. Beaupain sur la voie de recherches *Sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions de Jacques Bernoulli* (MCB, 1901, LIX, 1-33). On peut aussi citer dans le même

ordre d'idées le mémoire *Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin* (MCB, 1903, LIX, 1-64). Cette étude a conduit M. Beaupain à des résultats dus à M. Glaisher, résultats ignorés alors par l'auteur. Mais il en avait trouvé un grand nombre d'autres relatifs au développement en série du logarithme des fonctions étudiées.

Ce logarithme fait encore l'objet d'un autre travail *Sur la fonction lΓa* (MCB, 1903, LXII, 1-11), où il démontre par une voie propre, outre plusieurs relations nouvelles, des théorèmes dus à Hermite, Bourguet, Stieltjes, etc., et des généralisations de quelques-uns de ces théorèmes.

La complication, peut-être nécessaire, des formules de M. Beaupain en rend impossible l'exposition en langage ordinaire. Le fait qu'il retrouve, comme cas particuliers, une foule de propriétés découvertes par les géomètres cités plus haut, fait bien voir que les sujets auxquels il s'est attaché sont d'un ordre assez élevé. M. Beaupain se montre, sur plusieurs points, le continuateur heureux de son éminent maître Catalan. Il a de plus l'honneur d'avoir simplifié ou généralisé plusieurs résultats dus à Hermite. Hermite, d'ailleurs, à diverses reprises, a encouragé ses travaux.

Le jury a donc cru devoir mentionner les recherches de M. Beaupain d'une façon fort honorable, d'autant plus que l'auteur, ingénieur en chef des mines, ne peut consacrer que de rares loisirs à des études aussi abstraites.

II. *E. Mathy*. M. Mathy est un autodidacte qui, d'instituteur primaire, est devenu professeur de mathématiques supérieures à l'athénée royal d'Anvers, après avoir conquis à l'université de Bruxelles, le grade de docteur spécial en sciences mathématiques.

Il s'est occupé des applications de la théorie des fonctions elliptiques à la géométrie, à la mécanique rationnelle et à la physique mathématique dans sept mémoires assez courts, sauf le dernier, mais contenant tous des résultats originaux à côté de théorèmes anciens retrouvés simplement ou bien exposés sous une forme ou nouvelle, ou plus pratique.

Citons spécialement, pour ne pas entrer dans le domaine des mathématiques appliquées, sa thèse inaugurale sur le *Calcul des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur* (Gand, Hoste, 1896, 39 pp. in-8° : extrait dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville, 1896, (5), II, 305-316), où il exprime ces composantes au moyen des fonctions elliptiques de Jacobi et de Weierstrass; son étude *de l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène* (*Journal de Liouville*, 1898, (5), IV, p. 231-237), que l'on peut regarder comme une suite du mémoire précédent. Il y démontre, entre autres, le théorème suivant : un ellipsoïde homogène, à trois axes inégaux, dont les molécules sont soumises à leurs attractions mutuelles, devient une figure d'équilibre relatif quand il tourne autour de son plus petit axe, avec une vitesse angulaire uniforme déterminée par la forme de l'ellipsoïde.

Citons encore le mémoire sur le *Mouvement d'un solide qui n'est soumis à aucune force et qui se meut autour d'un point fixe* (Gand, Hoste, 1898; 18 pp. in-8°); enfin quelques paragraphes, au fond de pure analyse, de son travail intitulé *Applications des fonctions elliptiques à la mécanique, à la géométrie et à la physique* (Gand, Hoste, 1903; 43 pp. in-4°).

Cet ensemble de notes savantes fait grand honneur à M. Mathy à qui des occupations professionnelles absorbantes ne doivent guère laisser non plus beaucoup de loisirs.

III. *E. Goedseels.* M. Goedseels, administrateur inspecteur de l'Observatoire Royal, a publié pendant la période qui nous occupe dix-huit notes ou mémoires sur les coordonnées astronomiques, sur la théorie du niveau à bulle et celle du prisme à réflexion, sur la nomographie, sur les principes de la mécanique, sur le théorème de Bernoulli, enfin sur la théorie des erreurs. Ces écrits ont paru dans la *Revue des questions scientifiques* ou dans les *Annales de la société scientifique*. On lui doit en outre un ouvrage assez étendu, intitulé : *Théorie des erreurs d'observation* (Paris, Gauthier-Villars, 1902, XIII, 184 pp. in-8°).

Parmi ces travaux, nous devons signaler son *Étude sur les*

procédés de simplification des calculs (ASB, 1899, XXIII, B, p. 1-54) qui est une contribution importante à la théorie des abaques à transversales quelconques. Les types d'abaques qu'il a imaginés ont été retrouvés systématiquement peu après par M. d'Ocagne.

Dans ses recherches sur la théorie des erreurs, M. Goedseels s'est attaché spécialement à mettre en lumière les avantages et les inconvénients que présentent les diverses méthodes réellement employées ; il a renouvelé complètement l'exposé de la méthode de Tobie Mayer qu'il a simplifiée de la manière la plus heureuse au point de la transformer en une méthode nouvelle quand il n'y a que deux inconnues ; il a simplifié de même la méthode de Cauchy. Ses diverses études sur la méthode des moindres carrés contiennent aussi des vues originales dont il faudra désormais tenir compte : il a plus nettement délimité qu'on ne le fait ordinairement les hypothèses subjectives que l'on y introduit souvent d'une manière inconsciente.

IV. *C. Wasteels.* Des onze notes ou mémoires publiés pendant la période décennale par M. Wasteels, quelques-uns se rapportent aux applications des mathématiques à la biologie ou à la chimie et nous n'avons pas à en parler ici. Dans d'autres (*Mathesis*, 1896, XVI, 241-245, 1899, XIX, 9-15 ; 1902, XXII, 217-220, 241-244), il traite avec beaucoup d'habileté et de rigueur des questions de quadrature en ne se servant que des méthodes antérieures à l'invention de l'analyse infinitésimale. Mais les notes les plus remarquables qu'il ait fait paraître se rapportent à la géométrie générale (*Mathesis*, 1901, XXI, 65-69, 183, 265-267 ; 1902, XXII, 39-42). Il a démontré que les bissectrices, les hauteurs et les médiatrices d'un triangle se coupent en un seul point idéal ou réel (à distance finie ou infinie), qu'un triangle euclidien ou non est isocèle quand il a deux bissectrices ou deux médianes égales, sauf toutefois s'il est riemannien, dans le cas des médianes. Ces démonstrations sont faites par voie purement synthétique, comme chez Lobatchefsky et Bolyai, et l'auteur n'utilise que les théorèmes antérieurs strictement nécessaires. Ceux qui se sont exercés dans ce domaine des spéculations rela-

tives à la géométrie générale savent combien il est facile de faire des pseudo-démonstrations où l'on admet des postulats équivalents à la vérité que l'on veut établir et ils apprécieront ces recherches de M. C. Wasteels sur un sujet en apparence élémentaire.

V. *M. Stuyvaert.* Les exigences d'un laborieux enseignement à l'athénée royal de Gand n'ont pas empêché M. Stuyvaert de publier un grand nombre de notes mathématiques dans *Mathesis* et dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* une remarquable dissertation inaugurale, puis cinq mémoires qui ont paru dans les recueils de l'Académie royale de Belgique. Nous ne pouvons indiquer que d'une manière générale l'objet principal des mémoires les moins étendus de M. Stuyvaert : dans la plupart d'entre eux, il s'occupe de la théorie des courbes planes ou gauches du troisième ou du quatrième ordre et en démontre des propriétés anciennes ou nouvelles par une méthode personnelle.

Mais il convient d'analyser plus longuement sa dissertation inaugurale et surtout ses *Recherches relatives aux connexes de l'espace* (M8B, 1901, LXI, 1-60).

Dans ce dernier mémoire, qui a obtenu une mention honorable au concours de l'Académie en 1899, l'auteur étend à l'espace la théorie des connexes dans le plan, inventée par Clebsch à la fin de sa glorieuse carrière. Un élément de l'espace étant caractérisé par un point et un plan uni, un connexe (m, n) est dit d'ordre m et de classe n, quand il existe entre les coordonnées homogènes des points et des plans d'éléments de l'espace une relation du degré m par rapport aux coordonnées de points, de degré n par rapport aux coordonnées de plans. A tout point de l'espace correspond une surface T_n enveloppe des plans du connexe, à tout plan une surface S_m, lieu des points du connexe. M. Stuyvaert cherche l'équation de T_n en coordonnées cartésiennes ou pluckériennes ponctuelles et celles de S_m en coordonnées tangentielles analogues. Il considère la surface relative à un point (ou à un plan) donné, lieu des points (ou enveloppes des plans) dont les T_n passent par ce point (ou dont les S_m sont tangents à ce plan). Il étudie ensuite les connexes conjugués,

réglés ou non, les coïncidences ou éléments communs à deux connexes, et en particulier, la coïncidence principale d'un connexe, formée de ceux de ces éléments faisant partie du connexe identique (1, 1). M. Stuyvaert détermine une équation aux dérivées partielles qui représente un système de surfaces telles que par chaque point du connexe passe une infinité de surfaces dont les plans tangents en ce point enveloppent le cône des coïncidences principales correspondant.

La dissertation inaugurale de M. Stuyvaert est une *Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du 2e ou du 3e ordre* (Gand, Hoste, 1902, VIII-73 pp. in-8°), en nombre simplement ou doublement infini. Il s'y occupe surtout d'une surface unicursale du 8e ordre, engendrée par des coniques jouissant des propriétés suivantes : 1° elles sont situées dans un plan qui passe par un axe fixe ; 2° elles s'appuyent sur cinq directrices rectilignes. Cette surface contient quarante droites, réelles ou imaginaires, formant vingt coniques dégénérées, puis les cinq directrices et l'axe fixe, qui est une droite sextuple de la surface. Celle-ci est représentable sur un plan.

VI. *François Deruyts*. Ce jeune géomètre, dont la science déplore la mort récente, a publié plusieurs travaux importants de géométrie supérieure dont le point de départ se trouve dans son *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 1890, (2) XVII, 208 pages). Dans ce travail, François Deruyts n'avait qu'effleuré l'étude des éléments neutres ; il l'a reprise dans une suite de mémoires ultérieurs où il s'occupe des groupes neutres communs à diverses involutions, des groupes neutres contenant des éléments multiples, des groupes neutres d'espèce quelconque (BB, 1893, (3), XXVI, 232-235 ; 1894, XXVII, 495-517 ; 1896, XXXI, 664-674 ; 1898, XXXV, 196-206 et 885-894 ; XXXVI, 194-204).

Les procédés dont le regretté géomètre fait usage sont tous d'une grande simplicité et presque intuitifs et, par là même, rendent peut-être moins apparentes les difficultés qu'il a eu à vaincre. Elles apparaissent mieux dans les applications qu'il en a

faites surtout si on rapproche certaines d'entre elles des résultats obtenus d'une manière différente par un analyste distingué, M. Lerch.

M. François Deruyts a fait usage, dans son mémoire fondamental, de deux modes de transformation, à l'exemple de Cremona et Em. Weyr, mais en donnant à leurs procédés une extension considérable. Dans l'un, il fait usage des courbes rationnelles de notre espace; dans l'autre, il emploie les espaces linéaires à plus de trois dimensions. La première méthode permet de traduire les propriétés d'involution en théorèmes sur les éléments des courbes rationnelles. C'est ainsi qu'il a pu découvrir de nombreuses propriétés des plurisécantes de cette espèce de courbes (BB, 1898, (3) XXXV, 287-294). Cette étude l'a conduit à la considération de certaines configurations, qui se rencontrent dans les courbes gauches rationnelles du sixième ordre (BB, 1898, (3) XXXV, 421-438; XXXVI, 187-193) et qui sont intimement liées à la théorie des surfaces du troisième ordre.

Ce bref aperçu des travaux de François Deruyts fait pressentir ce que la géométrie eût pu attendre de lui s'il n'avait été prématurément arraché à ses recherches de prédilection. Dans sa courte carrière professorale, il a formé quelques élèves : M. Versluys, qui a publié une très remarquable étude sur les singularités des surfaces du troisième ordre; M. Fairon, à qui l'on doit quelques mémoires (imprimés dans le Recueil de la Société royale des sciences de Liége) sur la représentation géométrique des involutions qu'il convient de signaler ici parce qu'ils continuent les recherches de François Deruyts. M. Fairon s'est attaché à représenter sur des courbes rationnelles planes ou gauches des systèmes de formes algébriques des quatre premiers degrés.

VII. *Cl. Servais.* Le jury chargé de juger le concours de sciences physiques et mathématiques de la précédente période a signalé avec éloge les travaux de M. Servais sur la théorie des transformations quadratiques, sur celle des quadriques et sur la courbure. M. Servais a continué ses recherches en en étendant considérablement le domaine. Outre une vingtaine de notes de géométrie projective qu'il a fait paraître dans divers recueils, il

a publié, surtout dans les recueils de l'Académie de Belgique, d'importants mémoires dont il convient de faire une analyse plus détaillée. Il a aussi fait paraître le *Cours de géométrie analytique de l'Université de Gand* (Gand, De Laere, 1902, autographié; 162 + 172 pp. in-4), où il a exposé d'une manière systématique plusieurs des vues originales qu'il a défendues dans ses mémoires.

On peut classer les travaux de M. Servais en trois groupes. I. 1. *Quelques formules sur la courbure des surfaces* (BB, 1894,(3), XXVII, 896-904). 2. *La courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité* (M8B, 1898, LVIII, p. 1-48). II. 1. *Sur les imaginaires en géométrie. Applications à la théorie des cubiques gauche* (M8B, 1894, XLIX, 1-64). 2. *Sur le système focal* (M8B, 1895, LII, 1-11). 3. *Sur la projectivité imaginaire* (M8B, 1895, LII, 1-51). III. 1. *Sur les faisceaux de Coniques.* (*Le matematiche pure et applicate,* 1901, 1, 254-263; *Mathesis,* 1902, XXII, suppl. p. 1-10). 2. *Sur les faisceaux de quadriques* (Présenté à l'Académie en 1901, analysé en 1903, BB, 1021-1024; publié en 1904, M8B, (2), I, 1-53).

Dans le premier groupe, il faut distinguer surtout le second mémoire cité. L'auteur y étudie les relations entre les éléments infinitésimaux correspondants de deux courbes ou de deux surfaces soit collinéaires, soit réciproques. Partant de l'égalité des rapports anharmoniques de quaternes homologues, il retrouve par une méthode uniforme des propositions dues à divers géomètres et en établit beaucoup de nouvelles. Ce qui fait la fécondité et l'élasticité de la méthode de M. Servais, c'est que ses formules fondamentales renferment des éléments arbitraires : il suffit de les particulariser pour en déduire sans peine une foule de théorèmes remarquables sur les cubiques gauches, les surfaces réglées, les complexes linéaires, etc.

Les mémoires du second groupe constituent les fondements d'une géométrie synthétique projective imaginaire. Les travaux de Poncelet, de Steiner, de von Staudt, de Chasles, de Cremona et de leurs continuateurs ont donné pendant le siècle qui vient de finir un grand développement à la géométrie projective synthétique; elle forme maintenant une science bien ordonnée et systé-

matique; au point de vue pratique, elle est devenue la préface obligée de la graphostatique. Dans ce domaine, on peut le plus souvent se limiter à la considération des éléments réels des figures. Mais il n'en est pas toujours ainsi et la géométrie projective synthétique a l'ambition d'aborder toutes les questions accessibles à la géométrie analytique, les éléments imaginaires compris. Chasles n'a réussi que partiellement à les introduire dans la géométrie supérieure parce qu'il ne les définissait que par leurs fonctions symétriques. C'est von Staudt qui est parvenu à définir géométriquement un élément imaginaire isolé; il caractérise les points et les droites imaginaires par une forme involutive en attribuant un sens aux deux couples d'éléments qui servent à la déterminer. M. Servais, adoptant la définition de von Staudt, s'est proposé, dans les mémoires cités, d'établir une géométrie projective imaginaire, d'une portée générale.

Dans le premier, M. Servais définit d'abord les points imaginaires, et les droites imaginaires portant un point réel; pour les droites imaginaires de l'espace qui n'ont aucun point réel, on peut les regarder comme les intersections de plans imaginaires dont les supports ne se rencontrent pas ou les déduire d'un système involutif gauche. L'auteur étudie ensuite avec détail l'involution dans le quadrilatère et dans une conique, en s'attachant spécialement aux cas où les figures renferment des points ou des droites imaginaires. La dernière partie est surtout à remarquer : en considérant l'involution dans les cubiques gauches, l'auteur parcourt les nombreuses propriétés de ces courbes, propriétés anciennes ou nouvelles, et les rend tout à fait générales par des démonstrations indépendantes de la réalité des éléments de la figure.

M. Servais applique la même méthode dans le mémoire sur le système focal. Il établit les propriétés fondamentales de ce système en tenant compte des éléments imaginaires et déduit de là, d'une manière simple, les propriétés métriques du complexe linéaire.

Dans le travail sur la projectivité imaginaire, M. Servais adopte une certaine définition géométrique qui lui est propre

pour le rapport anharmonique imaginaire d'une quaterne d'éléments d'une forme géométrique de première ou de seconde espèce : il est la somme d'un rapport anharmonique réel et d'un rapport anharmonique purement imaginaire. L'auteur construit géométriquement le premier, le coefficient réel du second et le module de la somme. Il étend à ces rapports anharmoniques imaginaires toutes les relations qui existent entre les rapports anharmoniques réels, étudie les formes imaginaires projectives de première et de seconde espèce et démontre les théorèmes fondamentaux sur les coniques, les quadriques réglées imaginaires, les cubiques gauches, dans les cas les plus généraux.

M. Servais a complété l'œuvre des fondateurs de la géométrie supérieure synthétique dans un second ordre de questions. Il s'agit de celles où Poncelet employait son célèbre principe de continuité et celles où les analystes recourent à la théorie des limites. Dans les deux mémoires sur les faisceaux de coniques et sur les faisceaux de quadriques, l'auteur examine les situations relatives de deux coniques ou de deux quadriques dans les diverses hypothèses concernant les éléments doubles de deux espaces projectifs à deux ou à trois dimensions. Il met en évidence ces diverses hypothèses et étudie, dans les cas limites comme dans les cas généraux, les variétés de faisceaux de coniques ou de quadriques, sans recourir au principe de continuité, ni dans le sens de Poncelet, ni dans le sens de la théorie des limites.

Comme on le voit, M. Servais est aujourd'hui l'un des principaux représentants de la géométrie projective synthétique. Il l'a complétée et généralisée par l'introduction systématique de l'imaginaire et aussi par l'exclusion du principe de continuité. Il se montre très habile à profiter des ressources de cette science et à les accroître d'une manière personnelle. Ses travaux occupent une place très distinguée parmi les publications mathématiques de la dernière période décennale.

VIII. *A. Demoulin*. M. A. Demoulin, professeur à l'université de Gand, a publié pendant la dernière période décennale, dans divers recueils belges ou français, trente-quatre notes trop

souvent concises à l'extrême et deux mémoires assez étendus et portant sur les sujets les plus variés d'analyse et de géométrie, surtout de géométrie infinitésimale. Il s'y montre le digne disciple de deux maîtres illustres, M. Darboux et S. Lie en continuant, complétant et parfois rectifiant leurs travaux.

La nature fragmentaire, au moins en apparence, des recherches d'ailleurs si originales de M. Demoulin, n'en permet guère une analyse d'ensemble comme pour celles de M. Servais. Nous sommes donc forcé ne subdiviser plus qu'il ne le faudrait et d'une manière quelque peu artificielle, l'exposé que nous allons en faire.

1. *Analyse.* En analyse, nous citerons une démonstration extrêmement simple de la propriété fondamentale des wronskiens, devenue immédiatement classique (*Mathesis,* 1897, XVII, 62-63); puis une démonstration complète et absolument rigoureuse du théorème de Rolle, qui deviendra classique aussi quand elle sera connue davantage (*Mathesis,* 1902, XXII, 81-84).

2. *Analyse infinitésimale des courbes gauches.* M. Demoulin a écrit sur ce sujet plusieurs notes parmi lesquelles nous en distinguons deux, l'une *Sur la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur* (BSMF, 1900, XXVIII, 180-183) où il exprime cette torsion au moyen des wronskiens, l'autre *Sur la détermination de quelques classes de courbes gauches,* par une propriété de leur torsion (*Mathesis,* 1902, XXII, 129-134, 165-166).

3. *Transformations géométriques.* Nous devons signaler ici d'abord une note remarquable par les résultats élégants qui y sont établis *Sur les relations entre les éléments infinitésimaux de deux figures homographiques ou corrélatives* (CR, 1898, CXXVI, 390-392).

Dans une note *Sur la transformation de M. Lie et sur les surfaces enveloppes de sphères* (BM, 1898, (2), XXII, 174-177), M. Demoulin démontre la propriété générale suivante de la transformation de Lie : *lorsque le rapport anharmonique de quatre points d'une génératrice d'une surface réglée est le même que celui des plans tangents en ces points, ce rapport se reproduit sur une circonférence après la transformation.*

Citons encore une note *Sur une correspondance entre deux espaces réglés* (CR, 1899, CXXIX, 200-202), où l'auteur généralise le théorème de Dupin sur la transformation d'une congruence de normales à une famille de surfaces en une autre congruence de même espèce par l'effet d'un certain nombre de réfractions et de réflexions ; puis *Une interprétation géométrique des coordonnées* α, β, ξ *de Darboux* (BM, 1899, (2) XXIII, 242-244), au moyen d'une transformation de Lie suivi d'une transformation d'Ampère.

4. *Complexes et congruences.* La théorie des complexes et des congruences est l'un des sujets préférés de M. Demoulin ; il y a consacré d'abord le *Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites (complexes, congruences, surfaces réglées)* (Bruxelles, Castaigne, 1894, in-8° de VI-115 pp.). Ce travail contient une théorie complète du complexe linéaire et des systèmes de pareils complexes avec application aux surfaces réglées et notamment aux quadriques ; une étude détaillée des systèmes formés par les axes centraux des complexes linéaires appartenant à des systèmes qui dépendent de un, deux ou trois paramètres ; enfin une note sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires. Parmi les résultats obtenus par l'auteur, nous citerons le suivant : *Les droites autour desquelles le moment d'inertie d'un corps a une valeur donnée forment un de ces complexes.*

Dans une note sur la *Détermination des surfaces qui présentent un réseau conjugué exclusivement formé de courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe tétraédral* (BSMF, 1897, XXV, 83-91), l'auteur démontre que les surfaces qui jouissent de cette propriété appartiennent à trois classes de surfaces obtenues par M. Raffy en résolvant un autre problème. La question avait déjà été traitée par Lie, mais une classe de surfaces avait échappé à l'illustre géomètre.

Dans une autre communication *Sur la théorie générale des congruences rectilignes* (CR, 1900, CXXX, 1701-1703), M. Demoulin démontre plusieurs relations très remarquables

entre les éléments infinitésimaux des deux nappes de la surface focale des congruences rectilignes les plus générales.

D'autres notes (CR, 1894, CXVIII, 242-244 ; 1897, CXXIV, 1077-1079 ; BM, 1894 (2), XVIII, 233-240 ; CR, 1901, CXXXIII, 628-630), renferment encore bien des résultats intéressants dont quelques-uns ont été signalés par M. Darboux dans son grand ouvrage, mais il est impossible de tout dire.

5. *Déformation des surfaces.* Pendant la période décennale, M. Demoulin a publié sept notes sur la déformation des surfaces. Dans les deux premières (CR, 1894, CXVIII, pp. 337-340 ; BSMF, 1894, XXII, 47-49), il fait connaître une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces spirales et de celui des surfaces de révolution. La note publiée en 1895 *Sur une déformation des surfaces de révolution* (BB (3), XXX, 61-66), contient une déformation non comprise dans celles que donne l'application du théorème de Bour et une forme nouvelle des coordonnées de la surface minima la plus générale. Une autre note de la même année (BSMF, XXIII, 71-75) *Sur la détermination des couples de surfaces applicables tels que la distance de deux points correspondants soit constante,* renferme d'abord une solution géométrique de ce problème résolu par Ribaucour, puis la détermination de toutes les congruences pour lesquelles le segment des points limites est toujours nul.

Nous devons nous contenter de donner le titre de recherches plus récentes tout aussi ingénieuses et tout aussi approfondies : *Sur les surfaces susceptibles d'une déformation continue avec conservation d'un système conjugué* (CR, 1901, CXXXIII, 265-268). *Sur les systèmes conjugués persistants* (CR, 1901, CXXXIII, 986-989). *Sur la déformation des conoïdes droits* (CR, 1902, CXXXIV, 1038-1041). Dans la dernière note, il trouve entre autres résultats, une génération très remarquable des surfaces applicables sur un certain conoïde droit, en partant d'une courbe dont le rayon de torsion est proportionnel à l'arc.

6. *Surfaces minima et autres surfaces.* M. Demoulin s'est beaucoup occupé aussi de la théorie des surface minima et d'autres surfaces, sujets étroitement apparentés à ceux dont il a

été question plus haut et il y a obtenu des résultats aussi remarquables que ceux que nous avons signalé jusqu'ici.

Dans une note *Sur un théorème de Ribaucour et sur une propriété caractéristique des surfaces spirales* (BSMF, 1895, XXIII, 198-203), il donne, outre la démonstration d'un théorème de Ribaucour, une propriété caractéristique des surfaces spirales. Dans une note *Sur les surfaces minima applicables sur des surfaces de révolution ou sur des surfaces spirales* (BM, 1897, (2) XXI, 244-245), il trouve, en s'appuyant sur des résultats signalés plus haut, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface minima soit l'enveloppe moyenne d'une congruence telle que les développables de celle-ci correspondent aux lignes de courbure de la surface. Il retrouve les résultats trouvées par M. Schwarz, en y ajoutant de nouvelles surfaces, entre autres la surface minima réglée de Ribaucour. Il prouve ensuite, d'une manière très élégante, qu'à toute surface minima applicable sur une surface de révolution correspond, une surface applicable sur une surface spirale.

Deux ans après (1899), M. Demoulin publie un mémoire *Sur les surfaces minima réglées et sur les surfaces minima à lignes de courbure planes* (M8B, 1899, LVIII, 1-38). Il indique d'abord comment on peut déterminer une surface minima connaissant la représentation sphérique de ses lignes asymptotiques ou de ses lignes de courbure. Il étudie ensuite les surfaces minima réglées, détermine les fonctions de Weierstrass qui conviennent à ces surfaces et passant rapidement sur la surface de la vis à filet carré, il s'attache surtout à la surface minima imaginaire de Ribaucour ; il démontre que ces lignes de courbure sont planes, que ses asymptotiques sont les cubiques gauches dont les deux courbures sont constantes. Il prouve ensuite, après Lie, que chacune des surfaces minima réglées peut être engendrée d'une infinité de manières par la translation d'une courbe. Ces propriétés de surfaces imaginaires le conduisent à des propriétés de surfaces réelles. Enfin il reprend un problème déjà traité par M. Darboux, savoir la détermination de toutes les surfaces minima, dont les lignes de courbure sont planes. Il ajoute aux

surfaces réelles obtenues par l'éminent géomètre français, la surface minima de Ribaucour et toutes ses associées, ainsi qu'une surface minima isolée dont il donne les fonctions caractéristiques. M. Demoulin a désigné certaines surfaces imaginaires qu'il a rencontrées sous le nom de surface quasi-de révolution et de surfaces quasi-moulures. Ces désignations sont devenues classiques comme plusieurs de ses résultats, retrouvés plus tard par M. Scheffers.

Voici la liste de quelques autres notes de M. Demoulin sur la théorie des surfaces : 1. *Démonstration géométrique d'une propriété des lignes asymptotiques d'une surface réglée* (*Mathesis*, 1899 (2) IX, p. 159). 2. *Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont égales* (CR, 1900, CXXX, 823-825). 3. *Sur deux surfaces qu'on peut adjoindre à toute surface de Weingarten* (CR, 1900, CXXX, 1701-1703). 4. *Sur une classe particulière de surfaces réglées* (CR, 1902, CXXXII, 1097-1100). 5. *Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires* (BSMF, 1901, XXIX, 39-50).

Dans cette dernière note et dans la deuxième, l'auteur complète de la manière la plus heureuse des résultats obtenus par M. Appell et M. Darboux. Il trouve, par exemple, une surface dont les lignes de courbure d'un système sont égales qui est réelle, bien qu'elle soit fournie par une développable imaginaire. Il montre ainsi, comme il l'a fait en d'autres occasions, de quelle importance est, en géométrie aussi, pour le domaine réel, la considération de figures imaginaires. Nous mentionnerons enfin d'une manière toute spéciale, la quatrième note à cause de la grande difficulté du problème qui y est résolu.

7. *Systèmes triplement orthogonaux*. Dans une note très importante *Sur les surfaces qui peuvent dans plusieurs mouvements engendrer une famille de Lamé* (CR, 1903, CXXXVI, 1541-1544), M. Demoulin étudie les mouvements d'un trièdre trirectangle dont la position dépend de trois paramètres et grâce à cette idée ingénieuse, il démontre très élégamment les deux théorèmes de Petot relatifs aux familles de Lamé. Il aborde ensuite un problème déjà posé par M. Darboux en 1890 dans son

Cours de la Sorbonne, savoir la recherche des surfaces qui, dans p mouvements hélicoïdaux linéairement indépendants engendrent une famille de Lamé. Dans le cas où $p = 1$, il généralise un résultat obtenu par M. Lucien Lévy; dans le cas où $p = 2$, il ajoute aux solutions indiquées par Catalan, MM. Petot, L. Lévy, Adam et Cosserat, deux nouvelles solutions. La solution générale du problème n'est pas connue, mais il parvient à le résoudre quand les deux mouvements se ramènent à deux rotations concourantes, il traite complètement les cas où $p = 3, 4$ ou 5; le cas où $p = 6$ avait été traité déjà par M. Lévy.

On voit par cette longue analyse que les travaux de M. Demoulin en géométrie infinitésimale sont de premier ordre : il a complété des recherches où d'illustres mathématiciens contemporains avaient laissé des lacunes; il a résolu des problèmes posés que personne n'avait su résoudre; il a découvert des propriétés nouvelles d'une réelle importance. Il possède au plus haut degré l'intuition géométrique qui lui fait découvrir la vraie source de propriétés déjà connues, lui permet de les généraliser et de trouver des propriétés complètement nouvelles. Il sait aussi manier avec habileté les équations aux dérivées partielles et s'en servir pour donner des démonstrations élégantes et vraiment complètes des propriétés que l'intuition lui a révélées.

Ses recherches constitueraient vraiment un ensemble de premier ordre dans le domaine de la géométrie infinitésimale, s'il avait pu se résigner à abandonner les recherches nouvelles dont il s'occupe maintenant pour réunir en un ouvrage *systématique* l'ensemble de ses principales recherches anciennes et s'il y avait exposé sous une forme moins concise la démonstration complète des résultats qu'il a obtenus.

IX. *Ch.-J. de la Vallée Poussin*. Dans la période précédente, M. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université catholique de Louvain, avait étudié avec une rare pénétration deux questions générales d'analyse ardues et importantes : 1° la théorie de la dérivation et de l'intégration sous le signe des intégrales définies dans le cas où l'une des limites est infinie et dans celui où la fonction intégrée devient infinie entre les limites. Son travail sur

ce sujet est devenu classique; 2° la question de l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle $y' = f(x, y)$, dans le cas ou la fonction f est discontinue.

Ces recherches anciennes se rapportent toutes à l'analyse infinitésimale. Pendant la période de 1894 à 1903, M. de la Vallée Poussin a considérablement agrandi le domaine de ses travaux; il a repris et traité plus complètement qu'autrefois la première question indiquée plus haut et en a abordé beaucoup d'autres relatives à des points difficiles d'analyse; il a fait une excursion en géométrie non euclidienne; enfin et surtout, il a publié huit mémoires d'arithmétique supérieure qui constituent une œuvre extrêmement remarquable.

Géométrie non euclidienne. M. De Tilly a démontré qu'il ne peut exister que trois espèces de géométrie ayant en commun, avec le système usuel, les notions de droite et de plan. Il a fait cette démonstration au moyen de considérations de cinématique équivalentes à des conditions de continuité relatives aux angles et aux côtés d'un triangle ou d'un secteur circulaire. M. de la Vallée Poussin, dans une note *Sur la géométrie non euclidienne* (ASB, 1895, XIX, B, 17-26), prenant son point de départ dans ces conditions de continuité, démontre très finement que la géométrie métrique générale est tout entière réductible à l'équation différentielle $Fa = \sqrt{(1 - k^2 F^2 a)}$, où Fa désigne la circonférence de rayon a, a un facteur près. La démonstration de M. de la Vallée Poussin établit en même temps que la géométrie sphérique est la même dans tout système de géométrie.

Analyse infinitésimale. M. de la Vallée a fait paraître dans divers recueils un assez grand nombre de notes et de mémoires d'analyse, puis il a publié un remarquable *Cours d'analyse infinitésimale* (édition lithographiée, Louvain, Uytspruit, t. I, en 1898, 212 p. in-4°; t. II, en 1899, 222 p. in-4°; seconde édition du t. I, en 1903, ibid. et Paris, Gauthier-Villars) qui n'est pas seulement un manuel, mais aussi une œuvre scientifique.

Dans la note *sur la série de Lambert* (ASB, 1896, XX, A, 56-62), il fait la sommation de cette série célèbre au moyen

d'intégrales contenant sous le signe d'intégration, outre des fonctions trigonométriques assez compliquées ou leurs logarithmes, les logarithmes des fonctions thêta, ou les fonctions elliptiques *pu*, *ζu* de Weierstrass, ou celles de Jacobi. Ces recherches ont été continuées par M. C. Hansen, dans les *Mathematische Annalen*, t. LIV.

Dans trois notes ultérieures, il établit qu'il y a deux surfaces de révolution minima, ou une seule, ou qu'il n'y en a aucune qui s'appuie sur deux circonférences (ASB, 1900, XXIV, A, 49-52), que la fonction continue sans dérivée de Weierstrass a dans tout intervalle une infinité de maxima et de minima (ASB, 1093, XXVII, A, 92-95), que l'aire d'une surface courbe peut être regardée comme la limite d'un aire polyédrique dont tout point est à une distance indéfiniment décroissante de la surface et réciproquement (ASB, 1903, A, XXVII, 90-91). Il s'est aussi occupé de la méthode de Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet (ASB, 1894, XVIII, A, 11-12).

F. Lucas a généralisé le théorème de Rolle étendu aux racines imaginaires des équations algébriques sous la forme suivante : le polygone formé par les droites joignant les points-racines les plus extérieurs de l'équation donnée contient sur son contour ou à l'intérieur tous les points-racines de l'équation dérivée. Mais ce théorème, déjà connu de Gauss, n'est que la généralisation de celui-ci : les racines réelles de l'équation dérivée d'une équation algébrique à coefficients réels sont comprises entre la plus grande et la plus petite racine de celle-ci. M. de la Vallée Poussin a trouvé une généralisation bien plus profonde du théorème de Rolle (ASB, 1902, XXVI, B, 1-12 ; *Mathesis*, 1902, supplément) : il indique le moyen d'obtenir certaines trajectoires-frontières réunissant deux à deux les racines de l'équation primitive sur lesquelles il y a au moins un point-racine de l'équation dérivée.

Mais le plus important mémoire d'analyse du savant professeur est celui qu'il a publié sous le titre : *Réduction des intégrales multiples généralisées* (*Journal de Liouville*, 1899, (5) V, 191-204 ; extrait, CR, 1898, CXXVII, 950-951). En 1892 et 1893,

il avait donné la théorie générale de la réduction des limites de sommes doubles à deux intégrales simples superposées dans le cas où la fonction sous le signe devient infinie d'une certaine manière et des théorèmes relatifs à l'inversion des signes d'intégration quand la limite de somme double n'est pas déterminée. Dans son nouveau mémoire, l'auteur, au moyen de raisonnements d'une extrême subtilité, est arrivé à des résultats bien plus généraux. Il remplace une limite de somme multiple, chaque fois qu'elle est déterminée, par une suite d'intégrales simples superposées où l'ordre des intégrations est indifférent ; quand la limite de somme multiple n'est pas déterminée, la suite des intégrales simples superposées est comprise entre ses limites d'indétermination. Personne, pensons-nous, n'a été aussi loin dans ce difficile problème de la réduction des intégrales multiples portant sur des fonctions soumises à aussi peu de restrictions que ne l'a fait ici M. de la Vallée Poussin.

La substance de plusieurs des notes précédentes se retrouve sous une forme plus accessible dans le *Cours d'analyse* de l'auteur. On y rencontre d'ailleurs une foule d'innovations pédagogiques excellentes qu'il serait trop long de signaler. Au point de vue de la précision et de la rigueur dans les questions difficiles, il est supérieur aux ouvrages analogues de MM. Humbert, Goursat et Appell; sur plusieurs points, il va même plus loin que l'admirable cours de Jordan, parce que l'auteur prend son point de départ dans une autre théorie des ensembles.

Théorie des nombres. Laissons de côté deux courtes notes, l'une *sur les fractions continues et les formes quadratiques* (ASB, 1895, XIX, A, 111-113), où l'auteur montre l'utilité du calcul des quotients incomplets par excès, idée qui a été reprise par Auric, en 1902, dans le *Journal de Lionville;* l'autre, sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques (ASB, 1898, A, 84-90). Nous pourrons alors classer les travaux d'arithmétique supérieure de M. de la Vallée Poussin sous trois chefs : *A. Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques* (M8B, 1895, XLIX, 1-59); *B. Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression*

arithmétique (M8B, 1896, XLIX, 1-32); *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers* (cinq mémoires, ASB, 1896, XX, B, 281-397; 1897, XXI, 251-368; résumé, 1897, XXI, A, 2-13, 60-73); *C. Sur la fonction Zêta de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée* (M8B, 1899, LIX, 1-72).

Il est presque impossible de donner une idée de ces beaux travaux sans y consacrer beaucoup de pages et sans employer le langage de l'analyse. Nous nous contentons donc de quelques indications sommaires sur chacun d'eux.

A. Dans les *Recherches arithmétiques, etc.,* l'auteur expose, pour la première fois, sans faire appel à des considérations étrangères, une théorie complète des genres et de la composition des formes binaires quadratiques. Gauss a dû recourir à la théorie des formes ternaires, Dirichlet, Kronecker, le P. Séguier à l'analyse infinitésimale, pour établir le théorème fondamental sur la formation par duplication des formes proprement primitives du genre principal.

B. Théorème de Dirichlet et recherches analytiques, etc. Dirichlet a démontré, en 1837, un théorème d'apparence presque élémentaire, mais qui appartient, en réalité, à l'arithmétique supérieure : « Toute progression arithmétique contient une infinité de nombres premiers, si le premier terme et la différence n'ont aucun facteur commun ». M. de la Vallée Poussin est parvenu à démontrer ce beau théorème en éliminant de la démonstration toutes les difficultés qui tiennent à la considération des formes quadratiques. Son travail est fondé sur une étude nouvelle de la fonction *Zêta* de *s* de Riemann ; il donne à cette fonction une forme telle que l'on puisse y supposer *s* imaginaire ; ensuite, il raisonne sur la dérivée logarithmique de *Zêta,* ce qui en élimine une constante difficile à déterminer. De cette manière, non seulement il démontre simplement le théorème de Dirichlet, qui devient ainsi utilisable dans la théorie des formes quadratiques, mais, de plus, il établit deux propositions asymptotiques remarquables sur les nombres premiers appartenant à la progression arithmétique.

Dans les cinq mémoires publiés sous le titre *Recherches analytiques, etc.*, l'auteur a en vue des théorèmes asymptotiques analogues d'un accès toujours de plus en plus difficile. Dans le premier, il s'occupe des nombres premiers en général ; il prouve d'abord avec une entière rigueur le théorème suivant : Parmi les racines imaginaires de *Zêta* de *s*, aucune n'a l'unité pour partie réelle, puis celui-ci deviné par Stieltjes : la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à un nombre donné est asymptotique à ce nombre, et enfin un troisième que nous renonçons a énoncer en langage vulgaire.

Le second mémoire traite des nombres premiers représentables par une forme linéaire ; le troisième de ceux qui sont représentables par une forme quadratique proprement primitive de déterminant négatif ; le quatrième étudie les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant positif ; enfin, dans la cinquième, ceux qui sont représentables à la fois par deux formes, l'une linéaire, l'autre quadratique. Dans chacun de ces quatre mémoires, l'auteur arrive à deux théorèmes asymptotiques analogues à ceux qu'il a rencontrés pour les nombres premiers en général dans le premier mémoire ; mais au prix de quels efforts : à chaque nouveau pas qu'il fait en avant, il doit considérer de nouvelles fonctions de plus en plus compliquées, au lieu de la fonction *Zêta* de Riemann.

M. Torelli, dans sa monographie couronnée en 1900 par l'Académie de Naples, *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato* (Naples, 1901) a analysé les recherches de M. de la Vallée Poussin et les a comparées à celles des géomètres qui se sont occupés de sujets analogues : ces résultats, dit-il, dépassent de beaucoup ceux de MM. Poincaré et Stanievitch et les comprennent (p. 179). C'est le plus bel éloge que l'on puisse en faire.

C. Le dernier mémoire dont il me reste à parler *Sur la fonction Zéta de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée* est la suite et le couronnement de l'ensemble des recherches dont il vient d'être question. Le problème qui y est traité a fait l'objet des méditations de géomètres

illustres, Legendre, Gauss, Dirichlet, Tchebychef, Sylvester, Riemann, et plus récemment de MM. Gram, Hadamard, von Mangoldt. Le premier, M. de la Vallée Poussin est enfin parvenu à démontrer ce théorème capital : *le logarithme intégral est une expression asymptotique du nombre des nombres premiers plus exacte que toutes ses expressions possibles sous forme finie* et il assigne une limite de la différence entre le logarithme intégral et le nombre des nombres premiers. Il trouve aussi la valeur approchée d'une célèbre série numérique d'Euler qui a pour somme zéro quand le nombre de ses termes est infini.

La difficulté de la question qui est abordée et enfin résolue dans ce mémoire, la connaissance et le maniement facile de toutes les ressources de l'analyse dont l'auteur fait preuve d'un bout à l'autre, l'esprit d'invention qu'il y déploie non seulement dans la marche générale de son travail, mais aussi à chaque page pour surmonter les obstacles sant cesse renaissants qui se dressent devant lui, tout concourt à en faire l'un des mémoires de mathématiques pures les plus remarquables qui aient jamais été publiés en Belgique. La méthode qui y est suivie s'étend d'ailleurs d'elle-même aux nombres premiers de la progression arithmétique.

X. *Conclusion*. Arrivé au terme de cette longue analyse des mémoires de mathématiques pures, publiés en Belgique dans la période décennale (1894-1903), si nous comparons les travaux des concurrents, nous devons d'abord mettre hors de pair ceux de M. Servais en géométrie synthétique, de M. Demoulin en géométrie infinitésimale et de M. de la Vallée en haute analyse et en arithmétique supérieure. Chacun de ces trois groupes de travaux mériterait le prix décennal si l'on faisait abstraction des deux autres. Mais les recherches où M. Servais se montre un si digne continuateur de von Staudt, malgré leur belle ordonnance logique, n'ont pas semblé au jury aussi importantes que celles des deux autres concurrents, parce que la géométrie analytique permet d'arriver par une autre voie aux résultats donnés par la géométrie synthétique. D'autre part, la nature fragmentaire des recherches d'ailleurs si originales et si variées de M. Demoulin, en diminue quelque peu la valeur.

En conséquence, après délibération, interrogé par le président, si, parmi les ouvrages à lui soumis, il en est un qui mérite le prix à l'exclusion des autres et lequel, « *le jury a résolu la question à l'unanimité en faveur de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université catholique de Louvain, pour ses travaux de haute analyse et d'arithmétique supérieure. — Le jury a exprimé le regret, également à l'unanimité, de ne pouvoir partager le prix entre ces travaux et ceux de M. A. Demoulin, professeur à l'Université de Gand, sur la géométrie infinitésimale des courbes, des surfaces, des congruences et des complexes, travaux dont l'importance est bien près d'égaler celle de l'œuvre du lauréat dans un autre domaine.* »

Agréez, Monsieur le Ministre, l'assurance de notre considération très distinguée.

Le Secrétaire,
AD. MINEUR.

Le Président-Rapporteur,
P. MANSION.

Les membres du jury :
C. LE PAIGE, JOS. CARNOY, J. MASSAU.

Bruxelles. — Imp. POLLEUNIS & CEUTERICK, rue des Ursulines, 31.

SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS DE COURBES (*)

PAR

J. NEUBERG,

Professeur à l'Université de Liége.

Dans les NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1867, p. 141, M. Haton de la Goupillière a indiqué les formules qui déduisent, d'une courbe quelconque C, une autre courbe C_1, telle qu'en deux points correspondants il existe un rapport constant, soit entre les deux sous-tangentes, soit entre les deux sous-normales, soit entre la sous-tangente de C et la sous-normale de C_1; ces éléments sont pris soit en coordonnées rectilignes, soit en coordonnées polaires. Cette question m'en a suggéré d'autres analogues que j'ai proposées récemment dans MATHESIS, p. 200, et dans les WISKUNDIGE OPGAVEN, 1905.

Dans le présent travail, je traiterai ces derniers problèmes sous un aspect plus général.

1. Soit C une courbe plane quelconque rapportée aux axes Ox, Oy. Les formules

$$(1) \qquad x_1 = f(x, y), \qquad y_1 = \varphi(x, y)$$

font correspondre à un point $M(x, y)$ de C un point $M_1(x_1, y_1)$ qui engendre une seconde courbe C_1; pour plus de généralité, on peut rapporter le point M_1 à un second système d'axes O_1x_1, O_1y_1.

Soient T et N les points où la tangente et la normale en M à C rencontrent l'axe Ox, T_1 et N_1 ceux où la tangente et la normale en M_1 à C_1 coupent l'axe O_1x_1; nous poserons $OT = t$, $ON = n$,

(*) Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1906, t. XXX, première partie, pp. 66-77.

$O_1T_1 = t_1$, $O_1N_1 = n_1$ et nous écrirons y' et y'_1 pour les dérivées $dy : dx$, $dy_1 : dx_1$. Les lettres α, β, γ, α_1, ..., désigneront des constantes, X une fonction de x seul, Y une fonction de y seul, X' la dérivée $d\mathrm{X} : dx$, Y' la dérivée $d\mathrm{Y} : dy$.

Je me propose de déterminer les formules (1) par la condition qu'une relation homographique lie l'une des quantités y'_1, t_1, n_1 à l'une des quantités y', t, n.

2. Problème I. — Les directions des tangentes MT, M_1T_1 sont liées par la relation

$$(ay' + b)\, y'_1 + (cy' + d) = 0. \tag{2}$$

Des formules (1) on déduit

$$y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\varphi'_x + \varphi'_y y'}{f'_x + f'_y y'}. \tag{3}$$

Substituons cette valeur dans l'équation (2) et ordonnons le résultat par rapport à y'; il vient

$$(a\varphi'_y + cf'_y)\, y'^2 + (a\varphi'_x + b\varphi'_y + cf'_x + df'_y)\, y' + (b\varphi'_x + df'_x) = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu au point (x, y), quelle que soit la courbe C; par conséquent, le coefficient de y'^2, celui de y' et le terme indépendant doivent être nuls. On a donc

$$a\varphi'_y + cf'_y = 0, \qquad b\varphi'_x + df'_x = 0, \tag{4}$$

$$a\varphi'_x + cf'_x + b\varphi'_y + df'_y = 0, \tag{5}$$

relations qui doivent être des *identités* par rapport à chacune des variables x, y.

Les deux premières donnent successivement

$$a\varphi + cf = \mathrm{X}, \qquad b\varphi + df = \mathrm{Y}, \tag{6}$$

$$a\varphi'_x + cf'_x = \mathrm{X}', \qquad b\varphi'_y + df'_y = \mathrm{Y}'. \tag{7}$$

Du rapprochement des égalités (7) et (5) on déduit $\mathrm{X}' = -\mathrm{Y}'$, relation qui ne peut subsister en un point quelconque (x,y) que si $\mathrm{X}' = \alpha$, $\mathrm{Y}' = -\alpha$; par conséquent

$$\mathrm{X} = \alpha x + \beta, \qquad \mathrm{Y} = -\alpha y + \gamma.$$

En portant ces valeurs de X et Y dans les équations (6) et en résolvant ensuite par rapport à f et φ, on trouve pour les formules cherchées

$$x_1 = \frac{-b(\alpha x + \beta) + a(-\alpha y + \gamma)}{ad - bc},$$

$$y_1 = \frac{d(\alpha x + \beta) - c(-\alpha y + \gamma)}{ad - bc}.$$

Nous écartons l'hypothèse $ad - bc = 0$ qui correspond à une homographie *décomposable*. Les valeurs de x_1 et y_1 peuvent encore être écrites ainsi :

$$(8) \quad x_1 = \alpha_1(bx + ay) + \beta_1, \qquad y_1 = -\alpha_1(dx + cy) + \gamma_1.$$

Remarque. — Il est intéressant de traiter directement le cas où $y'_1 = y'$. La condition

$$\frac{\varphi'_x + \varphi'_y y'}{f'_x + f'_y y'} = y$$

se décompose en trois autres :

$$f'_y = 0, \qquad \varphi'_x = 0, \qquad f'_x = \varphi'_y,$$

dont les deux premières montrent que f est une fonction $f(x)$ de x seul et φ une fonction $\varphi(y)$ de y seul ; de la troisième on conclut ensuite $f'(x) = \alpha$, $\varphi'(y) = \alpha$, de sorte que les formules cherchées sont

$$(9) \qquad x_1 = \alpha x + \beta, \qquad y_1 = \alpha y + \gamma.$$

Si les axes O_1x_1, O_1y_1 sont parallèles aux axes Ox, Oy, l'égalité $y'_1 = y'$ suppose les tangentes correspondantes parallèles et les courbes C, C_1 sont homothétiques.

Lorsque les angles $x_1O_1y_1$, xOy sont égaux entre eux, les formules (9) définissent une transformation dans laquelle les tangentes correspondantes font entre elles un angle constant λ.

Cette dernière transformation, si l'on rapporte les deux courbes

C, C_1 à un même système d'axes rectangulaires, donne la condition

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{y_1' - y'}{1 + y_1' y'}, \quad \text{ou} \quad y'y_1' \operatorname{tang}\lambda + y' - y_1' + \operatorname{tang}\lambda = 0,$$

comprise dans la relation (2) si l'on fait $a = d = \operatorname{tg}\lambda$, $b = -1$, $c = 1$. Les formules (8) deviennent maintenant

$$x_1 = \alpha_2 (x \cos\lambda - y \sin\lambda) + \beta_1,$$

$$y_1 = \alpha_2 (x \sin\lambda + y \cos\lambda) + \gamma_1.$$

Elles indiquent une rotation de C autour de O, suivie d'une homothétie et d'une translation.

3. Problème II. — Les tangentes correspondantes marquent sur deux droites l, l_1 deux ponctuelles projectives.

En prenant ces droites pour les axes Ox, O_1x_1, on doit avoir

$$(at + b)\, t_1 + ct + d = 0.$$

Remplaçons t et t_1 par les valeurs

$$t = \frac{xy' - y}{y'}, \qquad t_1 = \frac{x_1 y_1' - y_1}{y_1'},$$

puis y_1' par la valeur (3). Le raisonnement indiqué au § 2 conduit alors aux trois *identités :*

$$(10) \qquad (f\varphi_y' - \varphi f_y')(ax + b) + \varphi_y' (cx + d) = 0,$$

$$(11) \qquad a (f\varphi_x' - \varphi f_x') + c\varphi_x' = 0,$$

$$(12) \qquad (f\varphi_x' - \varphi f_x')(ax + b) - ay (f\varphi_y' - \varphi f_y') - cy\varphi_y' + (cx + d)\varphi_x' = 0.$$

Si l'on divise les égalités (10) et (11) par φ^2, on en tire, par intégration,

$$\frac{f}{\varphi}(ax + b) + \frac{1}{\varphi}(cx + d) = X, \qquad \frac{af}{\varphi} + \frac{c}{\varphi} = Y;$$

puis, en résolvant par rapport à f et φ,

$$(13)\quad f = \frac{-(cx+d)\,Y + cX}{(ax+b)\,Y - aX}, \qquad \varphi = \frac{bc-ad}{(ax+b)\,Y - aX}.$$

Dans l'équation (12), remplaçons les binomes $f\varphi'_x - \varphi f'_x$, $f\varphi'_y - \varphi f'_y$ par leurs valeurs tirées de (11) et (10); nous aurons l'équation aux dérivées partielles

$$(14)\qquad (ax+b)\,\varphi'_x + ay\varphi'_y = 0.$$

Le système différentiel correspondant

$$\frac{adx}{ax+b} = \frac{dy}{y} = \frac{d\varphi}{0}$$

ayant pour solution $\varphi = \lambda$, $ax + b = \mu y$, l'intégrale générale de (14) est

$$\varphi = F(\mu), \qquad \text{où} \qquad \mu \equiv \frac{ax+b}{y}.$$

Ce résultat prouve que le dénominateur de la valeur (13) de φ est fonction de μ seul. D'après cela, si dans Y on remplace y par $\frac{ax+b}{\mu}$, la quantité $(ax+b)\,Y - aX$ ne peut plus contenir x et sa dérivée par rapport à x doit être nulle.

On a donc

$$aY + (ax+b)\,Y'\frac{a}{\mu} - aX' = 0, \quad \text{ou} \quad Y + yY' = X;$$

d'où l'on conclut $Y + yY' = \alpha$, $X' = \alpha$. Par suite

$$yY = \alpha y + \beta, \qquad X = \alpha x + \gamma.$$

Les formules (13) deviennent maintenant

$$(15)\quad x_1 = \frac{\alpha_1 y + \beta\,(cx+d)}{\gamma_1 y + \beta\,(ax+b)}, \qquad y_1 = \frac{(bc-ad)\,y}{\gamma_1 y + \beta\,(ax+b)}.$$

On voit que la transformation considérée est *linéaire* et que les droites Ox, O_1x_1 sont des éléments correspondants. Cette conclusion était à prévoir.

On peut remplacer les formules (15) par d'autres qui permettent facilement de vérifier qu'elles répondent au problème proposé. En effet, la seconde formule (15) donne

$$\frac{bc - ad}{y_1} = \frac{\gamma_1 y + \beta(ax + b)}{y} = \gamma_1 + \beta a \frac{x}{y} + \frac{\beta b}{y},$$

ou, avec d'autres notations,

$$a\frac{x}{y} + \frac{b}{y} + \frac{g}{y_1} + h = 0;$$

par analogie on peut aussi écrire

$$a\frac{x_1}{y_1} + \frac{c}{y_1} + \frac{g'}{y} + h' = 0.$$

Dérivons ces deux dernières équations en considérant y et x_1 comme des fonctions de x, y_1 comme une fonction de x_1; il vient

$$\left(a\frac{y - xy'}{y^2} - \frac{by'}{y^2}\right) = \frac{gy_1'}{y_1^2}\frac{dx_1}{dx},$$

$$\left(a\frac{y_1 - x_1y_1'}{y_1^2} - \frac{cy_1'}{y_1^2}\right)\frac{dx_1}{dx} = \frac{g'y'}{y^2}.$$

Or,

$$x - xy' = -ty, \qquad y_1 - x_1y_1' = -t_1y_1';$$

donc

$$\frac{aty' + by'}{y^2} = -\frac{gy_1}{y_1^2}\frac{dx_1}{dx}, \qquad \frac{at_1y_1' + cy_1'}{y_1^2}\frac{dx_1}{dx} = \frac{g'y'}{y^2}.$$

En multipliant ces égalités membre à membre et en supposant $bc - gg' = ad$, on obtient la relation en t et t_1 d'où l'on est parti.

Remarques. — I. Si les ponctuelles (T), (T_1) ne sont pas semblables, nous pouvons prendre pour O et O_1 les points de fuite; alors tt_1 a une valeur constante k. Les formules cherchées sont maintenant

$$\frac{x}{y} + \frac{g}{y_1} + h = 0, \quad \frac{x_1}{y_1} + \frac{g'}{y} + h' = 0, \quad \text{où} \quad gg' = k.$$

II. Si les ponctuelles (Γ), (Γ_1) sont semblables et que l'on prenne pour O et O_1 deux points homologues quelconques, le rapport $t_1 : t$ a une valeur constante k. On fera donc, dans les formules (15), $a = d = 0$, $b = 1$, $c = -k$, ce qui donne

$$x_1 = \frac{\alpha_1 y + k\beta x}{\gamma_1 y + \beta}, \qquad y_1 = -\frac{ky}{\gamma_1 y + \beta},$$

égalités équivalentes à celles-ci

$$\frac{x_1}{y_1} - \beta\frac{x}{y} + l = 0, \qquad \frac{\beta}{y} + \frac{k}{y_1} + l' = 0,$$

qui permettent facilement de vérifier la condition $t_1 = tk$.

Le cas où les tangentes correspondantes se coupent sur Ox est résolu par les formules

$$x_1 = \frac{\alpha_1 y + \beta x}{\gamma_1 y + \beta}, \qquad y_1 = -\frac{y}{\gamma_1 y + \beta}.$$

4. Problème III. — Les normales correspondantes marquent sur les droites l, l_1 des ponctuelles projectives.

Prenons l, l_1 pour les axes Ox, O_1x_1 de deux systèmes rectangulaires; nous aurons une relation de la forme

$$(an + b)\,n_1 + cn + d = 0.$$

Or, $n = x + yy'$, $n_1 = x_1 + y_1y_1'$; en introduisant ces valeurs de n et n_1 et la valeur (3) de y_1', on trouve les trois identités

$$a\,(ff_y' + \varphi\varphi_y') + cf_y' = 0, \tag{16}$$

$$(ax + b)\,(ff_x' + \varphi\varphi_x') + (cx + d)\,f_x' = 0, \tag{17}$$

$$ay\,(ff_x' + \varphi\varphi_x') + (ax + b)\,(ff_y' + \varphi\varphi_y') + (cx + d)\,f_y + cyf_x' = 0. \tag{18}$$

De la première on déduit par intégration

$$a\,(f^2 + \varphi^2) + 2cf = 2X. \tag{19}$$

En remplaçant dans la troisième les binomes $ff'_y + \varphi\varphi'_y$, $ff'_x + \varphi\varphi'_x$ par leurs valeurs tirées des deux autres, on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$ayf'_x - (ax + b) f'_y = 0.$$

Le système différentiel correspondant

$$\frac{dx}{ay} = -\frac{dy}{ax + b} = \frac{df}{0},$$

a pour solution

$$f = \lambda, \qquad a(x^2 + y^2) + 2bx = \mu,$$

de sorte qu'on peut poser

$$f = F(\mu), \qquad \text{où} \qquad \mu = a(x^2 + y^2) + 2bx.$$

Dans l'égalité (17), remplaçons $ff'_x + \varphi\varphi'_x$ par la valeur tirée de (19), à savoir de

$$a(ff'_x + \varphi\varphi'_x) + cf'_x = X';$$

il vient

$$(bc - ad) f'_x = (ax + b) X'.$$

Mettons encore pour f'_x la valeur $F'(\mu) \cdot 2(ax + b)$; nous aurons

$$2(bc - ad) F'(\mu) = X'.$$

Les variables μ, x étant séparées, on doit poser

$$X' = \alpha, \qquad 2(bc - ad) F'(\mu) = \alpha,$$

d'où l'on conclut

$$X = \alpha x + \beta, \qquad F(\mu) = \frac{\alpha\mu}{2(bc - ad)} + \gamma.$$

On connaît ainsi une première des formules cherchées, à savoir

$$(20) \quad x_1 \equiv f(x, y) \equiv F(\mu) = \frac{\alpha}{2(bc - ad)}[a(x^2 + y^2) + 2bx] + \gamma.$$

y_1 pourrait se tirer de l'égalité (19) qui revient à

$$a(x_1^2 + y_1^2) + 2cx_1 = 2(\alpha x + \beta). \tag{21}$$

Si l'on remarque que l'égalité (20) est susceptible de la forme (21), mais avec interversion des variables (x, y), (x_1, y_1), il est plus élégant de définir la transformation cherchée par les formules (21) et

$$a(x^2 + y^2) + 2bx = 2(\alpha_1 x_1 + \beta_1), \tag{22}$$

où $\alpha\alpha_1 = bc - ad$. Si l'on dérive (21) et (22), on obtient

$$(an_1 + c)\frac{dx_1}{dx} = \alpha, \qquad an + b = \alpha_1 \frac{dx_1}{dx},$$

d'où, par multiplication, une relation linéaire entre n et n_1.

Remarques. — I. Si O et O_1 sont les points de fuite des ponctuelles (N), (N_1), on a

$$x^2 + y^2 = 2(\alpha_1 x_1 + \beta_1), \qquad x_1^2 + y_1^2 = 2(\alpha x + \beta).$$

II. Si O et O_1 sont des points homologues des ponctuelles (N) et (N_1) supposées semblables, faisons $a = 0$, $d = 0$, $b = 1$, $c = -k$ dans les égalités (16), (17) et (18); celles-ci se réduiront à

$$f'_y = 0, \quad ff'_x + \varphi\varphi'_x - kxf'_x = 0, \quad \varphi\varphi'_y - kyf'_x = 0. \tag{23}$$

La première montre que f ne dépend que de x; de la seconde on déduit

$$f^2 + \varphi^2 - 2k\int xf'_x\,dx = 2Y. \tag{24}$$

En dérivant ce résultat par rapport à y on trouve $\varphi\varphi'_y = Y'$; donc, en ayant égard à la troisième des égalités (23), on peut écrire $Y' = kyf'_x$, d'où l'on conclut $f'_x = \alpha$, $Y' = ky\alpha$, de sorte que

$$f = \alpha x + \beta, \qquad Y = \frac{1}{2}ka y^2 + \frac{1}{2}\gamma.$$

L'équation (24) devient alors

$$x_1^2 + y_1^2 - 2k\int \alpha x\,dx = ka y^2 + \gamma.$$

La transformation cherchée correspond donc aux formules

$$x_1 = \alpha x + \beta, \qquad x_1^2 + y_1^2 = k\alpha(x^2 + y^2) + \gamma.$$

Si l'on fait $k = 1$, on a le cas des normales correspondantes qui se coupent sur une droite fixe Ox.

5. Problème IV. — Les ponctuelles (T) et (N_1) sont projectives, de sorte que

$$(at + b)\, n_1 + (ct + d) = 0.$$

On trouve maintenant les trois identités

$$(25) \qquad (ax + b)(ff'_y + \varphi\varphi'_y) + (cx + d) f'_y = 0,$$

$$(26) \qquad a(ff'_x + \varphi\varphi'_x) + cf'_x = 0,$$

$$(27) \qquad (ax + b)(ff'_x + \varphi\varphi'_x) - ay(ff'_y + \varphi\varphi'_y) + (cx + d) f'_x - cyf'_y = 0.$$

Si, dans la troisième, on remplace les binomes $ff'_x + \varphi\varphi'_x$, $ff'_y + \varphi\varphi'_y$ par leurs valeurs tirées des deux autres, on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$(ax + b) f'_x + ayf'_y = 0,$$

qui a pour intégrale

$$(28) \qquad f = \mathrm{F}(\mu), \qquad \text{où} \qquad \mu = \frac{ax + b}{y}.$$

L'égalité (26) donne, successivement,

$$(29) \qquad a(f^2 + \varphi^2) + 2cf = 2\mathrm{Y},$$

$$(30) \qquad a(ff'_y + \varphi\varphi'_y) + cf'_y = \mathrm{Y}'.$$

En éliminant $ff'_y + \varphi\varphi'_y$ entre (25) et (30) on trouve

$$(ax + b)\, \mathrm{Y}' = (bc - ad) f'_y;$$

puis, en ayant égard à (28),

$$(ax + b)\, \mathrm{Y}' = (bc - ad)\, \mathrm{F}'(\mu) \times -\frac{ax + b}{y^2};$$

ou enfin

$$Y'y^2 = -(bc - ad)\,F'(\mu).$$

Les variables y, μ étant séparées, on doit poser

$$Y'y^2 = \alpha, \qquad (ad - bc)\,F'(\mu) = \alpha;$$

par conséquent

$$(31) \qquad Y = -\frac{\alpha}{y} + \beta, \qquad F(\mu) = \frac{\alpha}{ad - bc}\,\mu + \gamma$$

De (31) et (29) on déduit les formules cherchées

$$x_1 = \frac{\alpha}{ad - bc}\,\frac{ax + b}{y} + \gamma, \quad \text{ou} \quad x_1 = \alpha_1\left(a\,\frac{x}{y} + \frac{b}{y}\right) + \gamma.$$

$$a\,(x_1^2 + y_1^2) + 2cx_1 = 2\left(-\frac{\alpha}{y} + \beta\right).$$

La vérification de la solution se fait aisément.

Remarques. — I. Si O et O_1 sont les points de fuite des ponctuelles projectives (T) et (N_1), on a $n_1 t = k$ et les formules cherchées prennent la forme

$$x_1 = \frac{\alpha_1 x}{y} + \gamma, \qquad x_1^2 + y_1^2 = 2\left(-\frac{\alpha}{y} + \beta\right).$$

II. Si les ponctuelles (T) et (N_1) sont semblables et si O et O_1 en sont des points homologues, on a $n_1 = kt$. Or, en faisant $a = d = 0$, $b = 1$, $c = -k$ dans les égalités (25), (26) et (27), on obtient

$$(32) \quad ff'_y + \varphi\varphi'_y - kxf'_y = 0, \quad f'_x = 0, \quad \varphi\varphi'_x + kyf'_y = 0.$$

Il résulte de là que f est une fonction $f(y)$ de y seul et que

$$(33) \qquad f^2 + \varphi^2 - 2kxf = 2X.$$

De (33) on déduit $\varphi\varphi'_x - kf = X'$; en rapprochant ce résultat de la troisième des égalités (32), on trouve

$$X' = -k\,(f + yf').$$

Les variables x, y étant séparées, on doit poser $X = \alpha$, $k(f + yf') = -\alpha$; d'où

$$X = \alpha x + \beta, \quad kyf = -\alpha y + k\gamma \quad \text{ou} \quad f = -\frac{\alpha}{k} + \frac{\gamma}{y}.$$

Par conséquent, les formules cherchées sont

$$x_1 = -\frac{\alpha}{k} + \frac{\gamma}{y}, \qquad x_1^2 + y_1^2 - 2kx\, x_1 = 2(\alpha x + \beta)$$

ou encore

$$x_1 = \frac{\gamma}{y} - \frac{\alpha}{k}, \qquad x_1^2 + y_1^2 = 2k\gamma\frac{x}{y} + 2\beta.$$

La dernière forme se prête mieux à la vérification de la condition $n_1 = kt$.

BRUXELLES. — IMPRIMERIE POLLEUNIS ET CEUTERICK.

FORMULES

RELATIVES A L'ANGLE DE BROCARD

ET

Exercices sur les lignes trigonométriques de l'arc de 3°

PAR

l'Abbé E. GELIN

Professeur de Mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin à Huy (*)

Formules relatives à l'angle de Brocard.

***271.** On peut, des relations

$$\text{[424]} \qquad \begin{aligned} &A + B + C = \pi, \\ &\sin^3\alpha = \sin(A - \alpha)\sin(B - \alpha)\sin(C - \alpha), \end{aligned}$$

ou

$$\text{[425]} \qquad \begin{aligned} &A + B + C = \pi, \\ &\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C}, \end{aligned}$$

déduire un grand nombre de formules, parmi lesquelles les suivantes, où, pour abréger, nous avons posé $\sin A \sin B \sin C = S$:

$$\text{[426]} \qquad \begin{aligned} \cot^2\alpha &= \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2, \\ \operatorname{cosec}^2\alpha &= \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C, \\ \cot^3\alpha &= \cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C + 3\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C; \end{aligned}$$

(*) Ces articles sont extraits de la deuxième édition du *Traité de Trigonométrie plane et sphérique* de M. l'abbé E. GELIN, Namur, Wesmael-Charlier, 1906.

Les formules **[436]** à **[443]** sont nouvelles, ainsi que la troisième des formules **[426]**.

Les numéros **222** à **226** sont aussi nouveaux.

$$\sin(2A+\alpha)+\sin(2B+\alpha)+\sin(2C+\alpha)=3\sin\alpha,$$

[427] $$\cos A\sin(A+\alpha)+\cos B\sin(B+\alpha)+\cos C\sin(C+\alpha)=3\sin\alpha,$$

$$\sin A\cos(A+\alpha)+\sin B\cos(B+\alpha)+\sin C\cos(C+\alpha)=0;$$

[428] $$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin^2 A}=\frac{\sin(B-\alpha)}{\sin^2 B}=\frac{\sin(C-\alpha)}{\sin^2 C}=\frac{\sin\alpha}{\sin A\sin B\sin C};$$

[429] $$\sum\frac{\sin(A+\alpha)}{\sin A}=4\cos\alpha,$$

$$\sum\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin A}=2\cos\alpha,$$

$$\sum\frac{\cos(A+\alpha)}{\sin A}=\operatorname{cosec}\alpha-4\sin\alpha,$$

$$\sum\frac{\cos(A-\alpha)}{\sin A}=\operatorname{cosec}\alpha+2\sin\alpha;$$

[430] $$\cos A\cos B\cos C=S\cot\alpha-1;$$

[431] $$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4S,$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=3-4S\cot\alpha;$$

[432] $$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2S\cot\alpha,$$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=3-2S\cot\alpha;$$

[433] $$\Sigma\sin^2 A\sin^2 B=S^2\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

$$\Sigma\cos^2 A\cos^2 B=3-4S\cot\alpha+S^2\operatorname{cosec}^2\alpha;$$

[434] $$\sin 2A\sin 2B\sin 2C=-8S+8S^2\cot\alpha,$$

$$\cos 2A\cos 2B\cos 2C=1-4S\cot\alpha+8S^2\cot\alpha\cot 2\alpha;$$

[435] $$\Sigma\sin^4 A=4S^2\cot\alpha\cot 2\alpha,$$

$$\Sigma\sin^4 A\cos A=-8S+4S^2\cot\alpha,$$

$$\Sigma\sin^4 A\cos^2 A=2S\cot\alpha-4S^2\cot\alpha\cot 2\alpha,$$

$$\Sigma\sin^4 A\cos^4 A=8S-4S^2\cot\alpha,$$

$$\Sigma\cos^4 A=3-4S\cot\alpha+4S^2\cot\alpha\cot 2\alpha;$$

[436]
$$\Sigma \sin(2A + x) = 3\sin x + 4S\operatorname{cosec}\alpha \sin(\alpha - x),$$
$$\Sigma \cos(2A + x) = 3\cos x - 4S\operatorname{cosec}\alpha \cos(\alpha - x);$$

[437]
$$\Sigma \sin^2(A + x) = 3\sin^2 x + 2S\operatorname{cosec}\alpha \cos(\alpha - 2x),$$
$$\Sigma \cos^2(A + x) = 3\cos^2 x - 2S\operatorname{cosec}\alpha \cos(\alpha - 2x);$$

[438]
$$\Sigma \sin A \sin(A + x) = 2S\operatorname{cosec}\alpha \cos(\alpha - x),$$
$$\Sigma \sin A \cos(A + x) = 2S\operatorname{cosec}\alpha \sin(\alpha - x),$$
$$\Sigma \cos A \sin(A + x) = 3\sin x + 2S\operatorname{cosec}\alpha \sin(\alpha - x),$$
$$\Sigma \cos A \cos(A + x) = 3\cos x - 2S\operatorname{cosec}\alpha \cos(\alpha - x);$$

[439]
$$\Sigma \sin A \sin B \sin(C + x) = 3S\cos x + S\cot\alpha \sin x,$$
$$\Sigma \sin A \cos B \sin(C + x) = S\sin x + S\cot\alpha \cos x,$$
$$\Sigma \cos A \cos B \sin(C + x) = -3\sin x + S\cos x + 3S\cot\alpha \sin x;$$

[439′]
$$\Sigma \sin A \sin B \cos(C + x) = -3S\sin x + S\cot\alpha \cos x,$$
$$\Sigma \sin A \cos B \cos(C + x) = S\cos x - S\cot\alpha \sin x,$$
$$\Sigma \cos A \cos B \cos(C + x) = -3\cos x - S\sin x + 3S\cot\alpha \cos x;$$

[440]
$$\Sigma \sin A \sin(B + x) \sin(C + x) = 2S + S\operatorname{cosec}\alpha \sin(\alpha + 2x),$$
$$\Sigma \sin A \sin(B + x) \cos(C + x) = S\operatorname{cosec}\alpha \cos(\alpha + 2x),$$
$$\Sigma \sin A \cos(B + x) \cos(C + x) = 2S - S\operatorname{cosec}\alpha \sin(\alpha + 2x);$$

[440′]
$$\Sigma \cos A \sin(B+x) \sin(C+x) = -3\sin^2 x + 2S\cot\alpha - S\operatorname{cosec}\alpha \cos(\alpha + 2x),$$
$$\Sigma \cos A \sin(B+x) \cos(C+x) = -3\sin x \cos x + S\operatorname{cosec}\alpha \sin(\alpha + 2x),$$
$$\Sigma \cos A \cos(B+x) \cos(C+x) = -3\cos^2 x + 2S\cot\alpha + S\operatorname{cosec}\alpha \cos(\alpha + 2x);$$

[441]
$$\sin(A + x) \sin(B + x) \sin(C + x) = -\sin^3 x + S\operatorname{cosec}\alpha \sin(\alpha + x),$$
$$\cos(A + x) \cos(B + x) \cos(C + x) = -\cos^3 x + S\operatorname{cosec}\alpha \cos(\alpha + x);$$

[442]
$$\Sigma \sin^3 A \sin(A + x) = -3S\sin x + 4S^2\cot\alpha \operatorname{cosec} 2\alpha \cos(2\alpha - x),$$
$$\Sigma \sin^3 A \cos(A + x) = -3S\cos x + 4S^2\cot\alpha \operatorname{cosec} 2\alpha \sin(2\alpha - x);$$

[442′]
$$\Sigma \cos^3 A \sin(A+x) = 3\sin x + S(5\cos x - 4\cot\alpha \sin x) - 4S^2\cot\alpha \operatorname{cosec} 2\alpha \sin(2\alpha - x),$$
$$\Sigma \cos^3 A \cos(A+x) = 3\cos x - S(5\sin x + 4\cot\alpha \cos x) + 4S^2\cot\alpha \operatorname{cosec} 2\alpha \cos(2\alpha - x);$$

[443]
$$\Sigma \sin^5 A \sin^3(B - C) = 2\cot\alpha \, \Pi \sin^2 A \sin(B - C).$$

EXERCICES SUR LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DE L'ARC DE 3°.

221. PROBLÈME I. *Calculer* $\sin 3^\circ$ *et* $\cos 3^\circ$.

On a d'abord [**69**]

$$\begin{aligned}\sin 42^\circ &= \sin(60^\circ - 18^\circ)\\ &= \sin 68^\circ \cos 18^\circ - \cos 60^\circ \sin 18^\circ\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\\ &= \tfrac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 42^\circ &= \cos(60^\circ - 18^\circ)\\ &= \cos 60^\circ \cos 18^\circ + \sin 60^\circ \sin 18^\circ\\ &= \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\\ &= \tfrac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3});\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sin 3^\circ &= \sin(45^\circ - 42^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 42^\circ - \cos 45^\circ \sin 42^\circ\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\tfrac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\tfrac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)\\ &= \tfrac{1}{16}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{30}-\sqrt{6}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2})\\ [\mathbf{368}] &= \tfrac{1}{16}[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3^\circ &= \cos(45^\circ - 42^\circ)\\ &= \cos 45^\circ \cos 42^\circ + \sin 45^\circ \sin 42^\circ\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\tfrac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\tfrac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)\\ &= \tfrac{1}{16}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{30}-\sqrt{6}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2})\\ [\mathbf{369}] &= \tfrac{1}{16}[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)].\end{aligned}$$

***222.** PROBLÈME II. *Étant donné*

$$\sin 3^\circ = \tfrac{1}{16}[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}],$$

calculer $\cos 3^\circ$ *au moyen de la formule*

$$\cos 3^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 3^\circ}.$$

On a

$$\cos 3^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 3^\circ}$$

$$= \sqrt{1 - \tfrac{1}{256}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right]^2}$$

$$= \tfrac{1}{16}\sqrt{256 - (8+4\sqrt{3})(6-2\sqrt{5}) - 4(4-2\sqrt{3})(5+\sqrt{5}) + 4(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(5+\sqrt{5})}}$$

$$= \tfrac{1}{16}\sqrt{256 - 8(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{5}) - 8(2-\sqrt{3})(5+\sqrt{5}) + 16\sqrt{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}. \qquad (m)$$

Or, si l'on pose $A = 8 + \sqrt{3} + \sqrt{15}$, $B = 10 - 2\sqrt{5}$, on a

$$A^2 - B = (8 + \sqrt{3} + \sqrt{15})^2 - (10 - 2\sqrt{5})$$
$$= 4(18 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15});$$

et si l'on pose encore

$$18 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15} = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$$
$$= x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz},$$

on a, pour déterminer x, y, z, les équations

$$x + y + z = 18, \quad 2\sqrt{xy} = 4\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{xz} = 2\sqrt{5}, \quad 2\sqrt{yz} = 4\sqrt{15},$$

ou

$$x + y + z = 18, \quad xy = 12, \quad xz = 5, \quad yz = 60.$$

Les équations $xy = 12$, $xz = 5$, $yz = 60$ donnent $x = 1$, $y = 12$, $z = 5$, et ces valeurs de x, y, z vérifient l'*équation de condition* $x + y + z = 18$. On a donc

$$18 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15} = (1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2,$$

et, par suite,

$$A^2 - B = 4(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2.$$

Dès lors, la formule de transformation des *radicaux doubles*,

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

EXERCICES SUR LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DE L'ARC DE 3°.

221. PROBLÈME I. *Calculer* $\sin 3°$ *et* $\cos 3°$.

On a d'abord [**69**]

$$\begin{aligned}\sin 42° &= \sin(60° - 18°)\\ &= \sin 68° \cos 18° - \cos 60° \sin 18°\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\\ &= \tfrac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 42° &= \cos(60° - 18°)\\ &= \cos 60° \cos 18° + \sin 60° \sin 18°\\ &= \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\\ &= \tfrac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3});\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sin 3° &= \sin(45° - 42°)\\ &= \sin 45° \cos 42° - \cos 45° \sin 42°\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\tfrac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\tfrac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)\\ &= \tfrac{1}{16}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{30}-\sqrt{6}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2})\\ [\mathbf{368}] &= \tfrac{1}{16}[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3° &= \cos(45° - 42°)\\ &= \cos 45° \cos 42° + \sin 45° \sin 42°\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\tfrac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\tfrac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)\\ &= \tfrac{1}{16}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{30}-\sqrt{6}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2})\\ [\mathbf{369}] &= \tfrac{1}{16}[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)].\end{aligned}$$

***222.** PROBLÈME II. *Étant donné*

$$\sin 3° = \tfrac{1}{16}[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}],$$

calculer $\cos 3°$ *au moyen de la formule*

$$\cos 3° = \sqrt{1 - \sin^2 3°}.$$

On a

$$\cos 3^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 3^\circ}$$

$$= \sqrt{1 - \tfrac{1}{256}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right]^2}$$

$$= \tfrac{1}{16}\sqrt{256 - (8+4\sqrt{3})(6-2\sqrt{5}) - 4(4-2\sqrt{3})(5+\sqrt{5}) + 4(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(5+\sqrt{5})}}$$

$$= \tfrac{1}{16}\sqrt{256 - 8(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{5}) - 8(2-\sqrt{3})(5+\sqrt{5}) + 16\sqrt{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}. \qquad (m)$$

Or, si l'on pose $A = 8 + \sqrt{3} + \sqrt{15}$, $B = 10 - 2\sqrt{5}$, on a

$$A^2 - B = (8 + \sqrt{3} + \sqrt{15})^2 - (10 - 2\sqrt{5})$$
$$= 4(18 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15});$$

et si l'on pose encore

$$18 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15} = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$$
$$= x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz},$$

on a, pour déterminer x, y, z, les équations

$$x + y + z = 18, \quad 2\sqrt{xy} = 4\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{xz} = 2\sqrt{5}, \quad 2\sqrt{yz} = 4\sqrt{15},$$

ou

$$x + y + z = 18, \quad xy = 12, \quad xz = 5, \quad yz = 60.$$

Les équations $xy = 12$, $xz = 5$, $yz = 60$ donnent $x = 1$, $y = 12$, $z = 5$, et ces valeurs de x, y, z vérifient l'*équation de condition* $x + y + z = 18$. On a donc

$$18 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15} = (1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2,$$

et, par suite,

$$A^2 - B = 4(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2.$$

Dès lors, la formule de transformation des *radicaux doubles*,

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

est applicable à l'expression (*m*), et on a

$$\cos 3^\circ = \tfrac{1}{4}\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(8+\sqrt{3}+\sqrt{15}+2+4\sqrt{3}+2\sqrt{5})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(8+\sqrt{3}+\sqrt{15}-2-4\sqrt{3}-2\sqrt{5})}\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(10+5\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(6-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{15})}\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}\right]$$

$$= \tfrac{1}{16}\left[2\sqrt{(5+\sqrt{5})(4+2\sqrt{3})}+\sqrt{(6-2\sqrt{5})(8-4\sqrt{3})}\right],$$

ou, enfin,

$$\cos 3^\circ = \tfrac{1}{16}\left[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right].$$

***223.** Problème III. *Étant donné*

$$\sin 3^\circ = \tfrac{1}{16}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right],$$

$$\cos 3^\circ = \tfrac{1}{16}\left[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right],$$

calculer séc 3°, cosséc 3°, tg 3° *et* cot 3° *au moyen des formules*

$$\text{séc}\,3^\circ = \frac{1}{\cos 3^\circ},\quad \text{cosséc}\,3^\circ = \frac{1}{\sin 3^\circ},\quad \text{tg}\,3^\circ = \sin 3^\circ\,\text{séc}\,3^\circ,\quad \cot 3^\circ = \frac{1}{\text{tg}\,3^\circ}.$$

1° On a

$$\text{séc}\,3^\circ = \frac{1}{\cos 3^\circ} = \frac{16}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)},$$

ou, en multipliant *haut et bas* par l'expression *conjuguée* du dénominateur,

$$\text{séc}\,3^\circ = \frac{16\left[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right]}{4(4+2\sqrt{3})(5+\sqrt{5})-(8-4\sqrt{3})(6-2\sqrt{5})},$$

ou, en simplifiant,

$$\text{séc}\,3^\circ = \frac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2(2\sqrt{3}+\sqrt{5}+1)},$$

ou, en multipliant haut et bas par $2\sqrt{3}-\sqrt{5}-1$,

$$\text{séc}\,3^\circ = \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{5}-1)\left[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right]}{2\left[(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+1)^2\right]},$$

ou

$$\text{séc } 3^\circ = \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{5}-1)[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)]}{4(3-\sqrt{5})},$$

ou, en multipliant haut et bas par $3+\sqrt{5}$,

$$\text{séc } 3^\circ = \tfrac{1}{16}(3+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5}-1)[2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)],$$

d'où, successivement,

$$\begin{aligned}\text{séc } 3^\circ &= \tfrac{1}{16}[2(3+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\\ &\quad -(3+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)]\\ &= \tfrac{1}{4}[(5-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15})\sqrt{5+\sqrt{5}}-2\sqrt{2}(3-2\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{15})]\\ &= \tfrac{1}{4}[(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-2\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]\\ &= \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})[\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2(5+\sqrt{5})}-2\sqrt{2}(2-\sqrt{3})]\\ [370]\qquad &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

2° On trouve, par des calculs analogues aux précédents,

$$[371]\qquad \text{coséc } 3^\circ = \tfrac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{6})(2+\sqrt{3}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}).$$

3° On a

$$\begin{aligned}\text{tg } 3^\circ = \sin 3^\circ \text{ séc } 3^\circ &= \tfrac{1}{16}[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}]\\ &\quad\times \tfrac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{5+2\sqrt{5}}-2+\sqrt{3})\\ &= \tfrac{1}{32}(\sqrt{10}-\sqrt{6})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\times[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+2\sqrt{5}}-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{(5+\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}\\ &-(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)(2-\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}].\end{aligned}$$

Or

$$(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(5+2\sqrt{5})}=\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

et

$$\sqrt{(5+\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}=\sqrt{35+15\sqrt{5}}=\tfrac{1}{2}(3\sqrt{10}+5\sqrt{2}).$$

ou, en élevant une deuxième fois au carré, réduisant et isolant $\sqrt{3}$,

$$z^4 - 8z^3 - 8z^2 + 16z + 7 = -\sqrt{3}\,(6z^3 + 4z^2 - 10z - 4),$$

ou, en élevant une troisième fois au carré et en réduisant,

[**376**] $$z^8 - 16z^7 - 60z^6 + 16z^5 + 134z^4 + 16z^3 - 60z^2 - 16z + 1 = 0.$$

Cette équation réciproque du huitième degré a pour racines (**226**) :

$$\operatorname{tg} 3^\circ,\ \cot 3^\circ,\ -\operatorname{tg} 21^\circ,\ -\cot 21^\circ,\ -\operatorname{tg} 33^\circ,\ -\cot 33^\circ,\ \operatorname{tg} 39^\circ,\ \cot 39^\circ.$$

****225.** Problème V. *Résoudre l'équation*

[**377**] $$65\,536x^{16} - 262\,144x^{14} + 430\,080x^{12} - 372\,736x^{10} + 182\,784x^8 - 50\,176x^6 + 7040x^4 - 384x^2 + 1 = 0.$$

Si l'on extrait la racine carrée du premier membre de l'équation, jusqu'à ce que l'on arrive à un reste dont le premier terme ne soit plus divisible par le double du premier terme de la racine, on trouve, pour cette racine,

$$256x^8 - 512x^6 + 328x^4 - 72x^2,$$

ou

$$8x^2\,(32x^6 - 64x^4 + 41x^2 - 9),$$

et, pour reste,

$$1472x^8 - 2944x^6 + 1856x^4 - 384x^2 + 1,$$

ou

$$46x^2(32x^6 - 64x^4 + 41x^2 - 9) - 30x^4 + 30x^2 + 1,$$

en sorte que l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$64x^4(32x^6 - 64x^4 + 41x^2 - 9)^2 + 46x^2(32x^6 - 64x^4 + 41x^2 - 9) - 30x^4 + 30x^2 + 1 = 0,$$

ou

$$64x^4(1 - x^2)^2\,[32x^2(1 - x^2) - 9]^2 + 46x^2(1 - x^2)\,[32x^2(1 - x^2) - 9] + 30x^2(1 - x^2) + 1 = 0 \ (*),$$

ou, en posant $y^2 = x^2(1 - x^2)$,

$$64y^4\,(32y^2 - 9)^2 + 46y^2\,(32y^2 - 9) + 30y^2 + 1 = 0,$$

(*) Sous cette forme, on voit que l'équation reste la même, quand on y change x^2 en $1 - x^2$: si donc elle admet la racine $\sin\alpha$, elle admet aussi la racine $\cos\alpha$.

ou, en élevant une deuxième fois au carré, réduisant et isolant $\sqrt{3}$,

$$16x^4 + 4x^3\sqrt{2} - 12x^2 + 2 = -\sqrt{3}(4x^3\sqrt{2} + 4x^2 - 2x\sqrt{2} - 1),$$

ou, en élevant une troisième fois au carré, réduisant et isolant $\sqrt{2}$,

$$256x^8 - 448x^6 + 256x^4 - 48x^2 + 1 = -4x\sqrt{2}(32x^6 - 48x^4 + 22x^2 - 3),$$

ou, enfin, en élevant une quatrième fois au carré et en réduisant,

[**374**] $$65\,536x^{16} - 262\,144x^{14} + 430\,080x^{12} - 372\,736x^{10} + 182\,784x^8 - 50\,176x^6 + 7040x^4 - 384x^2 + 1 = 0.$$

Cette équation a pour racines (**225**) :

$$\pm\sin 3^\circ, \pm\cos 3^\circ, \pm\sin 21^\circ, \pm\cos 21^\circ, \pm\sin 33^\circ, \pm\cos 33^\circ, \pm\sin 39^\circ, \pm\cos 39^\circ.$$

Si l'on change x en $\frac{1}{y}$, la nouvelle équation

[**375**] $$y^{16} - 384y^{14} + 7040y^{12} - 50\,176y^{10} + 182\,784y^8 - 372\,736y^6 + 430\,080y^4 - 262\,144y^2 + 65\,536 = 0$$

aura pour racines

$$\pm\text{séc}3^\circ, \pm\text{coséc}3^\circ, \pm\text{séc}21^\circ, \pm\text{coséc}21^\circ, \pm\text{séc}33^\circ, \pm\text{coséc}33^\circ, \pm\text{séc}39^\circ, \pm\text{coséc}39^\circ.$$

2° En désignant, de même, $\text{tg}3^\circ$ par z, on a

$$z = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1),$$

d'où, en isolant le radical double,

$$4z + (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

ou, en élevant au carré,

$$16z^2 + 8z(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{5} + 1) + (8 - 2\sqrt{15})(4 - 2\sqrt{3})(6 + 2\sqrt{5}) = (8 - 2\sqrt{15})(4 - 2\sqrt{3})(10 + 2\sqrt{5}),$$

ou, en réduisant et en isolant $\sqrt{5}$,

$$z^2 - 4z + 3z\sqrt{3} - 8 + 4\sqrt{3} = \sqrt{5}(2z - z\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3}),$$

Appelons v_1, v_2, v_3, v_4 les quatre racines de cette nouvelle équation : on a, d'après les propriétés des racines des équations du quatrième degré,

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= 0, \\ v_1v_2 + v_1v_3 + v_1v_4 + v_2v_3 + v_2v_4 + v_3v_4 &= -70, \\ v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4 + v_2v_3v_4 &= -120, \\ v_1v_2v_3v_4 &= 445. \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Posons maintenant, suivant la méthode d'EULER,

$$v = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}, \qquad (2)$$

p, q, r étant les racines de l'équation du troisième degré

$$T^3 - fT^2 + gT - h = 0, \qquad (3)$$

et les radicaux étant pris avec les déterminations convenables, de manière à vérifier les relations (α). On a, d'après les propriétés des racines des équations du troisième degré,

$$p + q + r = f, \quad pq + pr + qr = g, \quad pqr = h.$$

Dès lors, l'équation (2) donne, en élevant au carré,

$$v^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr},$$

ou, en remplaçant $p + q + r$ par f,

$$v^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr},$$

ou, en élevant de nouveau au carré,

$$v^4 - 2fv^2 + f^2 = 4pq + pr + qr + 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}),$$

ou, en remplaçant $pq + pr + qr$ par g, pqr par h, $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ par v,

$$v^4 - 2fv^2 - 8v\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0. \qquad 4$$

L'équation 3 devant être identique à l'équation 1, on a

$$2f = 70, \quad -8\sqrt{h} = 120, \quad f^2 - 4g = 445,$$

d'où

$$f = 35, \quad h = 225, \quad g = 195.$$

La *résolvante* (3) devient, par suite,

$$T^3 - 35T^2 + 195T - 225 = 0,$$

ou

$$(T - 5)(T^2 - 30T + 45) = 0,$$

d'où, pour les racines p, q, r,

$$p = 5, \qquad q = 15 + 6\sqrt{5}, \qquad r = 15 - 6\sqrt{5}.$$

On a donc, en prenant $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ avec les signes convenables,

$$v_1 = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = -\sqrt{5} - \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{15 - 6\sqrt{5}},$$
$$v_2 = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = -\sqrt{5} + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{5}},$$
$$v_3 = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = \sqrt{5} - \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{5}},$$
$$v_4 = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = \sqrt{5} + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{15 - 6\sqrt{5}},$$

ou, en observant que $\sqrt{15 + 6\sqrt{5}} \pm \sqrt{15 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{30 \pm 6\sqrt{5}}$,

$$v_1 = -\sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}},$$
$$v_2 = -\sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}},$$
$$v_3 = \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}},$$
$$v_4 = \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}.$$

Or on a posé

$$y^2 = x^2(1 - x^2), \qquad z = 16y^2, \qquad z = u + \tfrac{9}{4}, \qquad v = 4u,$$

d'où

$$x^2 = \tfrac{1}{8}(4 \pm \sqrt{7 - v}).$$

On tire de là, en remplaçant v successivement par ses quatre valeurs,

$$x_1^2 = \tfrac{1}{8}\left(4 \pm \sqrt{7 + \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}\right),$$
$$x_2^2 = \tfrac{1}{8}\left(4 \pm \sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}\right),$$
$$x_3^2 = \tfrac{1}{8}\left(4 \pm \sqrt{7 - \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}\right),$$
$$x_4^2 = \tfrac{1}{8}\left(4 \pm \sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}\right),$$

ou, en observant que $(7 \pm \sqrt{5})^2 - (30 \pm 6\sqrt{5}) = 24 \pm 8\sqrt{5} =$

$4(\sqrt{5} \pm 1)^2$, et en appliquant la formule de transformation des radicaux doubles,

$$x_1^2 = \tfrac{1}{16}\left(8 \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{15} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right) = \cos^2 3^\circ \text{ et } \sin^2 3^\circ,$$
$$x_2^2 = \tfrac{1}{16}\left(8 \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{15} \mp \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right) = \cos^2 33^\circ \text{ et } \sin^2 33^\circ,$$
$$x_3^2 = \tfrac{1}{16}\left(8 \mp \sqrt{3} \pm \sqrt{15} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right) = \cos^2 21^\circ \text{ et } \sin^2 21^\circ,$$
$$x_4^2 = \tfrac{1}{16}\left(8 \pm \sqrt{3} \mp \sqrt{15} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right) = \cos^2 39^\circ \text{ et } \sin^2 39^\circ.$$

Les seize racines de l'équation proposée sont donc

[377'] $\pm\sin 3^\circ, \pm\cos 3^\circ, \pm\sin 21^\circ, \pm\cos 21^\circ, \pm\sin 33^\circ, \pm\cos 33^\circ, \pm\sin 39^\circ, \pm\cos 39^\circ.$

**226. Problème VI. *Résoudre l'équation*

[378] $x^8 - 16x^7 - 60x^6 + 16x^5 + 134x^4 + 16x^3 - 60x^2 - 16x + 1 = 0.$

L'équation est réciproque, et on peut l'écrire, en groupant les termes équidistants des extrêmes,

$$(x^8 + 1) - 16(x^7 + x) - 60(x^6 + x^2) + 16(x^5 + x^3) + 134x^4 = 0,$$

ou, en divisant par x^4,

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - 16\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 60\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 134 = 0,$$

on, en posant $x + \frac{1}{x} = y$, d'où $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$, $x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$,

$$(y^4 - 4y^2 + 2) - 16(y^3 - 3y) - 60(y^2 - 2) + 16y + 134 = 0,$$

ou

$$y^4 - 16y^3 - 64y^2 + 64y + 256 = 0,$$

ou, en posant $y = 4z$,

$$z^4 - 4z^3 - 4z^2 + z + 1 = 0,$$

ou, en posant $z = u + 1$,

$$u^4 - 10u^2 - 15u - 5 = 0. \qquad (1)$$

Pour résoudre cette équation d'après la méthode d'Euler, posons

$$u = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},$$

p, q, r étant les racines de l'équation

$$T^3 - fT^2 + gT - h = 0, \qquad (2)$$

et les radicaux étant pris avec les signes convenables. On aura

$$u^4 - 2fu^2 - 8u\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0,$$

d'où, en identifiant avec l'équation (1),

$$2f = 10, \qquad 8\sqrt{h} = 15, \qquad f^2 - 4g = -5,$$

d'où

$$f = 5, \qquad h = \tfrac{225}{64}, \qquad g = \tfrac{15}{2}.$$

La *résolvante* (2) devient, par suite,

$$T^3 - 5T^2 + \tfrac{15}{2}T - \tfrac{225}{64} = 0,$$

ou

$$(T - \tfrac{5}{4})(T^2 - \tfrac{15}{4}T + \tfrac{45}{16}) = 0,$$

d'où, pour les racines p, q, r,

$$p = \tfrac{5}{4}, \qquad q = \tfrac{1}{8}(15 + 3\sqrt{5}), \qquad r = \tfrac{1}{8}(15 - 3\sqrt{5}).$$

On a donc, en prenant $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ avec les signes convenables,

$$u_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = \tfrac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right),$$
$$u_2 = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = \tfrac{1}{4}\left(2\sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right),$$
$$u_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = \tfrac{1}{4}\left(-2\sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right),$$
$$u_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = \tfrac{1}{4}\left(-2\sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right),$$

ou, en observant que $\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} \pm \sqrt{30 - 6\sqrt{5}} = 2\sqrt{15 \pm 6\sqrt{5}}$,

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{15 + 6\sqrt{5}}), \qquad u_3 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{5} + \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}),$$
$$u_2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{15 + 6\sqrt{5}}), \qquad u_4 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{5} - \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}).$$

Or on a posé

$$x + \frac{1}{x} = y = 4z = 4u + 4.$$

Cela étant, on a

$$x_1+\frac{1}{x_1}=4+2\sqrt{5}+2\sqrt{15+6\sqrt{5}},\quad x_3+\frac{1}{x_3}=4-2\sqrt{5}+2\sqrt{15-6\sqrt{5}},$$

$$x_2+\frac{1}{x_2}=4+2\sqrt{5}-2\sqrt{15+6\sqrt{5}},\quad x_4+\frac{1}{x_4}=4-2\sqrt{5}-2\sqrt{15-6\sqrt{5}}.$$

Si l'on résout ces quatre équations du second degré, on aura les huit valeurs de x.

La première équation donne

$$x_1=2+\sqrt{5}+\sqrt{15+6\sqrt{5}}\pm\sqrt{(2+\sqrt{5}+\sqrt{15+6\sqrt{5}})^2-1},$$

ou

$$x_1=2+\sqrt{5}+\sqrt{15+6\sqrt{5}}\pm\sqrt{23+10\sqrt{5}+2\sqrt{255+114\sqrt{5}}},$$

ou, en observant que $(23+10\sqrt{5})^2-4(255+114\sqrt{5})=9+4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^2$, et en appliquant la formule de transformation des radicaux doubles,

$$x_1=2+\sqrt{5}+\sqrt{15+6\sqrt{5}}\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{50+22\sqrt{5}}+\sqrt{42+18\sqrt{5}}),$$

ou, en remplaçant $\sqrt{42+18\sqrt{5}}$ par $3\sqrt{3}+\sqrt{15}$,

$$x_1=\tfrac{1}{2}(4+2\sqrt{5}\pm3\sqrt{3}\pm\sqrt{15}+2\sqrt{15+6\sqrt{5}}\pm\sqrt{50+22\sqrt{5}}).$$

Mais $2\sqrt{15+6\sqrt{5}}\pm\sqrt{50+22\sqrt{5}}=\sqrt{(2\sqrt{15+6\sqrt{5}}\pm\sqrt{50+22\sqrt{5}})^2}=$

$$\sqrt{110+46\sqrt{5}\pm4\sqrt{1410+630\sqrt{5}}}=\sqrt{110+46\sqrt{5}\pm4(7\sqrt{15}+15\sqrt{3})}.$$

Donc

$$x_1=\tfrac{1}{2}(4+2\sqrt{5}\pm3\sqrt{3}\pm\sqrt{15}+\sqrt{110\pm60\sqrt{3}+46\sqrt{5}\pm28\sqrt{15}}).$$

Ces deux valeurs de x_1 sont, sous une autre forme, les valeurs précédemment trouvées pour cot 3° et tg 3° (**223**).

On verrait, de même, que les valeurs de x_2, x_3, x_4 sont respectivement égales à — tg 33° et — cot 33°, cot 39° et tg 39°, — tg 21° et — cot 21°.

Les huit racines de l'équation proposée sont donc

[**378**] tg 3°, cot 3°, — tg 21°, — cot 21°, — tg 33°, — cot 33°, tg 39°, cot 39°.

SUR LES LIEUX DISCONTINUS

OU

SUITES ITÉRATIVES DE POINTS

PAR

J. NEUBERG
Professeur à l'Université de Liége

BRUXELLES
POLLEUNIS ET CEUTERICK, IMPRIMEURS
37, RUE DES URSULINES, 37

1906

Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles
(T. XXX, 2e Partie)

SUR LES LIEUX DISCONTINUS

OU

SUITES ITÉRATIVES DE POINTS

---

1. Le présent travail a été rédigé à l'occasion du problème suivant qu'un abonné a voulu proposer aux lecteurs de MATHESIS :

On prolonge les côtés BC, CA, AB *d'un triangle* ABC $\equiv$ T *respectivement de* $CA_1 = BC$, $AB_1 = CA$, $BC_1 = AB$ *et l'on construit le triangle* $A_1B_1C_1 \equiv T_1$. *En prolongeant les côtés* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *de* T_1 *chacun d'une longueur égale à lui-même, on obtient les sommets d'un troisième triangle* $A_2B_2C_2 \equiv T_2$. *Et ainsi de suite. Tous ces triangles ont le même centre de gravité* G. *On demande le lieu de leurs orthocentres* H, H_1, H_2, ...

J'ignore si ce correspondant possède lui-même une solution du problème. La question est d'une nature toute spéciale : Les points H, H_1, H_2, ..., ne forment pas *actuellement* une suite continue et une *interpolation* ne se présente pas *immédiatement* à l'esprit.

D'une manière générale, étant donnée une première figure F, supposons que par un certain procédé φ on en déduise une seconde figure F_1 ; que le même procédé appliqué à F_1 conduise à une troisième figure F_2 ; et ainsi de suite indéfiniment. Supposons encore que par le même procédé φ on puisse déduire F d'une autre figure F'_1, puis F'_1 de F'_2, etc. Prenons un point quelconque M de F et appelons M_1, M_2, ..., M'_1, M'_2, ... les points correspondants de F_1, F_2, ..., F'_1, F'_2, ... Nous aurons ainsi une suite de

points ... $M'_2\ M'_1\ M\ M_1\ M_2$ ... qui est indéfinie tant *à droite qu'à gauche;* je l'appellerai la suite (M) et je dirai que c'est **un** *lieu discontinu* ou mieux une *suite itérative.*

Les suites itératives donnent lieu à plusieurs questions intéressantes dont la solution présente souvent de grandes difficultés. Ainsi, on peut étudier les propriétés de la ligne polygonale ... $M'_2\ M'_1\ M\ M_1\ M_2$ ...; voir comment la connaissance d'un certain nombre de sommets consécutifs détermine les autres sommets; examiner s'il existe un point asymptote, etc. La recherche d'une courbe analytique passant par tous les points d'une suite itérative revient souvent, si je ne me trompe, à l'interpolation de nouveaux points tels que tous les éléments de la suite complétée satisfassent à une même définition.

Avant de résoudre le problème énoncé ci-dessus, je traiterai quelques questions déjà connues, propres à éclaircir les considérations générales qui précèdent.

2. Étant donné un triangle OAA_1 dans lequel $OA < OA_1$, construisons successivement les triangles OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA'_1A, $OA'_2A'_1$, ..., directement semblables à OAA_1; on obtient ainsi une ligne polygonale ... $A'_2A'_1A\,A_1A_2$... qui a reçu le nom de *myosotis.* Les angles ... $A'_2A'_1A$, A'_1AA_1, AA_1A_2, ..., sont égaux, et les côtés ... $A'_2A'_1$, A'_1A, AA_1, ..., sont en progression géométrique; cette propriété permet de construire le myosotis dont on donne trois sommets consécutifs. Les rayons OA, OA'_1, OA'_2, ..., étant en progression géométrique décroissante, le myosotis prolongé dans le sens $AA'_1A'_2$ tend vers le point O.

Si l'on porte sur la bissectrice de l'angle AOA_1 une longueur $OB = \sqrt{OA.\,OA_1}$, les triangles OAB, OBA_1 sont semblables entre eux. En opérant de même entre OA_1 et OA_2, entre OA_2 et OA_3, ..., tous les nouveaux triangles sont semblables et l'on obtient un nouveau myosotis ... $ABA_1B_1A_2$... On peut répéter ces constructions sur le deuxième myosotis, puis sur le troisième, etc. A la limite on aura une courbe qui coupe les rayons issus de O sous un angle constant, c'est-à-dire une spirale logarithmique.

Au lieu d'insérer entre deux rayons consécutifs OA et OA_1, OA_1 et OA_2, ..., deux triangles semblables, on en pourrait insérer trois, cinq, sept, ...

Prenons O pour pôle et OA pour axe polaire. Si OA est l'unité

de longueur et si les coordonnées polaires de A_1 sont désignées par (r, θ), les coordonnées des points de la suite (A) sont :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llllllll} \ldots & A'_2, & A'_1, & A, & A_1, & A_2, & \ldots \\ \ldots & r^{-2}, & r^{-1}, & r^2, & 1, & r, & \ldots \\ \ldots & -2\theta, & -\theta, & 0, & \theta, & \theta^2, & \ldots \end{array}\right.$$

L'angle polaire d'un point de la suite (A) est donc le logarithme du rayon vecteur de ce point dans un certain système de logarithmes; les coordonnées (ρ, ω) d'un point quelconque de la suite vérifient donc l'équation $\omega = \log \rho$, ou $\rho = a^{\omega}$.

Observons que ω était d'abord un multiple de θ; mais l'insertion de nouveaux moyens dans les progressions (1) permet de faire varier ω d'une manière continue.

3. La question suivante que j'ai proposée dans MATHESIS, 1881, p. 207, se ramène immédiatement à celle du § 2.

Étant donnés dans un même plan deux droites AB, CD *et un point* M, *on construit le triangle* CDM_1 *directement semblable à* ABM, *le triangle* CDM_2 *directement semblable à* ABM_1, *et ainsi de suite. Démontrez que les points* M, M_1, M_2, ... *appartiennent à une même spirale logarithmique.*

En effet, M et M_1, M_1 et M_2, M_2 et M_3, ... sont des points homologues de deux figures semblables construites sur les droites AB, CD; donc, si O est le *point double* de ces figures, les triangles OMM_1, OM_1M_2, ... sont semblables entre eux.

4. Considérons deux systèmes plans projectifs superposés. Appelons-les π, π' et soient A, B, C leurs points doubles, supposés réels et distincts.

M étant un point quelconque de π, désignons par M_1 son homologue dans π'; à M_1 rangé dans le système π correspond un point M_2 de π'; et ainsi de suite. Représentons par (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... les coordonnées des points M, M_1, M_2, ... rapportés au triangle de référence ABC. Les *formules de transformation* sont

$$\frac{x_1}{\lambda x} = \frac{y_1}{\mu y} = \frac{z_1}{\nu z}, \qquad \frac{x_2}{\lambda x_1} = \frac{y_2}{\mu y_1} = \frac{z_2}{\nu z_1}, \quad \ldots,$$

où λ, μ, ν sont des constantes. On en conclut

$$\frac{x_n}{\lambda^n x} = \frac{y_n}{\mu^n y} = \frac{z_n}{\nu^n z},$$

ou, en désignant par k un facteur de proportionnalité,

$$(2) \qquad \frac{x_n}{x} = k\lambda^n, \qquad \frac{y_n}{y} = k\mu^n, \qquad \frac{z_n}{z} = k\nu^n.$$

Écrivons X, Y, Z pour x_n, y_n, z_n et prenons les logarithmes des deux membres de cette égalité; nous aurons

$$\log \frac{X}{x} = n \log \lambda + \log k, \qquad \log \frac{Y}{y} = n \log \mu + \log k, \quad \ldots$$

Éliminons entre ces dernières égalités n et $\log k$; il vient

$$\begin{vmatrix} \log \frac{X}{x} & \log \lambda & 1 \\ \log \frac{Y}{y} & \log \mu & 1 \\ \log \frac{Z}{z} & \log \nu & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce résultat est de la forme

$$\alpha \log \frac{X}{x} + \beta \log \frac{Y}{y} + \gamma \log \frac{Z}{z} = 0,$$

ou

$$(3) \qquad X^\alpha Y^\beta Z^\gamma = \text{const.},$$

avec

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (*).$$

(*) Pour la question du point-limite de la suite (M), voir l'article *Ueber eine besondere Art konvergenter Punktfolgen* par Fr. London (JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG, XI, p. 274).

La bibliographie des courbes (3) a été donnée par M. Scheffers dans l'article *Besondere transcendente Kurven* (ENCYCLOP. DER MATH. WISSENSCHAFTEN, III, 3).

Lorsque les systèmes π, π' ont un point double réel C et deux points doubles imaginaires conjugués, A et B, on remplacera, dans l'équation (3), X, Y, Z par les premiers membres des équations des droites BC, CA, AB rapportées à un triangle de référence réel. Ce cas comprend celui de deux systèmes directement semblables, qui ont un point double réel (centre de similitude) et deux points doubles imaginaires (points cycliques du plan).

5. Étant donné un triangle quelconque $ABC \equiv t$, soient $A_1B_1C_1 \equiv t_1$ le triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs de t (*triangle orthique* de t), t_2 le triangle orthique de t_1, etc.

Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique,* VI, p. 145, M. Brocard a étudié la loi des angles des triangles t_1, t_2, ... et remarqué que les côtés tendent vers zéro; finalement, il propose comme *exercice* la détermination du point-limite des suites (A), (B), (C). Ce dernier problème, repris par l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* n'a pas encore été résolu.

L'existence du point-limite commun aux trois suites (A), (B), (C) se déduit facilement de ce que les rayons des cercles circonscrits aux triangles t, t_1, t_2, ..., sont R, $\frac{1}{2}$R, $\frac{1}{4}$R, ...

La prolongation de la suite (t) à gauche n'est pas *unique.* En effet, si I, I', I'', I''' sont les centres des cercles qui touchent les trois côtés de t, chacun de ces points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres, de sorte que ABC est le triangle orthique des quatre triangles I'I''I''', II'''I'', I''II', I''I'I. Cette circonstance fait entrevoir une certaine complication des formules relatives à la suite (t).

On peut cependant caractériser assez simplement les *directions* des côtés des triangles t, t_1, t_2, ... En effet, les droites BC et B_1C_1 ont des directions symétriques par rapport à la bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle BAC. Par conséquent, si l'on mène par un même point O des parallèles OL, OM, ON, OL_1, OM_1, ON_1, ... aux droites BC, CA, AB, B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, ... et que l'on appelle α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, ... les angles de ces parallèles avec une droite quelconque OX, OL_1 est symétrique de OL par rapport à la bissectrice de l'angle MON, OM_1 est symétrique de OM par rapport à la bissectrice de l'angle NOL, etc., et l'on a les égalités

$$\alpha + \alpha_1 = \beta + \gamma, \quad \beta + \beta_1 = \gamma + \alpha, \quad \gamma + \gamma_1 = \alpha + \beta.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$\alpha + \beta + \gamma = s,$$

on a

$$\alpha_1 = s - 2\alpha, \qquad \beta_1 = s - 2\beta, \qquad \gamma_1 = s - 2\gamma,$$

$$\alpha_2 = s - 2\alpha_1 = -s + 4\alpha,$$

$$\beta_2 = -s + 4\beta, \qquad \gamma_2 = -s + 4\gamma, \qquad \text{etc...}$$

D'une manière générale, en observant que

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = s,$$

on trouve :
si n est impair,

$$\alpha_n = \frac{2^n + 1}{3} s - 2^n\alpha, \qquad \beta_n = \frac{2^n + 1}{3} s - 2^n\beta, \quad \ldots :$$

si n est impair,

$$\alpha_n = -\frac{2^n - 1}{3} s + 2^n\alpha, \quad \beta_n = -\frac{2^n - 1}{3} s + 2^n\beta, \quad \ldots.$$

6. J'aborde maintenant l'étude des triangles T, T_1, T_2, ... définis au début de ce mémoire.

Les relations entre les éléments des triangles T et T_1 sont classiques; je me contente de les rappeler :

$$\begin{cases} a_1^2 = 3b^2 + 6c^2 - 2a^2, \\ b_1^2 = 3c^2 + 6a^2 - 2b^2, \\ c_1^2 = 3a^2 + 6b^2 - 2c^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 49a^2 = 6b_1^2 + 3c_1^2 - 2a_1^2, \\ 49b^2 = 6c_1^2 + 3a_1^2 - 2b_1^2, \\ 49c^2 = 6a_1^2 + 3b_1^2 - 2c_1^2, \end{cases}$$

$$S_1 = 7S, \qquad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 7(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\overline{AA_1}^2 = 2\sigma^2 - 3c^2, \qquad \overline{BB_1}^2 = 2\sigma^2 - 3a^2, \qquad \overline{CC_1}^2 = 2\sigma^2 - 3b^2,$$

$$\Sigma \overline{AA_1}^2 = 3\sigma^2,$$

S désignant la surface de T, σ^2 la somme $a^2 + b^2 + c^2$, ...

Si l'on représente par $(x_{a,n}, y_{a,n})$, $(x_{b,n}, y_{b,n})$, $(x_{c,n}, y_{c,n})$ les coordonnées cartésiennes des points A_n, B_n, C_n par rapport à deux axes quelconques, on a :

$$\begin{cases} x_{a,1} = 2x_{c,0} - x_{b,0}, \\ y_{a,1} = 2y_{c,0} - y_{b,0}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{b,1} = 2x_{a,0} - x_{c,0}, \\ y_{b,1} = 2y_{a,0} - y_{c,0}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{c,1} = 2x_{b,0} - x_{a,0}, \\ y_{c,1} = 2y_{b,0} - y_{a,0}. \end{cases}$$

Il serait intéressant d'avoir les formules relatives au triangle T_n.

Pour construire le triangle $A_1'B_1'C_1'$, observons que la parallèle à $B_1'C_1'$ par A_1' passe par le milieu de M_c de AB et par B_1; donc il suffit de mener par A, B, C des parallèles aux droites B_1M_c, C_1M_a, A_1M_b.

7. Lorsque le triangle ABC est régulier, les triangles AGA_1, A_1GA_2, ... sont semblables entre eux; on en conclut que les suites (A), (B), (C) sont inscriptibles à trois spirales logarithmiques U_a, U_b, U_c. Une rotation de 120° autour de G dans un sens ou dans l'autre, fait coïncider l'une de ces courbes avec les deux autres.

Soit λ l'angle AGA_1; on trouve facilement les relations

$$\frac{GA_1}{GA} = \sqrt{7}, \quad \operatorname{tg}\lambda = -3\sqrt{3}, \quad \sin\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \quad \cos\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Rapportons la figure à deux axes rectangulaires Gx, Gy dont les directions positives sont choisies de manière que les plus petites rotations amenant Gx sur Gy et GA sur GA_1 soient de même sens. En appelant α l'angle x GA, R le rayon GA et en posant $(i = \sqrt{-1})$

$$z = R(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \mu = \sqrt{7}(\cos\lambda + i\sin\lambda)$$

les *vecteurs* GA, GA_1, GA_2, GA_3... seront représentés par

$$z, \qquad \mu z, \qquad \mu^2 z, \qquad \mu^3 z, \ldots$$

Le vecteur GA_n aura donc pour expression

$$R(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot 7^{\frac{1}{2}n}(\cos n\lambda + i\sin n\lambda).$$

On en conclut

$$x_{a,n} + iy_{a,n} = (x_{a,0} + iy_{a,0}) \cdot 7^{\frac{1}{2}n}(\cos n\lambda + i\sin n\lambda);$$

d'où

$$x_{a,n} = 7^{\frac{1}{2}n}(x_{a,0}\cos n\lambda - y_{a,0}\sin n\lambda),$$
$$y_{a,n} = 7^{\frac{1}{2}n}(x_{a,0}\sin n\lambda + y_{a,0}\cos n\lambda).$$

La spirale U_a a pour équation en coordonnées polaires

$$\rho = m^{\omega},$$

où la constante m se déduit de l'égalité

$$R = m^{\alpha}.$$

Les équations des courbes U_b, U_c sont

$$\rho = m^{\omega - \frac{4}{3}\pi}, \qquad \rho = m^{\omega - \frac{2}{3}\pi}.$$

8. Revenons au cas où le triangle ABC est scalène.

On peut mener par G un plan sur lequel le triangle ABC se projette orthogonalement suivant un triangle équilatéral *abc*. Les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... se projettent sur ce plan suivant les triangles $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, ... qui se déduisent de *abc* par le même procédé que $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... de ABC. On vient de voir que les suites (*a*), (*b*), (*c*) sont inscriptibles à des spirales logarithmiques; désignons maintenant ces spirales par u_a, u_b, u_c, et appelons U_a, U_b, U_c les courbes du plan ABC dont elles sont la projection orthogonale. A toute interpolation faite dans les suites (*a*), (*b*), (*c*) correspond une interpolation dans les suites (A), (B), (C).

Gx étant l'intersection des plans *abc*, ABC, menons dans ces plans les droites Gy, GY perpendiculaires à Gx, et rapportons les deux plans respectivement aux axes (Gx, Gy), (Gx, GY). Les coordonnées d'un point d de u_a étant

$$x = m^{\omega}\cos\omega, \qquad y = m^{\omega}\sin\omega,$$

celles du point correspondant D de U_a seront

$$x = m^{\omega}\cos\omega, \qquad Y = \frac{1}{k}m^{\omega}\sin\omega,$$

où k désigne le cosinus de l'angle des plans *abc*, ABC. En éliminan ω entre les égalités (1) on obtient pour l'équation de U_a

$$x^2 + k^2Y^2 = m^{2\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{x}}.$$

Pour passer à la courbe U_c, il suffit de remplacer dans les formules (1) m^ω par $m^{\omega-\frac{2}{3}\pi}$, ce qui revient à changer x et Y en $xm^{\frac{2}{3}\pi}$ et $Ym^{\frac{2}{3}\pi}$.

9. Construisons dans le plan *abc* le triangle équilatéral *def* de centre G et ayant ses sommets sur u_a, u_b, u_c, et soit DEF le triangle correspondant du plan ABC. DEF sera ou un triangle de la suite (T) ou un triangle interpolé. Le problème qui a provoqué le présent travail, consiste donc à trouver le lieu de l'orthocentre du triangle variable DEF inscrit aux trois courbes U_a, U_b, U_c.

Les coordonnées des points F, E sont

$$\begin{cases} x' = m^\omega \cos\left(\omega + \frac{2}{3}\pi\right), \\ Y' = \frac{1}{k} m^\omega \sin\left(\omega + \frac{2}{3}\pi\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = m^\omega \cos\left(\omega + \frac{4}{3}\pi\right), \\ Y'' = \frac{1}{k} m^\omega \sin\left(\omega + \frac{4}{3}\pi\right). \end{cases}$$

L'orthocentre du triangle DEF étant le centre de gravité de ses sommets chargés respectivement des masses tg D, tg E, tg F, ses coordonnées sont

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{x \operatorname{tg} D + x'' \operatorname{tg} E + x' \operatorname{tg} F}{\operatorname{tg} D + \operatorname{tg} E + \operatorname{tg} F}, \\ \eta = \dfrac{Y \operatorname{tg} D + Y'' \operatorname{tg} E + Y' \operatorname{tg} F}{\operatorname{tg} D + \operatorname{tg} E + \operatorname{tg} F}. \end{cases}$$

Les coefficients angulaires des droites *fe*, *ed*, *df* qui sont perpendiculaires aux droites G*d*, G*f*, G*e* sont

$$-\cot\omega, \quad -\cot\left(\omega + \frac{2}{3}\pi\right), \quad -\cot\left(\omega + \frac{4}{3}\pi\right);$$

ceux des droites FE, ED, DF n'en diffèrent que par le facteur $\frac{1}{k}$.

On en conclut

$$\operatorname{tg} D = \frac{\cot\left(\omega + \frac{4}{3}\pi\right) - \cot\left(\omega + \frac{2}{3}\pi\right)}{k^2 - \cot\left(\omega + \frac{4}{3}\pi\right)\cot\left(\omega + \frac{2}{3}\pi\right)};$$

et, en remplaçant cot par cos : sin,

$$\operatorname{tg} D = k \frac{\sin \frac{2}{3}\pi}{k^2\left(\cos\frac{2}{3}\pi - \cos 2\omega\right) - \left(\cos\frac{2}{3}\pi + \cos 2\omega\right)}$$

$$= \frac{k\sqrt{3}}{1 - k^2 - 2(1 + k^2)\cos 2\omega}.$$

Posons

$$p = 1 - k^2 - 2(1 + k^2)\cos 2\omega,$$

$$q = 1 - k^2 - 2(1 + k^2)\cos\left(2\omega + \frac{4}{3}\pi\right),$$

$$r = 1 - k^2 - 2(1 + k^2)\cos\left(2\omega + \frac{2}{3}\pi\right);$$

en substituant dans les formules (2) à tg D, tg F, tg E les quantités $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, nous aurons les coordonnées d'un point du lieu cherché en fonction du paramètre variable ω.

A et A_1, B et B_1, C et C_1 sont des points correspondants d'une collinéation ayant pour éléments doubles le point G et les points à l'infini de la plus grande ellipse circonscrite au triangle ABC; mais H et H_1 ne se correspondent pas dans cette collinéation.

SUR

LA COURBURE DES CONIQUES

ET

DES CUBIQUES GAUCHES

PAR

C. SERVAIS

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

—

1906

Extrait des *Mémoires couronnés* publiés par la Classe des lettres et des sciences morales et politiques de l'Académie royale de Belgique. Deuxième série. Collection in-8°, tome I, 1906.

SUR

LA COURBURE DES CONIQUES

ET

DES CUBIQUES GAUCHES

§ 1.

1. Soient M, M′ deux points infiniment voisins d'une conique Σ, circonscrite au triangle ABC; m, m', a, b les droites MM, MM′, MA, MB; A′, B′ les points (m', CA), (m', CB), on a

$$C(MAM'B) = (mam'b), \quad (MA'M'B') = (mam'b).$$

On tire de cette dernière égalité

$$\lim \frac{MM'}{\sin(mm')} = \lim \frac{M'A'MB'}{A'B'} \frac{\sin(ab)}{\sin(m'a)\sin(mb)},$$

ou

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{MA_1MB_1}{A_1B_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

ρ est le rayon de courbure de la conique Σ au point M; A_1 et B_1 les points (m, CA) et (m, CB). Dans cette formule les

segments et les angles sont pris avec leurs signes, le rayon de courbure est donné par la valeur absolue du second membre.

2. Cas particuliers. — I. Les points A et B sont les symétriques de M par rapport aux axes; C est le point diamétralement opposé à M. Si T_a, T_b sont les points de rencontre de la tangente m avec les axes de Σ, on a

$$MA_1 = 2MT_a, \quad MB_1 = 2MT_b, \quad A_1B_1 = 2T_aT_b,$$
$$T_aT_b \sin(ma) = OT_a, \quad T_aT_b \sin(mb) = OT_b, \quad OT_a \cdot OT_b = T_aT_b \cdot \delta,$$

O étant le centre de la conique Σ, δ la distance (O, m); donc

$$\rho = \frac{MT_a \cdot MT_b}{\delta}.$$

Le produit $MT_a \cdot MT_b$ qui est la puissance de l'involution déterminée sur la tangente m par les couples de diamètres conjugués de Σ, peut être remplacé par le produit relatif à deux diamètres conjugués quelconques (*).

3. II. La conique Σ est une parabole; le point A est à l'infini; les points B et C coïncident. Si h désigne la distance (B, m), on a

$$h = A_1B \sin(ma), \quad A_1B : 2A_1B_1 = \sin(bm) : \sin(ab).$$

Par suite,

$$\rho = \frac{MA_1 \cdot MB_1}{h}.$$

MB_1 et MA_1 sont les segments déterminés sur m, par la tangente au point quelconque B et par le diamètre issu de ce point; h est la distance (B, m) (*).

(*) Neuberg, *Rayon de courbure de certaines courbes planes.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3e sér., t. XXV, pp. 374-386; *Mathesis*, supplément, 1893.)

4. III. Le point A est à l'extrémité N de la corde normale en M ; B et C coïncident au point diamétralement opposé à M sur la conique Σ. On a

$$2\rho = MA_1 \operatorname{cotg}(mb), \quad MA_1 = MN \operatorname{cotg} MA_1N.$$

Donc *si* α *et* β *désignent les angles que les diamètres conjugués de la tangente et de la normale en* M *font avec la tangente en ce point, on a*

$$2\rho = \frac{MN}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

5. IV. La corde AB est parallèle à la tangente m; C est diamétralement opposé à M. Si h, h', δ désignent les distances (C, AB), (M, AB), (O, m), on a

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{2\delta}{h}, \quad \frac{\sin(ab)}{AB} = \frac{\sin(bm)}{MA}, \quad MA \sin(ma) = h'.$$

Par suite,

$$\rho = \frac{\overline{AB}^2}{4} \frac{\delta}{hh'}.$$

Si $h' = 3h$, on a

$$\rho = \frac{\overline{AB}^2}{4ABC} (*).$$

6. V. La corde AB est parallèle à la tangente m; C est l'extrémité N de la corde normale au point M. Si S désigne le point (MN, AB), on a

$$\frac{MA_1}{SA} = \frac{MB_1}{SB} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{MN}{SN}.$$

$SA = MA\cos(ma)$, $SB = MB\cos(mb)$, $MA.MB\sin(ab) = AB.MS$.

(*) *Mathesis*, 1896, p. 24.

Par suite,

$$\frac{2\rho}{MN} = \frac{MS}{NS}\cot g\,(ma)\cot g\,(mb).$$

Si S est le point de Frégier relatif au point M de la conique Σ, l'angle (ab) est droit et l'égalité précédente devient

$$\frac{2\rho}{MN} = \frac{MS}{NS} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{MN} = \frac{1}{MS}.$$

Donc *le symétrique du centre de courbure par rapport au point* M *et le milieu du segment* MS *sont conjugués par rapport à la conique* (*).

Si le point S est à l'infini sur la normale, le rapport $\frac{MS}{NS}$ est égal à l'unité et on a

$$\frac{2\rho}{MN} = \cot g\,(ma)\cot g\,(mb).$$

ma et (mb) sont les angles que la tangente fait avec les asymptotes de la conique Σ (**).

Si le point S coïncide avec N, on a $NS = 0$, $\cot g\,(ma) = 0$ et le second membre de l'égalité

$$\frac{2\rho}{MN} = \frac{MS}{NS}\cot g\,(ma)\cot g\,(mb),$$

est indéterminé. On reprend alors la formule n° 1 : le point A_1 est le pôle P de la corde MN et le point B_1 est à l'infini. Par suite,

$$2\rho = MP\,\frac{\sin ab}{\sin ma \sin mb} = MP\,\operatorname{tg} ab.$$

(*) SERVAIS, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e série, t. XIX, p. 536.

(**) IDEM, *Ibid.*, 3e série, t. XVII, p. 582.

Cette formule montre que *la droite joignant le pôle* P *de la corde normale* MN *à l'extrémité du diamètre de courbure fait avec la tangente* m *un angle égal à l'angle* (ab).

Si n désigne la tangente au point N, on a

$$MP = MN \operatorname{tg}(an).$$

Par suite,

$$2\rho = MN \operatorname{tg}(ab) \operatorname{tg}(an).$$

7. VI. La droite BC est parallèle à la tangente m, le point A est quelconque sur la conique Σ. On a

$$2\rho = MA_1 \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)} = MA_1 [\operatorname{cotg}(ma) - \operatorname{cotg}(mb)].$$

Si l'on désigne par A_1' et B_1' les points d'intersection de la normale en M avec les perpendiculaires abaissées du point A_1 sur les droites a, b, l'égalité précédente devient

$$2\rho = MA_1' - MB_1' = B_1'A_1'.$$

Ainsi, *soient* M, A, B, C *quatre points d'une conique* Σ; *la corde* BC *est supposée parallèle à la tangente au point* M; *la droite* CA *coupe cette tangente au point* A_1. *Si de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les cordes* MA *et* MB, *elles interceptent sur la normale en* M *un segment égal au diamètre du cercle osculateur en ce point.*

Si le point B est l'extrémité de la corde normale en M, on retrouve une construction due à M. C. Pels (*).

8. Soient x, y, z les distances du point M aux côtés BC, CA, AB du triangle inscrit ABC; α, β, γ les distances des

(*) *Mathesis*, 2e sér., t. VIII, p. 117.

sommets A, B, C à la tangente m; R le rayon du cercle circonscrit à ABC; on a

$$2\rho = \frac{MA_1 . MB_1}{A_1B_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)} \cdot \frac{MA . MB}{MA . MB} = \frac{MA_1 . MB_1}{A_1B_1} \frac{AB_2 . x}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{xyz}{\alpha\beta\gamma} 2R \frac{\gamma . MA_1 . MB_1 \sin C}{A_1B_1xy} = \frac{xyz}{\alpha\beta\gamma} 2R \frac{\gamma}{A_1B_1 \sin A_1 \sin B_2}.$$

Donc

$$\rho = \frac{xyz}{\alpha\beta\gamma} R \ (^*).$$

9. Les tangentes aux points M′, A, B déterminent sur m les points M_2', A_2, B_2, et l'on a

$$(MA_2M_2'B_2) = (mam'b).$$

On tire de cette égalité

$$\lim \frac{MM_2'}{\sin(mm')} = \lim \frac{M_2'A_2 . MB_2}{A_2B_2} \frac{\sin(ab)}{\sin(m'a)\sin(mb)},$$

ou

$$\rho = \frac{MA_2 . MB_2}{A_2B_2} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)} \ (^{**}).$$

10. Cas particulier. — Les points A et B sont choisis sur les rayons joignant le point M aux foyers F et F′; les points A_2 et B_2 sont sur les directrices et les droites A_2F, B_2F', respectivement normales à MA et MB, déterminent sur la normale MN deux points R et R′ tels que

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{MR} + \frac{1}{MR'}.$$

(*) Neuberg, *loc. cit.*

(**) von Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, p. 281.

En effet, on a

$$(ma) = (mb), \quad (ab) = \pi - 2(ma),$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{A_2M + MB_2}{MA_2 . MB_2} \frac{\sin(ma)\sin(ma)}{2\sin(ma)\cos(ma)} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(ma)\left(\frac{1}{MA_2} - \frac{1}{MB_2}\right).$$

Or

$$MR = MA_2 \operatorname{cotg}(am), \quad MR' = MB_2 \operatorname{cotg}(am).$$

En remarquant que les produits MR.MR′ et $MA_2 . MB_2$ sont de signes contraires, on a donc

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{MR} + \frac{1}{MR'}.$$

Soient μ le centre de courbure au point M; N_a le point de rencontre de la normale en M avec l'axe FF′; F_1 et S les points d'intersection de MF′ avec les perpendiculaires à la normale menées par les points F et N_a. On a

$$(MSF_1F') = (T_aN_aFF') = -1 = (M\mu RR').$$

Les droites Sμ, F_1R, F′R′ sont donc concourantes. Par suite la droite Sμ est normale à MF′ (construction connue).

11. Soient ABC un triangle inscrit à une conique Σ; A′B′C le triangle formé par les tangentes a', b', c' en A, B, C. On a (9)

$$\rho_A = \frac{AC' . AB'}{B'C'} \frac{\sin(bc)}{\sin(a'b)\sin(a'c)}, \quad \rho_B = \frac{BA' . BC'}{C'A'} \frac{\sin(ca)}{\sin(b'a)\sin(b'c)},$$

$$\rho_C = \frac{CA' . CB'}{A'B'} \frac{\sin(ab)}{\sin(c'a)\sin(c'b)}.$$

Donc

$$\rho_A\rho_B\rho_C = \frac{AC'.AB'.BA'.BC'.CA'.CB'}{B'C'.C'A'.A'B'} \times \frac{\sin(bc)\sin(ca)\sin(ab)}{\sin(a'b)\sin(a'c)\sin(b'a)\sin(b'c)\sin(c'a)\sin(c'b)}$$

Mais on a

$$\frac{AC'.BC'}{\sin(a'c)\sin(b'c)} = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2(a'b')}, \quad \frac{BA'.CA'}{\sin(b'a)\sin(c'a)} = \frac{\overline{BC}^2}{\sin^2(bc)},$$

$$\frac{CB'.AB'}{\sin(c'b)\sin(a'b)} = \frac{\overline{CA}^2}{\sin^2(c'a')}.$$

Donc

$$\rho_A\rho_B\rho_C = \frac{\overline{AB}^2.\overline{BC}^2.\overline{CA}^2}{\sin^2(a'b')\sin^2(b'c')\sin^2(c'a')} \cdot \frac{\sin(bc)\sin(ca)\sin(ab)}{B'C'.C'A'.A'B'}$$

En tenant compte des égalités

$$AB.BC\sin(ca) = 2ABC, \ldots; \quad \sin(a'b') = \frac{A'B'}{2R'}, \ldots$$

$$A'B'.B'C'.C'A' = 4R'.A'B'C',$$

on obtient

$$\rho_A\rho_B\rho_C = \left(2R'\frac{ABC}{A'B'C'}\right)^3.$$

12. Soient m, m_1, a_1, b_1 les tangentes aux points M, M', A, B. On projette du point mm_1 la section de ces droites par une tangente quelconque de la conique Σ; on obtient le faisceau de droites $(m, m_1\, a', b')$, et l'on a

$$(MA'M'B') = (ma'm_1b').$$

On tire de cette égalité

$$\lim \frac{MM'}{\sin(mm_1)} = \lim \frac{M'A'.MB'}{A'B'} \frac{\sin(a'b')}{\sin(m_1a)\sin(mb')},$$

ou

$$\rho = \frac{MA_1.MB_1}{A_1B_1} \frac{\sin(a_2b_2)}{\sin(ma_2)\sin(mb_2)}.$$

a_2 et b_2 sont les droites qui projettent du point M les intersections d'une tangente quelconque de la conique avec les tangentes aux points A et B.

Des formules (1) et (9) on tire

$$\frac{MA_2.MB_2}{A_2B_2} = \frac{1}{2} \frac{MA_1.MB_1}{A_1B_1}.$$

Par suite on a aussi

$$\rho = 2 \frac{MA_2.MB_2}{A_2B_2} \frac{\sin(a_2b_2)}{\sin(ma_2)\sin(mb_2)}.$$

Les tangentes aux points M, M', A, B déterminent sur une tangente d à la conique Σ la ponctuelle $M_3M'_3A_3B_3$, et l'on a

$$(MA'M'B') = (M_3A_3M'_3B_3).$$

Si S désigne le pôle de la corde MM', on a

$$M_3M'_3 : \sin(mm_1) = SM'_3 : \sin(md).$$

On déduit de ces deux dernières relations

$$\lim \frac{MM'}{\sin(mm_1)} = \lim \frac{SM'_3}{\sin(md)} \frac{A_3B_3}{M'_3A_3.M_3B_3} \frac{M'A'.MB'}{A'B'}.$$

et par suite

$$\rho = \frac{MM_2}{\sin(md)} \frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1B_1} \frac{A_2B_2}{MA_2 \cdot MB_2}.$$

§ 2.

13. Soient M et M′ deux points infiniment voisins d'une cubique gauche Σ; A, B, s deux points et une sécante quelconques de cette courbe, m la tangente en M; μ, μ', α, β, les plans mM, mM′, mA, mB; A′, B′ les traces de MM′ sur les plans sA, sB; on a

$$s(MAM'B) = m(MAM'B) \quad \text{ou} \quad (MA'M'B') = (\mu\alpha\mu'\beta).$$

On tire de cette dernière égalité

$$\lim \frac{MM'}{\sin(\mu\mu')} = \lim \frac{M'A' \cdot MB'}{A'B'} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu'\alpha)\sin(\mu\beta)},$$

ou

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{3} \frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha)\sin(\mu\beta)}.$$

$\mathfrak{C}$ est le rayon de torsion de la cubique gauche Σ, au point M, A_1, B_1 les traces de m sur les plans sA, sB. Les droites m et s sont des directrices d'un hyperboloïde circonscrit à la cubique gauche; les droites AA_1 et BB_1 sont des génératrices de cet hyperboloïde. La courbure totale de cet hyperboloïde au point M est donnée par la formule (*)

$$R_1R_2 = -\frac{\overline{MA_1^2} \cdot \overline{MB_1^2}}{\overline{A_1B_1^2}} \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\sin^2(\alpha\mu)\sin^2(\beta\mu)}.$$

(*) SERVAIS, *La courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité*. (MÉM. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1898; *Mathesis*, supplément, 1898, formule 47.)

Par suite,

$$R_1R_2 = -9\mathfrak{T}^2.$$

Ainsi, *si un hyperboloïde circonscrit à une cubique gauche a pour génératrice la tangente en un point* M *de la courbe, en ce point la courbure totale de l'hyperboloïde et la torsion de la cubique sont liées par la relation*

$$R_1R_2 = -9\mathfrak{T}^2 \text{ (*)}.$$

14. Les plans osculateurs aux points M′, A, B déterminent sur m les points M_2', A_2, B_2, et l'on a

$$(MA_2M_2'B_2) = (\mu\alpha\mu'\beta).$$

On tire de cette égalité

$$\lim \frac{MM_2'}{\sin(\mu\mu')} = \lim \frac{M_2'A_2 \cdot MB_2}{A_2B_2} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu'\alpha)\sin(\mu\beta)},$$

ou

$$\mathfrak{T} = \frac{MA_2 \cdot MB_2}{A_2B_2} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha)\sin(\mu\beta)}.$$

15. Les deux formules donnant la valeur de $\mathfrak{T}$ (n^{os} 13, 14) montrent que l'on a

$$\frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1B_1} = 3\frac{MA_2 \cdot MB_2}{A_2B_2}.$$

Ainsi, *si l'on projette d'une sécante quelconque de la cubique gauche* Σ *les points* A *et* B *de cette courbe, en* A_1, B_1 *sur la*

(*) On peut la déduire de la formule de Bonnet (DARBOUX, *Théorie des surfaces*, n° 511) et de la formule donnant la torsion d'une asymptotique, n° 512.

tangente m *au point* M, *et si l'on prend les traces* A_2, B_2 *de* m *sur les plans osculateurs en* A *et* B, *on a la relation*

$$\frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1B_1} = 3\,\frac{MA_2 \cdot MB_2}{A_2B_2}.$$

16. Soient C un point quelconque de la cubique Σ, m' la sécante MM', a', b' les traces respectives des plans MCA et MCB sur le plan mm'; on a

$$(MA'M'B') = (ma'm'b').$$

On tire de cette égalité

$$\lim \frac{MM'}{\sin(mm')} = \lim \frac{M'A' \cdot MB'}{A'B'}\,\frac{\sin(a'b')}{\sin(m'a')\sin(mb')},$$

ou

$$\rho = \frac{1}{2}\,\frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

ρ est le rayon de courbure de la cubique gauche Σ au point M, a, b les traces des plans MCA, MCB sur le plan osculateur au point M; la signification de A_1, B_1 est donnée au numéro 13.

17. L'égalité établie au numéro 15 montre que l'on a aussi

$$\rho = \frac{3}{2}\,\frac{MA_2 \cdot MB_2}{A_2B_2}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

Cette dernière relation peut aussi se déduire de

$$(MA_2M_2B_2) = (ma'm'b').$$

18. Si l'on suppose (n° 13) les plans α, β rectangulaires et également inclinés sur μ, la sécante s choisie de telle sorte

que le point B_1 soit à l'infini, la formule donnant la torsion devient

$$\mathfrak{T} = \frac{2}{3} MA_1.$$

Ainsi, *par la tangente* m *au point* M *à la cubique gauche* Σ *on mène deux plans rectangulaires, également inclinés sur le plan osculateur en* M, *et rencontrant la courbe* Σ *aux points* A *et* B. *La parallèle menée par* B *à la tangente* m *détermine un hyperboloïde circonscrit à la cubique. Le plan tangent en* A *à cet hyperboloïde coupe* m *en un point* A_1 *tel que*

$$\mathfrak{T} = \frac{2}{3} MA_1.$$

19. Si l'on suppose (n° 16) les droites *a*, *b* rectangulaires et également inclinées sur *m*; la sécante *s* choisie de telle sorte que le point B_1 soit à l'infini, la formule donnant la courbure devient

$$\rho = MA_1.$$

Ainsi, *par le point* M *de la cubique gauche, on mène dans le plan osculateur en ce point deux droites rectangulaires* a, b *également inclinées sur la tangente* m; C *étant un point quelconque de* Σ, *les plans* aC, bC *coupent la courbe respectivement en* A *et* B. *La parallèle menée par* B *à la tangente* m *détermine un hyperboloïde circonscrit à la cubique; le plan tangent en* A *à cet hyperboloïde coupe* m *en un point* A_1 *tel que*

$$\rho = MA_1.$$

20. On suppose le point B (16) dans le plan diamétral passant par *m* et les points B et C coïncidents. Le plan osculateur au point B est parallèle à la tangente *m* et le point B_1 est à l'infini; la trace *b'* de ce plan sur le plan μ est tangente à la conique (μ) inscrite dans la développable osculatrice à la

cubique gauche et située dans le plan μ; son point de contact B′ situé sur la tangente BC à la cubique est diamétralement opposé à M sur la conique (μ) et la droite BM est un diamètre de cette conique. On a (17)

$$\rho = \frac{3}{2} MA_2 \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

La droite a coupe la conique (μ) en un point A′ et la tangente en A′ à cette conique coupe m en A'_2; on a (9) pour le rayon de courbure ρ' de la conique (μ) en M

$$\rho' = MA'_2 \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

Par suite,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{3}{2} \frac{MA_2}{MA'_2}.$$

Le point $P \equiv (ab')$ est le pôle du plan MBA relativement à la cubique; la droite PA_2, trace du plan osculateur en A, sur le plan μ, est donc tangente à la conique (μ). Cela étant, on démontre aisément que le rapport $MA_2 : MA'_2$ est égal à $\frac{1}{2}$. En effet, si A′ parcourt la conique (μ), les ponctuelles décrites par A_2 et A'_2 sont projectives; en supposant A′ successivement en M et B′ on trouve pour points doubles le point M et le point à l'infini sur m. Par suite, $MA_2 : MA'_2 = c^{te}$. On détermine cette constante en plaçant le point A′ sur le diamètre de (μ) parallèle à m. On a pour cette position spéciale, O désignant le centre de (μ),

$$B'P = 2OA', \qquad B'P \cdot MA_2 = a'^2, \qquad MA'_2 = a'.$$

Donc

$$MA_2 : MA'_2 = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, ***en un point*** **M** ***d'une cubique gauche le rayon de courbure*** ρ ***de la courbe et le rayon de courbure*** ρ' ***de la conique*** (μ) ***inscrite dans la développable osculatrice à la cubique sont liés par la relation***

$$\rho : \rho' = \frac{3}{4}.$$

C'est un cas particulier d'un théorème de Bonnet.

21. La formule (n° 16),

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1B_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)},$$

peut s'écrire

$$2\rho = \frac{B_1M}{A_1B_1}\left[A_1M \operatorname{cotg}(bm) - A_1M \operatorname{cotg}(am)\right].$$

Si l'on désigne par A_2 et B_2 les points d'intersection de la normale principale au point M avec les perpendiculaires abaissées du point A_1 sur les droites a et b, l'égalité précédente devient

$$2\rho = \frac{B_1M \cdot B_2A_2}{A_1B_1}.$$

On a donc la propriété suivante : *Par la tangente* m *au point* M *à la cubique gauche* Σ *on fait passer un hyperboloïde circonscrit à la courbe ; les plans tangents à cet hyperboloïde en deux points* A *et* B *de* Σ *coupent* m *aux points* A_1 *et* B_1. C *étant un point de la cubique, les plans* MCA, MCB *déterminent sur le plan osculateur en* M *les droites* a, b. *Les perpendiculaires abaissées du point* A_1 *sur ces droites coupent la normale principale à la courbe en* M, *aux points* A_2, B_2. *Cela étant, le rayon de courbure en* M *est donné par la formule*

$$2\rho = \frac{B_1M \cdot B_2A_2}{A_1B_1}.$$

Remarque. — Les perpendiculaires abaissées du point B_1 sur les droites *a*, *b* coupent la normale principale en A_4 et B_4, et l'on a

$$2\rho = \frac{A_1M \cdot A_4B_4}{B_1A_4}.$$

Par suite,

$$A_1M \cdot A_4B_4 + B_1M \cdot B_2A_2 = 0.$$

22. L'hyperboloïde considéré a une génératrice semi-sécante de Σ parallèle à *m*; si le point B est le point d'appui de cette génératrice sur la cubique, le point B_1 est à l'infini et la propriété précédente donne

$$2\rho = A_2B_2.$$

Ainsi, *soient* A, B, C *trois points quelconques d'une cubique gauche* Σ *tangente en* M *à la droite* m. *La parallèle menée par* B *à* m *détermine un hyperboloïde circonscrit à* Σ. *Le plan tangent en* A *à cet hyperboloïde coupe* m *en* A_1; *les plans* MCA *et* MCB *coupent le plan osculateur en* M *suivant les droites* a *et* b. *Les perpendiculaires abaissées du point* A_1 *sur ces droites déterminent sur la normale principale à la courbe en* M *un segment égal au diamètre de courbure de la courbe* Σ *en* M.

23. Les développements (n° 21) appliqués à la formule donnée (n° 17) conduisent de même au théorème suivant :

Soient A, B, C *trois points quelconques d'une cubique gauche* Σ *tangente en* M *à la droite* m; A_2, B_2 *les traces de* m *sur les plans osculateurs à la courbe en* A *et* B; a *et* b *celles des plans* MCA, MCB *sur le plan osculateur en* M. *Les perpendiculaires abaissées du point* A_2 *sur ces droites* a *et* b *coupent la normale principale à la courbe en* M, *aux points* A_3, B_3. *Cela étant, le rayon de courbure de la courbe* Σ *au point* M *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{3}{2} \frac{B_2M \cdot B_2A_2}{A_2B_2}.$$

Remarque. — Les perpendiculaires abaissées du point B_2 sur les droites a et b coupent la normale principale en A_6 et B_6, et l'on a

$$\rho = \frac{3}{2}\frac{A_2M \cdot A_6B_6}{B_2A_2}.$$

Par suite,

$$A_2M \cdot A_6B_6 + B_2M \cdot B_2A_2 = 0.$$

24. Si le point B est choisi dans le plan diamétral passant par la tangente m; le point B_2 est à l'infini, la propriété précédente donne

$$\rho = \frac{3}{2}A_2B_5.$$

25. Soient E, F les deux points de la cubique Σ où les plans osculateurs ε et φ sont parallèles; e et f les tangentes en ces points, a la droite menée par E parallèlement à f; a' la parallèle menée par F à e; B un point quelconque de la courbe Σ; b et b' les traces du plan EFB sur les plans ε et φ; B_2 et B_2' les traces de e et f sur le plan osculateur en B. Si dans la détermination du rayon de courbure au point E on suppose les points A et C confondus en F on a

$$\rho_E = \frac{3}{2}EB_2\frac{\sin(ab)}{\sin(ea)\sin(eb)}.$$

De même

$$\rho_F = \frac{3}{2}FB_2'\frac{\sin(a'b')}{\sin(fa')\sin(fb')}.$$

Mais

$$(a'b') = (eb), \quad (ab) = (fb'), \quad (ea) = (a'f) = (ef).$$

Par suite,

$$\tfrac{1}{4}\rho_E\rho_F\sin^2(ef) = -9EB_2 \cdot FB_2'.$$

Ainsi, *soient* E *et* F *les points de la cubique* Σ *où les plans osculateurs sont parallèles;* B_2 *et* B'_2 *les points d'intersection des tangentes* e *et* f *avec le plan osculateur en un point quelconque* B *de* Σ, *les rayons de courbure en* E *et* F *sont liés par la relation*

$$4\rho_E\rho_F \sin^2(ef) = -9EB_2FB'_2.$$

26. Soient M et A deux points d'une parabole gauche; B le point unique à l'infini de la courbe. Si dans la détermination du rayon de courbure au point M on suppose A et C coïncidents, on a (formule n° 17)

$$\rho_M = \frac{3}{2} MA_2 \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

La droite a joint le point M à la trace M_2 de la tangente en A sur le plan μ osculateur en M; la droite $b \equiv (\mu, MAB)$ coupe l'intersection A_2M_2 des plans osculateurs en M et A au pôle du plan MAB; MAB étant un plan diamétral, son pôle est à l'infini et la droite b est parallèle à A_2M_2. Ainsi les angles (ab), (ma), (mb) sont ceux du triangle MA_2M_2. On a donc

$$\rho_M = \frac{3}{2}\frac{\overline{MA_2^2}}{} \frac{\sin(ab)\, MM_2 . A_2M_2}{\sin(ma)\sin(mb)\, MM_2A M_2 . \overline{M_2A_2^2}} = \frac{3}{2}\frac{\overline{MA_2^2}}{A_2M_2 . h_M}$$

h_M étant la distance du point M à la droite A_2M_2. De même

$$\rho_A = \frac{3}{2}\frac{\overline{AM_2^2}}{A_2M_2 . h_A}.$$

Donc

$$\rho_M : \rho_A = \frac{\overline{MA_2^2}}{h_M} : \frac{\overline{AM_2^2}}{h_A}.$$

Ainsi, *soient* m, a, μ, α *les tangentes et les plans osculateurs*

en deux points M *et* A *d'une parabole gauche;* M_2 *et* A_2 *les points* (m, α) *et* (a, μ); h_M *et* h_A *les distances des points* M *et* A *à l'intersection* A_1M_2 *des plans osculateurs* μ *et* α; *les rayons de courbure en ces points* M *et* A *sont liés par la relation*

$$\rho_M : \rho_A = \frac{\overline{MA_2}^3}{h_M} : \frac{\overline{AM_2}^3}{h_A}.$$

27. Les points E et F (25) sont diamétralement opposés sur l'hyperboloïde circonscrit à la cubique Σ et passant par les tangentes en ces points. Les courbures totales en ces deux points sont donc égales, et par suite (13) les torsions de la cubique Σ aux points E et F sont aussi égales. Ainsi, *les torsions de la cubique gauche* Σ *aux points de contact des plans osculateurs parallèles sont égales.*

28. Soit MA_2AM_2 le quadrilatère gauche formé par les tangentes MA_2 et AM_2 en deux points quelconques M et A de la cubique gauche Σ et par les droites associées MM_2 et AA_2. Ce quadrilatère est situé sur un hyperboloïde circonscrit à la courbe. En désignant par μ, α les plans osculateurs A_2MM_2, A_2AM_2 aux points M et A; par σ le plan MA_2A, les courbures totales de l'hyperboloïde aux points M, A_2, A sont liées par les relations

$$(R_1R_2)_M \cdot (R_1R_2)_{A_2} \sin^4(\mu\sigma) = \overline{MA_2}^4$$
$$(R_1R_2)_A \cdot (R_1R_2)_{A_2} \sin^4(\alpha\sigma) = \overline{AA_2}^4.$$

On en déduit en tenant compte des égalités (13)

$$(R_1R_2)_M = -36\,\mathfrak{C}_M^2, \qquad (R_1R_2)_A = -36\,\mathfrak{C}_A^2,$$
$$\frac{\mathfrak{C}_M}{\mathfrak{C}_A} \frac{\sin^2(\mu\sigma)}{\sin^2(\alpha\sigma)} = \frac{\overline{MA_2}^2}{\overline{AA_2}^2}.$$

Ainsi, *si* A_2 *est la trace de la tangente en* M *à la cubique* Σ,

sur le plan osculateur en A, *les torsions en ces deux points sont liées par la relation*

$$\frac{\mathfrak{T}_M}{\mathfrak{T}_A}\frac{\sin^2(\mu\sigma)}{\sin^2(\alpha\sigma)} = \frac{\overline{MA_2}^2}{\overline{AA_2}^2}.$$

α *et* μ *sont les plans osculateurs en* A *et* M, σ *le plan* AMA_2.

29. Soient μ, μ_1, α_1, β_1 les plans osculateurs aux points M, M', A, B; on projette de la droite $\mu\mu_1$ la section de ces plans par un axe quelconque de la cubique gauche Σ, on obtient le faisceau de plans $(\mu\mu_1\alpha'\beta')$ et l'on a

$$(MA'M'B') = (\mu\alpha'\mu'\beta').$$

On tire de cette égalité

$$\lim\frac{MM'}{\sin(\mu\mu_1)} = \lim\frac{M'A'.MB'}{A'B'}\,\frac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\mu_1\alpha')\sin(\mu\beta')},$$

ou

$$\mathfrak{T} = \frac{MA_1.MB_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(\alpha_2\beta_2)}{\sin(\mu\alpha_2)\sin(\mu\beta_2)}.$$

α_2 et β_2 sont les plans qui projettent de la tangente *m* les traces d'un axe quelconque *t* de la cubique sur les plans osculateurs aux points A et B.

30. Les formules donnant la valeur de $\mathfrak{T}$ (n^{os} 13, 29) montrent que l'on a

$$\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha)\sin(\mu\beta)} = 5\,\frac{\sin(\alpha_2\beta_2)}{\sin(\mu\alpha_2)\sin(\mu\beta_2)}.$$

Ainsi, *soient* α, β, α_2, β_2 *les plans projetant de la tangente en* M *à la cubique* Σ *les points* A *et* B *de la courbe et les traces*

d'un axe quelconque t *de* Σ, *sur les plans osculateurs en ces points*, μ *étant le plan osculateur en* M, *on a la relation*

$$\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha)\sin(\mu\beta)} = 3\,\frac{\sin(\alpha_2\beta_2)}{\sin(\mu\alpha_2)\sin(\mu\beta_2)}.$$

31. — Il résulte de la formule (n° 14) et de la précédente que l'on a

$$\mathfrak{C} = 3\,\frac{MA_2 \cdot MB_2}{A_2B_2}\,\frac{\sin(\alpha_2\beta_2)}{\sin(\mu\alpha_2)\sin(\mu\beta_2)}.$$

La tangente *m* et l'axe *t* déterminent un hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice à Σ; les plans tangents aux points A_2 et B_2 à cet hyperboloïde sont α_2 et β_2; on a donc pour la courbure totale au point M

$$R_1R_2 = -\,\frac{\overline{MA_2}^2 \cdot \overline{MB_2}^2}{\overline{A_2B_2}^2}\,\frac{\sin^2(\alpha_2\beta_2)}{\sin^2(\mu\alpha_2)\sin^2(\mu\beta_2)}.$$

Par suite,

$$9R_1R_2 = -\,\mathfrak{C}^2.$$

Ainsi, *si un hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice à une cubique gauche a pour génératrice la tangente en un point* M *de la courbe, en ce point la courbure totale de l'hyperboloïde et la torsion de la cubique sont liées par la relation*

$$9R_1R_2 = -\,\mathfrak{C}^2.$$

JOSEPH-MARIE DE TILLY

(1837-1906)

ESQUISSE BIOGRAPHIQUE

PAR

PAUL MANSION
Professeur à l'Université de Gand
Membre de l'Académie royale de Belgique

LOUVAIN
IMPRIMERIE POLLEUNIS ET CEUTERICK
60, RUE VITAL DECOSTER, 60.
(Ancienne rue des orphelins, 32)

Même maison à Bruxelles, 37, rue des Ursulines.

1906

JOSEPH-MARIE DE TILLY

(1837-1906)

Le 4 août 1906, la Belgique a perdu l'un de ses plus nobles enfants, le lieutenant-général Joseph-Marie De Tilly, membre de l'Académie royale de Belgique et de la Société scientifique de Bruxelles, dont les écrits sur les principes de la géométrie et de la mécanique resteront, croyons-nous, dans le domaine de la philosophie scientifique, l'une des œuvres les plus remarquables du XIX^e^ siècle.

Nous avons publié autrefois dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (2^e^ série, t. VII, pp. 584-595), une *Notice sur les recherches de M. De Tilly en Métagéométrie*. Nous donnons plus bas le discours que nous avons prononcé, le 7 août dernier, aux funérailles de M. De Tilly et où nous avons reproduit, en les complétant, plusieurs de nos appréciations antérieures sur ses travaux.

Voici les dates principales de la carrière militaire de M. De Tilly. Né à Ypres, le 16 août 1837, il a été successivement élève (1853-1858), répétiteur (1864-1868), professeur (1868-1877) à l'École militaire ; directeur de l'arsenal de construction d'Anvers (1879-1889) ; et enfin commandant et directeur des études à l'École militaire (26 décembre 1889-26 décembre 1899). Il sut y faire régner l'ordre et la discipline d'une manière plus absolue qu'à aucune période antérieure et il y éleva le niveau des études scientifiques.

Le 26 décembre 1899, M. De Tilly fut nommé pré-

sident du comité d'études de la position d'Anvers et ainsi éloigné de l'École militaire. Tout le monde regarda cette nomination comme une destitution déguisée ; et quand M. De Tilly eut été mis à la pension, avant l'âge, en 1900, cette mesure suscita, à la Chambre des Représentants, un long débat qui mit aux prises, comme on l'a dit, la science militaire et la bureaucratie militaire. L'ordre du jour, voté par la Chambre, donna raison à la science.

M. De Tilly avait gravi peu à peu tous les échelons de la hiérarchie militaire, depuis le grade de sous-lieutenant d'artillerie jusqu'à celui de lieutenant-général.

Il avait été nommé successivement chevalier, officier, commandeur, grand officier de l'ordre de Léopold (novembre 1899). Il était décoré de plusieurs ordres étrangers.

Nous faisons connaître plus bas les étapes principales de la vie scientifique de M. De Tilly. Il était membre depuis longtemps de la Société royale des Sciences de Liége, de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, dans les Recueils de laquelle il a publié un de ses principaux ouvrages, l'*Essai* de 1878.

Il faisait partie de la Commission de l'Observatoire et du Conseil d'administration de la Bibliothèque royale, etc., etc.

La santé de M. De Tilly avait été assez chancelante pendant les hivers de 1904-1905, 1905-1906, qu'il dut passer dans le Midi ; néanmoins il put présider les sessions de la Société scientifique de Bruxelles d'octobre 1904 à Mons, de mai 1905 et d'octobre 1905 à Bruxelles. Au printemps de 1906, il semblait avoir repris son ancienne vigueur, mais une affection cardiaque l'enleva à l'affection de sa famille et de ses amis, après quelques jours de maladie, le 4 août 1906. La veille, il avait reçu les derniers secours de la religion qu'il avait toujours pratiquée sans bravade et sans peur.

Ses funérailles eurent un caractère très simple : il avait refusé les honneurs militaires. Le service funèbre eut lieu

le mardi 7 août, à 11 heures, en l'église des SS. Jean et Nicolas à Schaerbeek et l'inhumation, immédiatement après, au cimetière de Laeken. M. le colonel Maffei et M. Salkin, professeur émérite à l'École militaire, l'un à la maison mortuaire, l'autre au cimetière, prononcèrent des allocutions émues où ils dirent, en termes d'une grande élévation, à quel point M. De Tilly fut, dans sa vie privée, l'ami fidèle et dévoué de ceux qui avaient mérité son affection, dans sa vie publique, l'homme du devoir absolu, sans faiblesse et sans compromission.

Voici le discours où, à la maison mortuaire aussi, nous avons essayé d'apprécier sa carrière scientifique.

MESSIEURS,

L'homme éminent dont nous pleurons la perte a fait partie de l'Académie royale de Belgique depuis 1870, de la Société scientifique de Bruxelles depuis 1876, du Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen depuis 1891.

Au nom de ces corps savants, auxquels il était si dévoué, permettez-moi de lui adresser un dernier adieu et, comme collègue, comme ami, comme disciple, d'esquisser sa belle et féconde carrière scientifique.

Elle se divise en quatre périodes presque égales dont chacune est marquée par une œuvre d'une valeur scientifique et philosophique durable.

Joseph-Marie De Tilly, né à Ypres en 1837, entre à l'École militaire à seize ans, en 1853, pour en sortir comme sous-lieutenant d'artillerie en 1858; il fait partie de l'armée active jusqu'en 1864, époque où il est nommé répétiteur à l'École militaire ; il occupe ces fonctions jusqu'en 1868.

C'est pendant ces dix années d'une laborieuse jeunesse (1858-1868) que De Tilly pose les bases de ses travaux géométriques. Dès 1860, à vingt-trois ans, il publie ses

Recherches sur les Éléments de géométrie, où il signale toutes les imperfections et les lacunes du traité de Legendre. Dans ce premier écrit, il donne déjà des preuves d'un vrai esprit critique à propos des questions difficiles qui se présentent au début de la science de l'espace et, en particulier, à propos du postulatum d'Euclide.

Peu de temps après, il fait cette découverte capitale que l'on peut établir un système complet et rigoureux de géométrie sans recourir ni au postulatum d'Euclide, ni à aucun autre équivalent. Sans sortir de la géométrie plane, il retrouve par une voie personnelle, tous les résultats fondamentaux de Lobatchefsky et de Bolyai. Mais il va plus loin qu'eux ; le premier, il écrit une cinématique, une statique et une dynamique non euclidiennes. Ces recherches furent présentées à l'Académie royale de Belgique, le 1er août 1868, sous le titre d'*Études de Mécanique abstraite*.

La seconde période de la carrière scientifique de De Tilly s'étend de 1868 à 1878. C'est alors que son activité scientifique devient le plus intense. Pendant ces dix années, il publie plus de cinquante notes ou mémoires sur les sujets les plus variés de mathématiques pures ou appliquées. Il avait été nommé professeur à l'École militaire en 1868. La Classe des sciences de l'Académie royale l'avait appelé dans son sein comme correspondant en 1870. Dès 1872, elle le charge de faire le *Rapport séculaire sur les travaux de l'Académie*. Ce rapport, d'une lumineuse concision, est une belle page d'histoire scientifique ; mais il n'est rien en regard de l'œuvre capitale de De Tilly pendant cette seconde période de sa vie, je veux dire son *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (1878). Dans ce remarquable ouvrage, c'est directement que De Tilly attaque et expose d'une manière complète les principes de la science de l'espace. Reprenant à son insu une idée de Cauchy, dont on a d'ailleurs retrouvé le germe chez Leibniz, il fonde toute la géométrie sur la notion d'intervalle ou de distance de

deux points. Cette notion première irréductible, il l'analyse avec une sagacité et une rigueur magistrales, et il en fait sortir successivement la géométrie de Riemann, la géométrie de Lobatchefsky et enfin celle d'Euclide. Dans son livre, De Tilly soumet aussi à sa critique pénétrante les principes de la mécanique, mais en les considérant seulement dans l'espace euclidien.

La troisième période de la carrière de De Tilly est une période d'activité professionnelle et de recueillement scientifique. Déchargé en 1877 de ses fonctions de professeur à l'École militaire, il fut nommé en 1879 directeur de l'arsenal de construction militaire d'Anvers et occupa ce poste pendant dix ans. Malgré son écrasante besogne, il parvient à publier, entre autres travaux, une étude originale d'analyse sur les équations linéaires (1887). La Classe des sciences de l'Académie l'avait nommé membre effectif en 1878 ; il en fut élu Directeur et nommé Président de l'Académie entière pour l'année 1887. A la séance solennelle de décembre 1887, il prononça un discours extrêmement remarquable sur les *Notions de force, d'accélération et d'énergie*. C'est une refonte du dernier chapitre de l'essai de 1878, où se trouve, à côté d'une critique approfondie des principes de la mécanique, une vraie découverte philosophique : De Tilly y expose, en effet, une solution simple et naturelle du problème de la conciliation du déterminisme avec le libre arbitre ; simple et naturelle, bien entendu, pour ceux qui connaissent la mécanique rationnelle.

La quatrième période comprend exactement les dix années suivantes, du 26 décembre 1889 au 26 décembre 1899, pendant lesquelles De Tilly est Commandant et en même temps Directeur des études à l'École militaire. En 1891, il succède à Liagre comme membre du Conseil de perfectionnement moyen et y acquiert bientôt la plus légitime influence. En 1897 et 1899, il fait paraître deux éditions successives d'une brochure substantielle sur les

examens d'admission en mathématiques à l'École militaire : cet opuscule méthodologique contient des indications vraiment précieuses pour les professeurs de mathématiques qui s'intéressent au progrès de l'enseignement.

De Tilly a publié pendant cette période de sa vie un mémoire scientifique qui est le couronnement de son œuvre géométrique et où il s'est vraiment surpassé lui-même : je veux parler de son *Essai de Géométrie analytique générale* (1892). Il y montre que toute la géométrie se réduit en dernière analyse à une seule relation entre $n + 2$ points si l'espace est à n dimensions ; entre 5 points par conséquent, pour notre espace expérimental à trois dimensions. Cette relation n'est pas arbitraire, elle est soumise à une condition nécessaire et suffisante, dite *condition des six points*, qu'il détermine. Il faut lire dans le mémoire même, la plume à la main, comment l'auteur déduit de la relation fondamentale les trois géométries euclidienne, lobatchefskienne, riemannienne, sans recourir à aucune autre notion que celle de distance.

Après 1899, De Tilly a complété plusieurs de ses recherches sur la géométrie ou la mécanique, mais selon lui, sans y ajouter rien d'essentiel, sauf, ce nous semble, dans quelques pages sur le triangle isoscèle ; il y résout à fond une difficulté qui n'existe vraiment qu'en géométrie plane, et que les philosophes ont appelée, en géométrie solide, le paradoxe de Kant sur l'équivalence des objets symétriques.

Telle est l'œuvre scientifique et philosophique de De Tilly : il a étudié trois fois d'une manière originale et de plus en plus approfondie la question des premiers principes de la science de l'espace ; vingt-cinq ans avant les mathématiciens philosophes italiens, il a établi d'une manière solide cette vérité capitale : *la géométrie est la physique mathématique des distances ;* — le premier, presque le seul, il a créé la mécanique non euclidienne ; — par une voie plus simple et plus naturelle que Boussinesq,

il a donné une solution du problème de la conciliation du déterminisme avec le libre arbitre.

Cette œuvre de De Tilly a-t-elle été appréciée dans son pays comme elle méritait de l'être ? Nous n'oserions l'affirmer : les géomètres la trouvaient trop philosophique, les philosophes ne pouvaient la comprendre parce qu'elle était trop mathématique. A cette heure des suprêmes séparations, qu'il nous soit permis à nous au moins, son disciple et souvent le confident de ses pensées, dans ce domaine de la philosophie scientifique, de dire hautement que nous regardons les travaux de De Tilly, en géométrie et en mécanique non euclidiennes, comme appartenant à la partie impérissable de la science.

Mais ce n'est pas là toute l'œuvre de De Tilly. Homme du devoir, il savait que, comme officier d'artillerie, il devait être un technicien et il le fut. En réalité, ce sont ses heures de loisir seules qu'il a données à la science pure ou philosophique. Dans ses heures de travail professionnel, qui sont les plus nombreuses, il consacre toutes les ressources de son esprit aiguisé par ses recherches spéculatives aux problèmes de mécanique appliquée et d'art militaire qu'il est de son devoir d'approfondir et de résoudre. C'est ainsi qu'en vingt ans, de 1863 à 1883, je trouve dans la liste de ses écrits plus de vingt notes, mémoires ou ouvrages sur les sciences appliquées : sur l'appréciation des distances en artillerie (1863) ; cours de mécanique (1866, 1868) ; deux cours d'artillerie (1867, 1872-1878) ; sur le frottement de glissement (1870) ; sur le roulement (1871) ; sur la balistique appliquée (1872) ; sur le mouvement d'un solide (1873-1874) ; sur la similitude mécanique (1873-1874) ; balistique extérieure (1874) ; balistique intérieure (1875) ; sur les levers du matériel d'artillerie (1875) ; sur des questions de balistique (1876) ; sur le cerclage des canons (1876) ; sur la rotation des projectiles (1877) ; sur des engrenages à embrayage auto-

matique (1878) ; sur la résistance de l'air dans le tir des projectiles (1883).

Sa compétence en mécanique pure et appliquée était universellement reconnue par ses confrères de l'Académie, de la Société scientifique et du Conseil de perfectionnement. Il était chargé de tous les rapports relatifs à cette partie de la science, ou y touchant de près ou de loin. Avec quelle conscience ne s'acquittait-il pas de cette tâche souvent ingrate de rapporteur ! Je pourrais citer tel travail récent de mécanique dont l'examen lui a coûté une grande partie de ses loisirs pendant près d'un an. Mais aussi, grâce à l'active collaboration d'un rapporteur aussi consciencieux, l'auteur a pu transformer son mémoire et le rendre inattaquable. Trente ans auparavant, De Tilly avait ainsi complété et précisé un mémoire de Genocchi sur les Eulériennes. Tel livre soumis au Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen est devenu un bon manuel, parce que l'auteur a pu le remanier d'après une critique minutieuse et détaillée que De Tilly, avec sa bienveillance accoutumée, avait bien voulu en faire.

Il avait des idées vraiment élevées sur le rôle de l'enseignement scientifique, soit dans les athénées et collèges, comme le prouvent son opuscule de 1897-1899 et maints articles originaux de méthodologie mathématique, soit dans les écoles techniques et, en particulier, à l'École militaire. Comme Brialmont, comme Liagre, comme Nerenburger, il appartenait à cette élite, qui pendant les fécondes années de leurs études supérieures ont senti leur intelligence se développer et s'épanouir sous l'influence d'un haut enseignement scientifique. Ils ont eu conscience de leur valeur personnelle en luttant de toutes leurs forces contre les difficultés des mathématiques transcendantes, des sciences physiques et de leurs applications exposées scientifiquement. Aussi ont-ils tous voulu que les jeunes générations qui doivent passer à l'École militaire pussent s'abreuver à leur tour à ces sources fécondes du savoir.

De Tilly a lutté dans des conditions difficiles pour le maintien de ces hautes traditions à l'École militaire et il y a réussi, mais au prix de bien rudes épreuves. Ce n'est ni le lieu ni le moment de les rappeler ; mais puisque j'ai l'honneur de parler ici au nom de l'Académie, je serais infidèle au mandat qu'elle a bien voulu me confier, si je ne disais pas que la Classe des sciences a fait tout ce qu'elle a pu pour en adoucir l'amertume. Dans sa séance du 6 janvier 1900 qui a suivi l'éloignement de De Tilly de cette École militaire à laquelle il avait donné le meilleur de sa vie, elle l'a élu à l'unanimité son Directeur pour la seconde fois.

La *Société scientifique de Bruxelles* s'honore aussi d'avoir compté De Tilly parmi ses membres pendant trente ans. Il a fait partie de son Conseil chaque fois que ses occupations professionnelles le lui ont permis ; il en a été vice-président trois fois (1876-1877, 1903-1904, 1904-1905) et président pendant l'année écoulée, 1905-1906. Nous étions fiers de compter dans nos rangs un savant aussi profond et aussi original, qui partageait nos convictions religieuses, philosophiques et scientifiques.

Par la dignité de sa vie, par la noblesse de son caractère, par son scrupuleux amour du devoir, par la sûreté de son amitié, De Tilly s'était acquis l'estime et l'affection de tous ceux qui avaient pu le connaître intimement. A l'Académie, à la Société scientifique de Bruxelles, au Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen, il ne comptait que des amis. En leur nom à tous, je lui adresse le suprême *Au revoir* de l'espérance chrétienne, là-haut, dans le royaume de la Lumière sans ombre, de la Justice sans défaillance.

Extrait de la *Revue des Questions scientifiques*,
3e série; t. X, pp. 353-361 (Octobre 1906)

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRETON

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VII. — JANVIER 1907.

(TOME XXVII DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1907

ABBREVIATIONS.

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (de 1874 à 1880).

JME. (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS de 1881 à 1897, ensuite par G. MARIAUD de 1897 à 1901.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AFAS., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, et KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER etc. (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-332 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327, à 332.

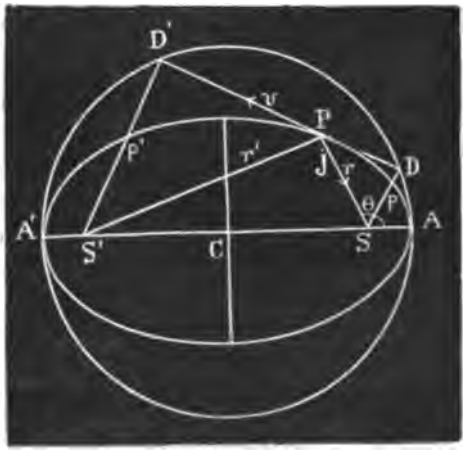
MATHESIS.

EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES PLANÈTES,

par M. BERTRAND, professeur à l'Ecole des Mines de Mons.

1. La présente note a pour but d'exposer comment on peut, par des procédés très élémentaires, déduire des lois de Képler la loi newtonienne de l'attraction, et inversement remonter de cette loi au mouvement elliptique, et d'appliquer les formules obtenues à la résolution d'une question connexe.

2. La première loi de Képler est relative à l'orbite elliptique. Appelons P la planète, APA′ l'ellipse qu'elle décrit autour du soleil S. Soient S′ l'autre foyer, C le centre, r et r' les rayons vecteurs issus des foyers et p, p' leurs distances à la tangente en P, $2a$ et $2b$ les axes de l'ellipse, θ l'anomalie vraie ASP, v la vitesse.



La seconde loi de Képler est celle des aires. On peut l'écrire sous l'une ou l'autre des formes

$$vp = C \quad \text{ou} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

qui expriment que le moment de la vitesse par rapport au foyer attirant est une constante C. Une propriété bien connue de l'ellipse donne $pp' = b^2$. On a donc

$$v = \frac{C}{b^2} p'.$$

La vitesse est donc proportionnelle au segment S'D' qui lui est perpendiculaire et l'on pourra obtenir l'hodographe en multipliant par $\frac{C}{b^2}$ les segments S'D' et en les faisant tourner d'un angle droit dans le sens du mouvement. Or, le lieu du point D' est le cercle principal. La vitesse du point D' sur cette circonférence représente donc l'accélération multipliée par $\frac{b^2}{C}$ et tournée d'un angle droit dans un sens déterminé. Comme cette vitesse est normale à D'C, l'accélération est parallèle à ce rayon, c'est-à-dire dirigée suivant $\overline{PS}$: Elle est *centrale*. D'autre part, comme la vitesse de D' a pour grandeur $a\frac{d\theta}{dt}$, l'accélération vaut

$$j = \frac{C}{b^2} a \frac{d\theta}{dt} = \frac{C^2 a}{b^2} \frac{1}{p^2}.$$

Elle est *inversement proportionnelle au carré de la distance.*

Appelons P la durée de la révolution planétaire. L'aire décrite pendant ce temps est πab; la constante des aires est donc égale à $\frac{2\pi ab}{T}$ et la formule précédente peut s'écrire

$$j = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

La troisième loi de Képler apprend donc que *le rapport de l'accélération à l'inverse du carré de la distance est le même pour toutes les planètes.* Nous représenterons ce rapport par μ, notation habituelle.

8. Proposons-nous maintenant le problème inverse. Sachant que l'accélération est donnée par la loi newtonienne, il faut retrouver le mouvement elliptique. On établit très élémentairement, d'après Newton(*), que la loi des aires résulte de la condition que l'accélération est centrale. Nous pourrons donc mettre la valeur de l'accélération sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$j = \frac{\mu}{r^2} = \frac{\mu}{C} \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

(*) *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, Liv. I, sec. 2, prop. I, p. 25 de la traduction de M^me^ la marquise du Chastelet, 1756.

et même envisager le cas où elle serait répulsive, μ ayant alors le signe —.

Si maintenant nous considérons un mobile qui se meut sur une circonférence de rayon $\frac{\mu}{C}$, de manière que son rayon soit constamment perpendiculaire au rayon vecteur de la planète, la vitesse de ce mobile représentera l'accélération planétaire. L'hodographe du mouvement que nous cherchons est, par suite, une circonférence.

Supposons que nous ayons pris le foyer S pour pôle de l'hodographe. Nous venons de voir que la vitesse de la planète est à chaque instant proportionnelle à un segment parti de S et limité à une circonférence; mais la loi des aires montre que cette vitesse varie aussi en raison inverse de la distance p de S à la tangente correspondante, c'est-à-dire en raison inverse d'un segment parti de S, à angle droit avec le segment correspondant de l'hodographe, et limité à la courbe podaire de la trajectoire inconnue par rapport à S. La podaire et l'hodographe sont donc des courbes inverses l'une de l'autre, et comme cette dernière est une circonférence, la première est une circonférence ou une droite.

L'orbite est, par suite, une courbe dont la podaire par rapport au centre des accélérations est une circonférence C. Soit DD′ une tangente à l'orbite, SDD′ étant un angle droit. L'orbite est l'enveloppe du côté DD′ de l'angle droit SDD′ qui se déplace de manière que son sommet décrive une circonférence et qu'un de ses côtés passe par un point fixe. Le centre instantané du déplacement de cette figure est le point d'intersection du rayon CD avec la perpendiculaire élevée en S sur SD. On en déduit aussitôt la position P du point caractéristique de l'enveloppe DD′, et, si S est intérieur à la circonférence :

$$SP + S'P' = AA'.$$

L'orbite est donc une ellipse dont S et S′ sont les foyers. Ce serait une hyperbole si S était extérieur à la circonférence, et une parabole si la podaire était une ligne droite.

On pourrait d'ailleurs arriver très simplement à ce résultat, par la géométrie élémentaire, sans faire intervenir la notion de centre instantané dans le déplacement d'une figure plane.

4. La construction de l'orbite elliptique s'effectue sans peine. On donne la position et la vitesse initiales, c'est à dire r et v en grandeur

et direction. On connaît aussi le rapport μ ; comme la dimension de ce rapport est $[L^3T^{-2}]$, nous pouvons, dans un but de simplification, représenter cette donnée par $\frac{1}{2}lv^2$, v étant la vitesse initiale et l une longueur connue. Nous chercherons à déterminer le second foyer S′. Il se trouve sur une droite menée par P et ayant sur la tangente v même inclinaison que SP mais dans l'autre sens, à une distance PS′ $= r'$ que nous allons calculer.

Les formules précédentes donnent :

$$\mu = C^2\frac{a}{b^2} = \frac{v^2ap}{p'} = \frac{v^2ar}{r'},$$

d'où, comme $\mu = \frac{1}{2}lv^2$,

$$lr' = 2ar;$$

d'autre part :

$$r + r' = 2a.$$

Ces deux équations du premier degré déterminent a et r' :

$$2a = \frac{lr}{l - r}; \qquad r' = \frac{r^2}{l - r}.$$

On obtiendra donc le second foyer par la construction d'une troisième proportionnelle qui se dispose très simplement sur le dessin.

La courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que

$$l \gtreqless r \quad \text{ou} \quad v^2 \gtreqless \frac{2\mu}{r}$$

et, dans le cas d'une hyperbole, c'est la branche concave vers le foyer [illegible] qui est décrite. L'autre branche correspondant au cas d'une [illegible]

[illegible] paragraphe précédent [illegible] pour la vitesse [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

équation dans laquelle p représente le paramètre de la courbe et e l'excentricité. Elle fournit un diagramme circulaire simple pour représenter la force vive de la planète et la transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique au cours de son mouvement. L'on pourra aisément traiter ainsi la plupart des exercices sur les orbites elliptiques, que renseignent les traités classiques.

6. Lagrange a repris après Euler le problème du mouvement d'un point sollicité par deux foyers attractifs suivant la loi de Newton; il y a ajouté un troisième centre d'accélération, situé au milieu de la distance des deux autres et agissant proportionnellement à la distance. Il signale comme remarquable que, dans certains cas, la trajectoire du point est une ellipse ayant les deux centres newtoniens pour foyers. Cette solution particulière a attiré l'attention de plusieurs géomètres tels que Legendre, Serret, Darboux et O. Bonnet, ainsi qu'on peut le voir aux notes de la quatrième édition de la *Mécanique analytique* de Lagrange, publiée par Darboux.

Les formules précédentes conduisent à ce résultat d'une manière fort simple.

Soient μ et μ' les coefficients relatifs aux deux centres d'attraction; r et r' les rayons focaux du mobile dans une position donnée. Faisons agir les deux centres isolément et demandons-nous quelle relation doit exister entre les grandeurs v et v' des vitesses de lancement pour que, dans chacune de ces hypothèses, l'orbite elliptique décrite soit la même. L'expression du carré de la vitesse en fonction des rayons focaux montre qu'il faut que l'on ait :

$$\mu r' = av^2 r \quad \text{et} \quad \mu' r = av'^2 r'$$

c'est-à-dire

$$\frac{v^2 r^2}{\mu} = \frac{v'^2 r'^2}{\mu'} \quad \text{ou encore} \quad \frac{v^2}{j} = \frac{v'^2}{j'}.$$

Appelant 2α l'angle des rayons vecteurs; les dénominateurs multipliés par $\cos\alpha$ sont les accélérations normales Les deux membres de cette dernière égalité représentent donc les rayons de courbure initiaux des trajectoires correspondant à chacun des deux centres attractifs agissant isolément, et l'égalité de ces rayons de courbure est la condition d'identité des deux trajectoires.

Cette condition conduit au résultat suivant, que l'on trouvera

dans Lagrange : le mobile sollicité simultanément par les deux forces décrit la même trajectoire s'il est lancé dans la même direction avec une vitesse V telle que $V^2 = v^2 + v'^2$. Mais la démonstration s'applique à un cas plus général et permet d'exposer un théorème dû à Ossian Bonnet (*) d'une manière qui a l'avantage de faire ressortir l'aspect physique du phénomène.

7. Le théorème est le suivant :

Si plusieurs masses m, m', m'', ..., *respectivement soumises à l'action des forces* F, F', F'', ..., *et partant toutes d'un point* A *avec des vitesses* v_0, v'_0, v''_0, ..., *de grandeurs différentes mais de même direction, décrivent la même courbe* ACB, *la masse quelconque* M, *soumise à l'action de la résultante des forces* F, F', F'', ... *et partant du point* A *avec une vitesse* V_0 *ayant la même direction que les vitesses* v_0, v'_0, v''_0, ..., *décrira encore la courbe* ACB, *pourvu que les forces* F, F', F'', ... *soient indépendantes du temps et que la force vive initiale* Mv_0^2 *de la masse* M *soit égale à la somme* $mv_0^2 + m'v_0'^2 + m''v_0''^2 + \cdots$ *des forces vives initiales des masses* m, m', m'', ...

On peut lui donner l'énoncé suivant :

Si plusieurs champs de forces admettent des trajectoires communes, le champ constitué par la superposition des premiers admet ces mêmes trajectoires. En partant d'un point d'une de ces trajectoires et appelant v_1, v_2, ... *les vitesses initiales de même direction qui la font décrire dans chacun des champs isolés, la vitesse initiale* V *qui la fait décrire dans le champ d'ensemble est donnée par* $V^2 = \Sigma v^2$.

Soient, en effet, A un point d'une trajectoire c commune à tous les champs et t la tangente en A à cette courbe. En lançant le mobile en A suivant t avec une vitesse arbitraire dans le premier champ par exemple, on obtient une famille de trajectoires dont les équations ne contiennent que la constante arbitraire v_1, et dans laquelle est comprise la trajectoire commune. Pour déterminer la vitesse v_1 qui correspondra à celle-ci, il suffira donc de fixer un des éléments géométriques qui spécifient cette courbe dans sa famille ; on pourra par exemple exprimer que le rayon de courbure en A de la trajectoire suivie est celui de la courbe commune. Or, en appelant j_{1n} l'accélération normale que le

(*) *Mécanique analytique* de Lagrange ; édition de Darboux ; 2e vol., note IV, p. 358.

mobile en A reçoit du premier champ, qui est connue, et ρ le rayon de courbure également connu, cette condition s'écrira :

$$\frac{v_1^2}{j_{1n}} = \rho ;$$

des équations analogues détermineront v_2, ...

Faisons maintenant agir le champ total. L'accélération totale est $\overline{J} = \Sigma \overline{j}$; comme la trajectoire c était commune à tous les champs, tous les $\overline{j}$ se trouvaient dans le plan osculateur en A à c, et $\overline{J}$ y est aussi. En lançant en A le mobile suivant la tangente t, la trajectoire d'ensemble sera tangente à c et aura même plan osculateur. Nous pouvons maintenant déterminer V de manière qu'elle ait même rayon de courbure que c. L'accélération normale totale étant J_n, il faudra pour cela que

$$\frac{V^2}{J_n} = \frac{v_1^2}{j_{1n}} = \frac{v_2^2}{j_{2n}} = \cdots = \rho,$$

c'est à-dire, puisque $J_n = \Sigma j_{1n}$:

$$V^2 = \Sigma v^2.$$

Il reste à montrer qu'au bout du parcours d'un élément $AB = ds$ appartenant à la courbe d'ensemble et à la courbe commune, ces éléments sont encore les mêmes pour les deux courbes. Au point B, la trajectoire d'ensemble et la courbe commune auront encore même tangente, puisqu'elles ont même courbure en A, et même plan osculateur, pour la même raison qu'en A. Il suffit donc de faire voir que la condition précédente, liant le mouvement d'ensemble à l'ensemble des mouvements isolés, reste vérifiée au point B. Pour cela, considérons en A les accélérations tangentielles J_t et j_{1t}, j_{2t}, ...; elles donnent :

$$J_t = \Sigma j_t.$$

Mais ces accélérations ne sont pas envisagées pendant un même élément de temps dt, mais le long d'un même chemin $AB = ds$ auquel correspondent, dans chacun des mouvements considérés, des durées dT, dt_1, dt_2, ..., en sorte que l'égalité précédente peut s'écrire :

$$\frac{dV}{dT} = \frac{dv_1}{dt_1} + \frac{dv_2}{dt_2} + \cdots$$

Multiplions par ds et remplaçons les $\frac{ds}{dt}$ par leurs valeurs v, il vient

$$V dV = \Sigma v dv,$$

et, par suite, en appelant V′ et v' les vitesses $V + dV$ et $v + dv$ au point B :

$$V'^2 = \Sigma v'^2.$$

La condition est donc vérifiée aussi au point B et ainsi de suite. La trajectoire dans le champ total coïncide par conséquent avec la trajectoire commune. De plus nous voyons qu'en chacun de ses points, le carré de la vitesse du mobile dans le champ de forces résultant est égal à la somme des carrés des vitesses dont il est animé lorsqu'il passe au même point en se mouvant suivant la même courbe dans chacun des champs de forces composants considérés isolément.

Janvier 1905.

BIBLIOGRAPHIE.

Tratado de las Curvas especiales notables, par F. Gomes Teixeira, Profesor en la Academia politechnica de Oporto, etc. Madrid, imprenta de la *Gaceta de Madrid*, 1905 (Grand, in-8, de IX-632 pages et 175 figures).

La *Real Academia de Ciencias de Madrid* avait proposé en 1892 et remis en 1895 au concours la question suivante : « On demande un catalogue méthodique de toutes les courbes auxquelles il a été donné des noms particuliers, avec une notice succincte, pour chacune d'elles, sur sa forme, son équation et ses propriétés générales ainsi que sur les ouvrages où elle a été étudiée pour la première fois. »

L'ouvrage que nous annonçons ici, fut présenté à ce concours à la fin de l'année 1897 et a remporté le prix académique; il est appelé à rendre de grands services aux géomètres, même après les travaux analogues de M. Brocard (*Notes de Bibliographie des courbes géométriques*, en 2 volumes; voir *Mathesis*, 1898, p. 32 et 1899, p. 164), de M. Basset (*An Elementary Trecatise on Cubic and Quartic Curves*) et de M. Gino Loria (*Spezielle algebraische und transcendente ebene Curven*; voir *Mathesis*, 1903, pp. 88 et 116). L'utilité d'un répertoire des courbes remarquables avait été proclamée à plusieurs reprises, notamment par M. Haton de la Goupillière (voir, par exemple, *Intermédiaire des mathématiciens*, t. I, p. 37) qui, lui-même, dans les NAM, a publié des notices bibliographiques sur quelques courbes. *L'Encyclopédie des Sciences mathématiques* contribuera largement à la réalisation de ce desideratum; elle a déjà publié des notices très bien faites sur les courbes transcendantes particulières, par M. G. Scheffers, sur les cubiques et quartiques gauches par M. Staude, etc.

Cependant, le livre de M. Gomes Teixeira est loin de faire double emploi avec les ouvrages que nous venons de citer. Chaque courbe ayant reçu un nom particulier est traitée directement : génération, équation cartésienne ou polaire, tangente et normale, rayon de courbure, quadrature, rectification, notices historique. L'auteur passe successivement en revue les cubiques (100 pages), les quartiques (153 pages), les courbes du 6^{me} et du 8^{me} ordre (70 pages), les

courbes transcendantes remarquables (40 pages), les spirales (50 pages), les paraboles et les hyperboles d'ordre supérieur (10 pages), les courbes cycloïdales (50 pages), différentes autres courbes planes (50 pages), les courbes à double courbure (70 pages), enfin la polhodie et l'herpolhodie (10 pages). A la fin, on rencontre une liste alphabétique des courbes étudiées et une liste alphabétique des noms des auteurs cités. (J. N.)

An Introduction to Projective Geometry and its Applications, an Analytic and Synthetic Treatement by Arnold Emch, Professor of Graphics and Mathematics in the University of Colorado. First Edition, First Thousand. New-York, John Wiley et Son; London, Chapman et Hall, 1905 (in-8 de VIII, 267 pages, cartonné avec 114 figures dans le texte). Prix : dollars 2,50.

L'auteur n'a pas suivi les tendances *puristes* de von Staudt, de Reye et d'autres, tendances poussées à l'extrême, dit-il, par l'école italienne moderne de *géomètres logiciens*, ayant à leur tête Veronese et Enriques. Il n'a pas non plus adopté le point de vue de Fiedler, de Wiener et d'autres qui envisagent les méthodes de Poncelet. Steiner, Chasles et Cremona comme se rattachant très naturellement à l'étude de la géométrie descriptive, comme formant avec celle-ci un tout organique. Son but a été de composer un traité utile, où les applications trouvent une large place; à cet effet, il a mis en œuvre des méthodes analytiques et géométriques qui lui sont propres, ce qui lui a permis de faire entrer dans le cadre de son ouvrage quelques nouvelles matières et certaines parties de la géométrie analytique moderne.

Parmi les questions dépassant le programme des manuels ordinaires, nous citons un chapitre sur les faisceaux ponctuels ou tangentiels de coniques, la projectivité entre un faisceau de coniques et un autre faisceau de coniques ou de rayons, la transformation quadratique, les cubiques, et un chapitre sur les applications mécaniques de la géométrie projective et sur les tiges articulées.

Le livre de M. Emch est intéressant et instructif. Nous n'analyserons pas sa méthode particulière; l'ouvrage a les avantages et les défauts de presque tous les manuels anglais ou américains; il initie rapidement le lecteur aux récents progrès de la science sans se soucier d'une rigueur absolue ni se préoccuper trop des discussions complètes des questions et de leurs cas particuliers.

L'impression de l'ouvrage et les figures sont excessivement soignées.

(J. N.)

Annuaire pour l'an 1907, publié par le bureau des longitudes, avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. (In 18 de VI + 682 + 8 + 20 + 146 + 45 = 907 pp.). Prix : 1 fr. 50.

Edition pour 1907 de cet admirable Annuaire. Il contient cette fois outre les calendriers et les renseignements astronomiques ordinaires (plus de 360 pp.), des données sur la géographie, la météorologie, les monnaies, poids et mesures,

les tables de mortalité, d'intérêt et d'amortissement, puis trois notices scientifiques 1° *Diamètre de Vénus*, par Bouquet de la Grye (8 pp.). 2° *La XV^e conférence de l'association géodesique internationale*, par le même (20 pp.). 3° *Histoire des idées et des recherches sur le soleil. Révélation récente de l'athmosphère entière de l'astre*, par M. Deslandres (146 pp.).

×SUR LE QUADRANGLE ORTHOGONAL,

par N. Agronomof.

Soient : H l'orthocentre du triangle ABC ; H_1, H_2, H_3 les pieds des hauteurs ; M_1, M_2, M_3 les milieux des côtés BC, CA, AB ; N_1, N_2, N_3 les milieux des segments HA, HB, HC ; O le centre du cercle circonscrit à ABC.

Les quatre points A, B, C, H sont les sommets d'un *quadrangle orthogonal* : les côtés opposés BC et AH, CA et BH, AB et CH sont rectangulaires. Les quatre triangles ABC, HCB, CHA, BAH ont le même triangle orthique $H_1H_2H_3$ et le même cercle des neuf points dont le centre O_9 est au milieu de la distance HO.

Chacun des points A, B, C, H étant l'orthocentre du triangle qui a pour sommets les autres, le quadrangle ABCH jouit d'une espèce de symétrie qui permet souvent de multiplier en quelque sorte les propriétés de la figure ou de donner de ces propriétés des énoncés plus intéressants. Voici des exemples de ces faits :

1° Désignons par O_a, O_b, O_c les centres des cercles circonscrits aux triangles HCB, CHA, BAH ; ces points sont les symétriques de O par rapport aux côtés BC, CA, AB. De ce que $AH = 2OM_1 = OO_a$, ... on conclut que les droites AO_a, BO_b, CO_c se coupent au milieu de la droite HO. Par conséquent,

Etant donné un quadrangle orthogonal ABCH, *les cercles circonscrits aux quatre triangles* ABC, HCB, CHA, BAH *sont égaux; les centres* O, O_a, O_b, O_c *de ces quatre cercles sont les sommets d'un second quadrangle orthogonal symétrique du premier par rapport au centre du cercle des neuf points; les côtés du second quadrangle sont perpendiculaires aux milieux des côtés du premier.*

On sait que les rayons AO, BO, CO du cercle circonscrit au triangle ABC sont perpendiculaires aux côtés H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 du triangle orthique. Cette propriété étant appliquée aux triangles HCB, CHA,

BAH, on voit (ce qui pourrait être démontré sur la figure) que les droites HO_a, CO_a, BO_a sont également perpendiculaires aux droites N_2N_3, N_3N_1, N_1N_2, etc.

2° Chacun des points H, A, B, C est le centre d'un cercle tritangent au triangle $H_1H_2H_3$; on vient de voir que les rayons AO, BO, CO de trois de ces cercles, perpendiculaires à un côté du triangle $H_1H_2H_3$ concourent en un même point O, et que cette propriété s'étend aux triples de points CBH, CHA, BAH.

Nous allons reprendre ces propositions sous une autre forme.

Soient I, I_1 I_2, I_3 les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits au triangle ABC; ces points sont les sommets d'un quadrangle orthogonal dont ABC est le triangle orthique. Appelons D, E, F les points de contact du cercle I avec les côtés BC, CA, AB; D_1, E_1, F_1 ceux du cercle I_1, etc. Les rayons I_1D_1, I_2E_2, I_3F_3 concourent au centre X du cercle circonscrit au triangle $I_1I_2I_3$; X est le symétrique de I par rapport à O. Semblablement, ABC étant le triangle orthique de II_2I_3, les rayons ID, I_2E_2, I_3F_3 concourent en un point X_1, centre du cercle II_2I_3 et symétrique de I_1 par rapport à O. Et ainsi de suite.

On obtient ainsi un nouveau quadrangle orthogonal $XX_1X_2X_3$ symétrique de $II_1I_2I_3$ par rapport à O; ces deux quadrangles ont le même cercle des neuf points de centre O. Remarquons encore que les points I, I_1, I_2, I_3 sont les centres des cercles circonscrits aux triangles $X_1X_2X_3$, XX_2X_3, X_2XX_1, X_3X_1X.

3° Connaissant les points X_1, X_2, X_3, il est facile de construire le triangle ABC.

En effet, X est l'orthocentre du triangle $X_1X_2X_3$; de même que X, X_1, X_2, X_3 sont les centres des cercles circonscrits aux triangles $I_1I_2I_3$, II_2I_3, I_3II_1, I_2I_1I, les points I, I_1, I_2, I_3 sont les centres des cercles circonscrits aux triangles $X_1X_2X_3$, XX_2X_3, X_2X_1X. On trouve ensuite ABC comme triangle orthique du quadrangle $II_1I_2I_3$.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur les médianes d'un triangle.* Le théorème suivant est bien connu :

On peut construire un triangle XYZ *dont les côtés* YZ, ZX, XY *sont équipollents* (égaux et parallèles) *aux médianes* AA', BB', CC' *du*

triangle ABC. *L'aire* XYZ $= \frac{1}{4}$ ABC; *les médianes de* XYZ *sont parallèles aux côtés de* ABC *et en valent les* $\frac{3}{4}$.

Les démonstrations suivantes sont peut-être inédites.

1° Soient G le centre de gravité de ABC, et A'', B'', C'' les milieux des distances GA, GB, GC. L'hexagone A''B'C''A'B''C' (dont les diagonales sont les $\frac{2}{3}$ de AA', BB' CC') se compose de six triangles équivalents au triangle GA''B' dont les côtés ont les directions des médianes AA', CC', BB' et mesurent $\frac{1}{3}$ AA', $\frac{1}{3}$ CC', $\frac{1}{3}$ BB'. On en conclut l'existence du triangle XYZ; de plus, *aire* XYZ $= 9$GA'B' $= \frac{1}{2}$ A''BC''A'B''C'. Le triangle ABC se compose de douze triangles équivalents à GA'B'; donc XYZ $= \frac{9}{12}$ ABC $= \frac{3}{4}$ ABC.

La droite B'C', moitié de BC, est double de la médiane du triangle GB'A'' issue de B', et celle-ci est le $\frac{1}{3}$ de la médiane correspondante de XYZ; donc....

2° Prolongeons C'B' de B'A_1 = C'B'; les figures A'BB'A_1, CA'B'A_1 étant des parallèlogrammes, on voit facilement que A'A_1 et BB', A_1A et CC' sont des lignes équipollentes. Par suite, A_1AA' réalise le triangle XYZ. Il est facile de voir que A_1B', AB', A'B' passent aux milieux des côtés du triangle A_1AA', donc les médianes de A_1AA' sont parallèles aux côtés de ABC et en valent les $\frac{3}{4}$. De plus, *aire* A_1AA' $= 3$AB'A' $= \frac{3}{2}$ AA'C $= \frac{3}{4}$ ABC. (Barisien)

2. *Sur quelques divisions harmoniques.* La note *Sur les cercles tritangents* de *Mathesis*, 1906, p. 44, m'a suggéré quelques propositions qui sont peut-être nouvelles.

Soient A', B', C' les pieds des hauteurs du triangle ABC; L_a, L_b, L_c les pieds des bissectrices intérieures; A_1, B_1, C_1, les milieux des côtés; A'', B'', C'' les milieux des hauteurs; O et I les centres des cercles circonscrit et inscrit. Les bissectrices AI, BI, CI rencontrent la circonférence O en des points O_a, O_b, O_c qui sont les centres des cercles circonscrits aux triangles BIC, CIA, AIB et qui appartiennent aussi aux médiatrices A_1O, B_1O, C_1O.

Cela posé, le quaterne harmonique (AA'A''∞) est projeté à partir de A_1 par un faisceau harmonique A_1(AA'A''O_a); on en conclut que *les bissectrices intérieures* AL_a, BL_b, CL_c *sont partagées harmoniquement par la circonférence* ABC *et par les droites joignant les milieux des côtés aux milieux des hauteurs correspondantes.* On sait que ces dernières droites concourent au point de Lemoine.

Soient P_a, P_b, P_c les points de rencontre des rayons AO, BO, CO avec les côtés opposés, et O'_a, O'_b. O'_c ceux des mêmes rayons avec les droites A_1A'', B_1B'', C_1C''; le faisceau harmonique $A_1(AA'A''O_a)$ rencontre AO en quatre points harmoniques. Par conséqnent, *les droites* AP_a, BP_b, CP_c *sont divisées en parties harmoniques par le centre* O *et respectivement les droites* A_1A'', B_1B'', C_1C''.

Coupons encore le faisceau $A_1(AA'A''O_a)$ par les côtés AB, AC. Soient X_c, X_b les points où les côtés rencontrent A_1A', et Y_c, Y_b ceux où ils coupent A_1O; nous aurons les divisions harmoniques (ABX_cY_c), (ACX_bY_c). On conclut de là que les droites BC, X_cY_b, X_bY_c concourent en un même point, et que les droites BX_b, CX_c se coupent sur la parallèle menée par A à BC. (A. Terracini, Turin).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1568.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 112).

Soient A_1, B_1, C_1, *les points de rencontre des côtés du triangle* ABC *avec une transversale quelconque. On mène par un point quelconque* P *les droites* PA', PB', PC' *équipollentes aux droites* AA_1, BB_1, CC_1. *Démontrer que l'aire* A'B'C' *est double de l'aire* ABC. (H. Van Aubel)

Plus généralement, si A, B, C, *sont trois points quelconques pris sur les côtés du triangle* ABC, *on a :*

$$A'B'C' = 2ABC + A_1B_1C_1.$$

(J Van De Griend)

M. Malaise (Liége) démontre la proposition par la méthode vectorielle. Celle-ci n'étant pas connue de la généralité des jeunes lecteurs de *Mathesis*, nous établirons le cas considéré par M. Vande Griend en reproduisant avec quelques modifications la démonstration donnée par M. Schuh dans les *Wiskundige Opgaven*, 1906, p. 285.

Lorsque les points A_1, B_1, C_1 sont pris sur les côtés mêmes du triangle ABC, on a

$$\text{aire } PA'B' = BCB_1C_1 = ABC - AC_1B_1, \quad (1)$$

$$\text{aire } PB'C' = CAC_1A_1 = ABC - BA_1C_1, \quad (2)$$

$$\text{aire } PC'A' = ABA_1B_1 = ABC - CB_1A_1; \quad (3)$$

l'égalité (1), bien connue, se démontre en menant une droite BD équipollente à CC_1 et en observant que les trois triangles BB_1D, BCC_1, C_1CB_1 qui ont des bases $BD = CC_1$, sont tels que la hauteur du premier est égale à la somme des hauteurs des deux autres. Cela posé, si l'on ajoute les égalités (1), (2) et (3), membre à membre, il vient

$$\begin{aligned} A'B'C' &= 2ABC + (ABC - AC_1B_1 - BA_1C_1 - CB_1A_1) \\ &= 2ABC + A_1B_1C_1. \end{aligned} \qquad (4)$$

Pour démontrer le théorème dans toutes les positions des points A_1, B_1, C_1, nous entrons dans quelques explications sur les aires des polygones.

Si X, Y, Z sont les sommets d'un triangle situé dans le plan du triangle ABC, nous convenons de représenter par le symbole XYZ la mesure de l'aire du triangle XYZ, précédée du signe + ou —, suivant que les sens de circulation ABC et XYZ sont les mêmes ou non ; d'après cela, $XYZ = YZX = ZXY = -XZY$ .... On vérifie facilement l'égalité

$$XYZ = OYZ + OZX + OXY \qquad (4)$$

dans les différentes positions du point O.

Considérons maintenant un contour polygonal fermé ; par exemple, XYZUVX. L'aire XYZUVX est définie par l'égalité

$$\textit{aire}\ XYZUVX = OXY + OYZ + OZV + OUV + OVX. \qquad (5)$$

Lorsque le polygone est convexe et le point O situé à l'intérieur, cette nouvelle définition n'est pas nécessaire. Mais dans les autres hypothèses, il importe de montrer que le second membre de (5) a une valeur indépendante de la position de O. A cet effet, appliquons la formule (4) aux triangles XYZ. XZU, XUV ; nous aurons

$$XYZ = OXY + OYZ + OZX, \quad XZU = OXZ + OZU + OUX,$$
$$XUV = OXU + OUV + OVX.$$

En ajoutant les égalités membre à membre et observant que $OZX = -OXZ$, ..., on voit que le second membre de (5) a la même valeur en un point quelconque O que lorsque O coïncide avec X.

Lorsqu'on applique la définition précédente à un quadrilatère convexe XYZU en plaçant O en X ou Y, on obtient

$$\begin{aligned} \textit{aire}\ XYZUX &= XXY + XYZ + XZU + XUX = XYZ + XZU, \\ &= YXY + YYZ + YZU + YUX = YZU + YUX, \end{aligned}$$

de manière que l'aire considérée est la somme (arithmétique) des triangles XYZ, XZU qui ont pour côté commun la diagonale XZ.

Lorsque le quadrilatère XYZU a un angle rentrant en U, l'aire XYZU est la somme (arithmétique) des triangles YZU, YUX et la différence de deux triangles ayant pour côté commun la diagonale XZ.

Un quadrilatère convexe XYZU donne lieu à deux *quadrilatères étoilés* XZYUX, XYUZX ayant respectivement pour diagonales XY et UZ, XU et ZY. En raisonnant comme tantôt on trouve

$$\textit{aire}\ \mathrm{XZYUX} = \mathrm{XZY} + \mathrm{XYU} = \mathrm{YXZ} + \mathrm{YUX},$$
$$\textit{aire}\ \mathrm{XYUZX} = \mathrm{XYU} + \mathrm{XUZ} = \mathrm{YUZ} + \mathrm{YZX};$$

par suite, l'aire d'un quadrilatère étoilé est la différence arithmétique des aires des deux triangles qui ont pour côté commun une diagonale et dont deux autres côtés appartiennent au quadrilatère. L'aire XZYUX est aussi égale à celle du triangle EXY qui a pour côtés une diagonale XY et une droite XE équipollente à la seconde diagonale; car les trois triangles EXY, XZY. XYU ont un côté commun et la hauteur du premier est égale à la différence des hauteurs des deux autres.

De même l'aire d'un quadrilatère convexe est égale à celle d'un triangle dont deux côtés sont équipollents aux deux diagonales du quadrilatère.

Cela posé, on a, en grandeur et en signe,

$$\textit{aire}\ \mathrm{PA'B'} = \mathrm{BCB_1C_1} = \mathrm{ABC} + \mathrm{AB_1C_1},$$
$$\textit{aire}\ \mathrm{PB'C'} = \mathrm{CAC_1A_1} = \mathrm{BCA} + \mathrm{BC_1A_1},$$
$$\textit{aire}\ \mathrm{PC'A'} = \mathrm{ABA_1B_1} = \mathrm{CAB} + \mathrm{CA_1B_1},$$

d'où, par addition,

$$\mathrm{A'B'C'} = 3\mathrm{ABC} + (\mathrm{AB_1C_1} + \mathrm{BC_1A_1} + \mathrm{CA_1B_1}).$$

La parenthèse peut se transformer en

$$(\mathrm{OAB_1} + \mathrm{OB_1C_1} + \mathrm{OC_1A}) + (\mathrm{OBC_1} + \mathrm{OC_1A_1} + \mathrm{OA_1B}) + (\mathrm{OCA_1} + \mathrm{OA_1B_1} + \mathrm{OB_1C});$$

or,

$$\mathrm{OB_1C_1} + \mathrm{OC_1A_1} + \mathrm{OA_1B_1} = \mathrm{A_1B_1C_1}, \quad \mathrm{OAB_1} + \mathrm{OB_1C} = \mathrm{OAC} = -\mathrm{OCA},$$
$$\mathrm{OBC_1} + \mathrm{OC_1A} = -\mathrm{OAB}, \quad \mathrm{OCA_1} + \mathrm{OA_1B} = -\mathrm{OBC}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{A'B'C'} = 3\mathrm{ABC} + (\mathrm{A_1B_1C_1} - \mathrm{ABC}) = 2\mathrm{ABC} + \mathrm{A_1B_1C_1}.$$

(J. N.)

×Question 1573.

(Voir *Mathesis*, (3); VI, p. 144).

Dans tout triangle ABC, *on a*

$$\frac{a^2r_a + b^2r_b + c^2r_c}{(a+b+c)^2} = R - r.$$

Chercher les formules analogues pour $R + r_a$, etc. (VERKAART)

Solution par M. BARISIEN. On a successivement

$$R - r = \frac{abc}{4S} - \frac{S}{p} = \frac{abcp - 4S^2}{4pS}$$

$$= \frac{2abc\Sigma a - 2\Sigma a^2b^2 + \Sigma a^4}{8S.\Sigma a} = \frac{\Sigma a^2[a^2 - (b-c)^2]}{8S.\Sigma a}$$

$$= \frac{\Sigma a^2(p-b)(p-c)}{2S.\Sigma a} = \Sigma \frac{a^2S}{p-a} : \frac{2S^2.\Sigma a}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \Sigma a^2r_a : \frac{2p(p-a)(p-b)(p-c).\Sigma a}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\Sigma a^2r_a}{\Sigma a^2}.$$

On trouve de la même manière

$$R + r_a = \frac{-a^2r + b^2r_a + c^2r_b}{(b+c-a)^2}, \ldots$$

Nous signalons encore les formules

$$R + r_a = \frac{r_a}{4(p-a)}\left(-\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{p-c} + \frac{c^2}{p-b}\right)$$

$$= \frac{1}{4(p-a)}\left(-\frac{a^2r_a}{p} + \frac{b^2r_c + c^2r_b}{p-a}\right).$$

Solution par M. DELAHAYE (Roye). Cette question est indiquée dans *Mathesis*, 1892, p. 82, formule 21 (E. Lemoine).

On a

$$ar_a = p(r_a - r), \quad br_b = p(r_b - r), \quad cr_c = p(r_c - r).$$

Faisons la somme de ces égalités multipliées respectivement par a, b, c ; il vient

$$\Sigma a^2r_a = p[\Sigma ar_a - 2pr].$$

Or, $$\Sigma a r_a = p(\Sigma r_a - 3r) = p(4R + r - 3r).$$

Donc, $$\Sigma a^2 r_a = p[p(4R - 2r) - 2pr] = 4p^2(R - r).$$

La formule proposée est donc démontrée. Pour trouver $R + r_a$, nous partons des égalités

$$ar = (p - a)(r_a - r), \quad br_a = (p - a)(r_a + r_a), \quad cr_b = (p - a)(r_b + r_a),$$

pour en déduire

$$b^2 r_a + c^2 r_b - a^2 r = (p - a)[br_a + cr_b + ar + (b + c - a) r_a].$$

Observons ensuite que

$$ar + br_a + cr_b = (p - a)(r_a - r + r_a + r_a + r_b + r_a) = 2(p - a)(2R + r_a);$$

d'où finalement

$$b^2 r_a + c^2 r_b - a^2 r = 4(R + r_a)(p - a)^2.$$

Solution par M. Verkaart. De $S = pr = (p - a) r_a$, on déduit successivement

$$\frac{a}{p} = \frac{r_a - r}{r_a}, \quad \frac{a^2}{(a + b + c)^2} = \frac{(r_a - r)^2}{4 r_a^2},$$

$$\Sigma \frac{a^2 r_a}{(a + b + c)^2} = \frac{1}{4}\left(\Sigma r_a - 6r + r^2 \Sigma \frac{1}{r_a}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4R + r - 6r + \frac{r^2}{r}\right) = R - r.$$

Solution par M. Terracini (Turin). On a

$$R - r = \frac{r_a + r_b + r_a - 5r}{4} = \frac{\Sigma (r_a - r)}{4} - \frac{r}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\Sigma\left(r_a - \frac{p - a}{p} r_a\right) - \frac{r}{2} = \frac{1}{4p}\Sigma a r_a - \frac{1}{2} r \frac{a + b + c}{2p}$$

$$= \frac{1}{4p}\Sigma a(r_a - r) = \frac{1}{4p}\Sigma a\left(r_a - \frac{p - a}{p} r_a\right) = \frac{1}{4p}\Sigma a^2 r_a.$$

Par transformation continue en A, on trouve

$$R + r_a = \frac{b^2 r_a + c^2 r_b - a^2 r}{4(p - a)^2}.$$

Autres solutions par MM. Plakhovo, Rose, Abramescu et Van Dinter.

Question 1574.

(Voir *Mathesis* (3), VI, p. 144).

La tangente et la normale en un point M *d'une courbe* (C) *rencontrent l'axe* Ox *aux points* T, N. *Chercher les courbes* (C) *telles que le rayon vecteur* OM *soit égal à sa distance au point* T *ou au point* N. *Trouver également les trajectoires orthogonales de ces courbes.* (Rose)

Solution par M. Van Dinter. 1° L'abscisse de T est $x - y\frac{dx}{dy}$, (x, y) étant les coordonnées du point M.

La longueur du rayon vecteur est $\sqrt{x^2+y^2}$, et sa distance au point T est $y\left(y\frac{dx}{dy} - x\right) : \sqrt{x^2+y^2}$. Donc l'équation différentielle du problème sera

$$y\left(y\frac{dx}{dy} - x\right) = x^2 + y^2. \tag{1}$$

Faisons $x = yz$, alors l'équation se réduit à

$$\frac{dz}{z^2+1} = \frac{dy}{y}.$$

Intégrant, on trouve

$$\log(Cy) = \operatorname{arc\,tg} z, \quad \text{ou} \quad e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}} = Cy. \tag{2}$$

2° Le point N a pour abscisse $x + y\frac{dy}{dx}$; sa distance à OM sera par conséquent $-y\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) : \sqrt{x^2+y^2}$, et l'équation différentielle du problème est

$$-y\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = x^2 - y^2. \tag{3}$$

Faisant $y = zx$, on trouve

$$-\frac{dx}{x} \quad \frac{z^2dz}{1 - z + z^2 - z^3} = \frac{dz}{2(1-z)} + \frac{1}{2}\frac{zdz}{1+z^2} - \frac{dz}{2(1-z^2)}.$$

Intégrant, il vient

$$\log[C(x - y)^{\frac{1}{2}}(x^2 - y^2)] = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

ou

$$e^{2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}} = C(x - y)^{\frac{1}{2}}(x^2 - y^2). \tag{4}$$

En coordonnées polaires, l'équation prend la forme plus simple

$$e^{2\theta} = Cr^4(1 + \sin 2\theta).$$

Pour obtenir les trajectoires orthogonales du premier système, il suffit de remplacer dans l'équation (1) $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{dx}{dy}$; on trouve alors l'équation (3). Par conséquent, les courbes des deux systèmes se coupent orthogonalement.

Ont résolu la même question MM. Abramescu, Ferreira et Malaise.

×Question 1575.

(Voir *Mathesis*, (3) VI, p. 144).

On considère deux triangles ABC, DEF *inscrits à la même circonférence. Démontrer* 1° *que les droites de Simson des points* D, E, F *par rapport au triangle* ABC *forment un triangle* D'E'F' *semblable à* DEF *et que les droites de Simson des points* A, B, C *par rapport au trianyle* DEF *forment un triangle* A'B'C' *semblable à* ABC; 2° *que les triangles* D'E'F', A'B'C' *sont inscriptibles à une même circonférence dont le centre est au milieu de la distance des orthocentres des triangles* ABC, DEF.

(S. Kantor)

Solution par M. Absolonne. La droite de Simson du point D par rapport au triangle ABC est perpendiculaire à l'isogonale AD_i de AD par rapport à l'angle A et DD_i est parallèle à BC; de même, la droite de Simson de A par rapport au triangle DEF est perpendiculaire à l'isogonale DA_i de DA relativement à l'angle D. Les angles A_iDD_i et A_iAD_i étant égaux, on en conclut que la droite de Simson E'F' de D fait avec EF le même angle que la droite de Simson B'C' de A fait avec BC. Les côtés du triangle D'E'F' étant perpendiculaires aux isogonales de AD, AE, AF, ce triangle est directement semblable à DEF; A'B'C' sera aussi directement semblable à ABC.

2° H étant l'orthocentre de ABC, les côtés du triangle D'E'F' passent par les milieux *d*, *e*, *f* de HD, HE, HF, et le triangle *def* étant homothétique à DEF, son orthocentre O est au milieu de la distance HH' des orthocentres de ABC, DEF. Ce point O est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle D'E'F'. Soient R le rayon du cercle ABC,

α l'angle des côtés homologues de D'E'F' et DEF qui est aussi celui des côtés de A'B'C' et ABC; nous aurons dans le triangle OF'e, par exemple :

$$\frac{OF'}{Oe} = \frac{\cos\alpha}{\cos e}.$$

Or, si M est le milieu de df,

$$Oe = 2OM = R\cos e,$$

d'où

$$OF' = R\cos\alpha.$$

Le cercle circonscrit au triangle A'B'C' aura évidemment le même centre O et, d'après l'égalité précédente, le même rayon.

Question 1577.

(Voir *Mathesis*, (3). VI. p. 168).

Soient A, B, C, D *les projections d'un point* P *sur quatre droites données* a, b, c, d. *Démontrer que le lieu d'un point* P *tel que les cinq points* A, B, C, D, P *soient sur une même hyperbole équilatère est la circonférence qui passe par les centres des circonférences circonscrites aux triangles* bcd, cda, dab, abc. (S. Kantor)

Solution par M. Absolonne. Prenons deux axes rectangulaires quelconques et soient x, y les coordonnées du point P; les droites a, b, c, d étant représentées par les équations :

$$\alpha = x\cos a + y\sin a - p = 0, \quad \gamma \equiv x\cos c + y\sin c - r = 0,$$
$$\beta \equiv x\cos b + y\sin b - q = 0, \quad \delta \equiv x\cos d + y\sin d - s = 0,$$

les coordonnées de A seront

$$x' = x - \alpha\cos a, \quad y' = y - \alpha\sin a,$$

celles de B :

$$x'' = x - \beta\cos b, \quad y'' = y - \beta\sin b, \quad \text{etc.}$$

Exprimons que les cinq points appartiennent à l'hyperbole équilatère dont l'équation est

$$x^2 - y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2Dy + F = 0;$$

nous obtiendrons, après avoir transporté l'origine en P, la condition

$$\begin{vmatrix} \alpha\sin 2a & \alpha\cos 2a & \cos a & \sin a \\ \beta\sin 2b & \beta\cos 2b & \cos b & \sin b \\ \gamma\sin 2c & \gamma\cos 2c & \cos c & \sin c \\ \delta\sin 2d & \delta\cos 2d & \cos d & \sin d \end{vmatrix} = 0$$

qui peut être regardée comme l'équation du lieu de P. Le déterminant développé donne :

$$\alpha\beta \sin(d-c)\sin 2(a-b) + \alpha\gamma \sin(d-b)\sin 2(c-a)$$
$$+ \alpha\delta \sin(c-b)\sin 2(a-d) + \beta\gamma \sin(a-d)\sin 2(c-b)$$
$$+ \beta\delta \sin(c-a)\sin 2(d-b) + \gamma\delta \sin(a-b)\sin 2(d-c) = 0.$$

Les équations des cercles circonscrits aux triangles *bcd*, *cda*, *dab*, *abc* sont, en tenant compte des signes de α, β, γ, δ :

$$C_1 \equiv \beta\gamma \sin(b-c) + \gamma\delta \sin(c-d) + \delta\beta \sin(d-b) = 0,$$
$$C_2 \equiv \gamma\delta \sin(c-d) + \delta\alpha \sin(d-a) + \alpha\gamma \sin(a-c) = 0,$$
$$C_3 \equiv \delta\alpha \sin(d-a) + \alpha\beta \sin(a-b) + \beta\delta \sin(b-d) = 0,$$
$$C_4 \equiv \alpha\beta \sin(a-b) + \beta\gamma \sin(b-c) + \gamma\alpha \sin(c-a) = 0.$$

Or, l'équation du lieu peut s'identifier à

$$\lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 = 0,$$

en ayant égard aux identités telles que

$$\cos(c-d)\sin(b-a) + \cos(c-b)\sin(a-d) + \cos(c-a)\sin(d-b) = 0.$$

Le lieu de P est donc un cercle qui passe par le point commun aux cercles C_1, C_2, C_3 et la forme de l'équation ainsi que celle des équations équivalentes $\lambda' C_1 + \mu' C_2 + \nu' C_4 = 0$, etc. montre que les quatre cercles passent par un même point.

On vérifierait facilement que les centres des cercles circonscrits appartiennent à la courbe.

On sait d'ailleurs que le point commun aux cercles circonscrits est le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère *abcd* et que les projections de ce point sur les quatre côtés sont sur la tangente au sommet de la courbe ; l'hyperbole équilatère se réduit donc ici à deux droites rectangulaires. Quant aux centres des cercles circonscrits, ils sont les orthocentres de leurs triangles podaires et par suite appartiennent à l'hyperbole équilatère qui passe par leurs projections sur *a*, *b*, *c*, *d*.

Généralisation par M. A. Gob. *Le lieu d'un point* P *tel que la conique* ABCDP *soit semblable à une conique donnée est un limaçon de Pascal.*

Lemme. *Soient* A', B', C' *les projections d'un point* P *sur les côtés d'un triangle fixe* ABC. *Lorsque le point* P *décrit une droite g, on peut circonscrire aux quadrangles* PA'B'C' *des coniques homothétiques à une certaine conique fixe. Les asymptotes de ces coniques sont parallèles aux*

droites de Simson des points de rencontre M *et* N *de g, avec le cercle* ABC.

En effet, soient A″, B″, C″ les points de rencontre des droites AP, BP, CP avec le cercle ABC; les triangles A″B″C″ et A′B′C′ sont directement semblables, et si Q désigne le point du triangle A″B″C″ homologue au point P de A′B′C′, les points P et Q sont inverses par rapport au triangle A″B″C″. Soit U la conique inverse de la droite *g* par rapport au triangle A″B″C″; cette courbe passe par A″, B″, C″, Q et son homologue U′ dans le triangle A′B′C′ passe par A′, B′, C′, P. Les asymptotes de U sont parallèles aux isogonales des droites A″M et A″N par rapport à l'angle B″A″C″. Les angles PA″M, PA″N sont donc égaux aux angles que forment les asymptotes de U avec A″Q ou encore aux angles que forment les asymptotes de U′ avec la droite PA′ perpendiculaire à BC. Or, les angles PA″M, PA″N restent constants lorsque P se déplace sur MN′, on conclut de là que, dans ce cas, les asymptotes de U′ ont des directions constantes; ces directions sont évidemment celles des droites de Simson des points M et N, car, lorsque P coïncide avec M ou avec N, la conique U′ dégénère en deux droites dont l'une coïncide avec la droite de Simson de M ou de N.

Lorsque *g* passe par le centre du cercle ABC, les droites de Simson des points M et N sont rectangulaires, donc *l'hyperbole équilatère qui passe par un point* P *et par ses projections sur les côtés d'un triangle* ABC *a ses asymptotes parallèles aux droites de Simson des extrémités du diamètre du cercle* ABC *qui passe par ce point.*

Démonstration de la proposion généralisée. - Soient $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ les droites désignées par *a*, *b*, *c*, *d* dans la question proposée.

Représentons par ε et λ les points d'intersection des couples de droites *b* et *d*, *a* et *c*, et cherchons le lieu d'un point P tel que le pentagone PABCD formé par P et ses projections sur *a*, *b*, *c*, *d* soit inscrit à une conique semblable à une conique donnée V. Soient M et N deux points de la circonférence $\varepsilon\alpha\beta$ tels que leurs droites de Simson *f* et *h* par rapport au triangle $\varepsilon\alpha\beta$ fassent entre elles un angle égal à l'angle φ des asymptotes de la conique donnée V. Lorsque M se déplace sur le cercle $\varepsilon\alpha\beta$, la droite MN enveloppe une circonférence concentrique à ce cercle.

Les arcs $\alpha\beta$ et $\delta\gamma$ des cercles $\varepsilon\alpha\beta$, $\varepsilon\delta\gamma$ correspondent à l'angle inscrit commun ε; ce sont donc des arcs semblables de ces deux cercles. Soient M′ et N′ les points de l'arc $\delta\gamma$ qui sont homologues aux points M et N

de l'arc $\alpha\beta$ et soient f', h' leurs droites de Simson par rapport au triangle $\varepsilon\delta\gamma$. Les droites f et f' sont parallèles, car ces droites forment avec $\varepsilon\alpha\delta$ des angles qui sont égaux aux compléments des angles égaux $M\alpha\beta$, $M'\delta\gamma$; il en est de même des droites h et h'. On conclut de là que le point d'intersection P des droites MN et M'N' est un point du lieu cherché; en effet, en vertu du lemme, le point P se trouvant à la fois sur MN et M'N', on peut faire passer par P, A, B, D et par P, C, B, D deux coniques ayant leur asymptotes parallèles à f et h; ces coniques coïncident, car elles ont en commun les points P, B, D et les points à l'infini sur f et h.

Si l'on fait varier MN et M'N', leur point d'intersection engendrera le lieu; or, ces droites se correspondent dans deux figures semblables construites sur $\alpha\beta$ et $\delta\gamma$, donc elles font entre elles un angle égal à λ. De plus ces droites enveloppent deux circonférences fixes. Donc, en vertu d'une proposition connue (*Mathesis*, Question 3), le point P décrit un limaçon de Pascal.

Lorsque V est une hyperbole équilatère, les droites MN et M'N' passent par les centres O et O' des cercles $\varepsilon\alpha\beta$, $\varepsilon\delta\gamma$; donc P décrit alors un cercle passant par O et O'; par analogie, ce cercle passe aussi par les centres des cercles $\lambda\beta\gamma$, $\lambda\alpha\delta$.

Question 1580.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 168).

La tangente et la normale en un point M *d'une courbe plane coupent les axes en* T, T', N, N'. *Déterminer la courbe par la condition que la distance du point* T *ou du point* N' *au rayon* OM *soit égale à* OM. (Rose)

Solution par M. Fr. Dupont. Appelons φ l'angle MOx, Q et S les pieds des perpendiculaires abaissées de N' et de T sur OM.

On a $ST = OT \sin\varphi$ et, dans le triangle OMT, $OT : \sin V = OM : \sin(\varphi + V)$, V étant l'angle OMT; donc si r désigne le rayon vecteur OM, on a $r \sin\varphi \sin V = r \sin(\varphi + V)$.

En observant que $\operatorname{tg} V = r : r'$, on obtient l'équation différentielle de la courbe

$$d\varphi = -\frac{dr}{r} + \operatorname{cotg}\varphi d\varphi;$$

d'où en intégrant

$$lr = \varphi - l\sin\varphi + lC \quad \text{ou} \quad r = \frac{Ce^{\varphi}}{\sin\varphi}.$$

Cherchons maintenant la courbe définie par l'égalité N'Q = OM. Nous avons les relations :

$$N'Q = ON'\cos\varphi, \quad \frac{ON'}{\cos V} = \frac{r}{\sin(\varphi + V)};$$

d'où successivement

$$\cos\varphi\cos V = \sin(\varphi + V),$$

$$1 = \operatorname{tg}\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}, \quad \frac{d\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi} = \frac{dr}{r}. \tag{1}$$

En remplaçant 1 par $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, on trouve

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi d\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)d\varphi + \frac{1}{2}d\varphi.$$

Si on intègre, on obtient l'équation

$$lr = -\frac{1}{2}l\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\varphi + lC,$$

ou

$$r^2 = C\frac{e^{\varphi}}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

MM. Lez et Abramescu cherchant d'abord les équations différentielles des deux courbes en coordonnées rectangulaires, trouvent

$$y^2dx \pm (x^2 + y^2 \mp xy)\,dy = 0, \quad x^2dx \pm (xy \mp x^2 \mp y^2)\,dy.$$

M. Lez intègre en posant $y = xs$. M. Abramescu passe aux coordonnées polaires; pour intégrer l'équation (1), il écrit

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}d\varphi = \frac{\frac{1}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\cos\varphi - \sin\varphi}d\varphi.$$

$$= \frac{1}{2}d\varphi - \frac{1}{2}\frac{-\sin\varphi - \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}d\varphi,$$

ce qui donne immédiatement

$$lr = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} l(\cos\varphi - \sin\varphi) + lC, \quad \text{ou} \quad r = \frac{Ce^{\varphi}}{\sqrt{\cos\varphi - \sin\varphi}}.$$

Les questions 1574 et 1580 ne diffèrent pas essentiellement.

Question 1581.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 200).

Soit M *un des points d'une parabole qui se projette sur l'axe au point de rebroussement de la développée de la parabole.*

Par ce point, on ne peut mener qu'une tangente réelle à la développée. Démontrer que cette tangente est normale à la développée en son second point de rencontre avec la courbe. (E. N. Barisien)

Solution par MM. Abramescu et Rose. La développée a l'équation

$$f(x, y) \equiv 8(p - x)^3 + 27py^2 = 0. \tag{1}$$

La tangente menée de $M(p, p\sqrt{2})$ à cette courbe étant normale en M à la parabole $y^2 - 2px = 0$, a pour équation

$$y - p\sqrt{2} = -\sqrt{2}(x - p). \tag{2}$$

En éliminant x entre (1) et (2) on trouve l'équation

$$4y^3 + 15p\sqrt{2}y^2 + 24p^2y - 8p^3\sqrt{2} = 0, \tag{3}$$

qui a la racine double $y = -2p\sqrt{2}$ et la racine simple $y = \frac{1}{4}p\sqrt{2}$; la première racine correspond au point de contact de la droite (2) avec la développée, la racine simple au point de rencontre P.

Les coordonnées de ce point P étant $x = \frac{7}{4}p$, $y = \frac{1}{4}p\sqrt{2}$, la normale à la courbe (1) au point P a pour cœfficient angulaire

$$\frac{f'_y}{f'_x} = \frac{27.2p.y}{-8.3(p-x)^2} = -\sqrt{2};$$

elle coïncide avec MP comme ayant un point commun et la même direction.

Solution par M. H Lez. Soient deux normales menées par les points $M(\alpha, \beta)$, $M'(\alpha', \beta')$ de la parabole

$$y^2 = 2px;$$

leurs équations seront

$$p(y - \beta) = -\beta\left(x - \frac{2p}{\beta^2}\right), \tag{1}$$

$$p(y - \beta') = -\beta'\left(x - \frac{2p}{\beta'^2}\right). \tag{2}$$

Pour que ces normales soient rectangulaires, il faut que $\beta\beta' = -p^2$, d'où $\beta' = -p^2 : \beta$. Les équations (1) et (2) deviennent maintenant

$$\beta^3 + 2p(p-x)\beta - 2p^2y = 0, \tag{3}$$

$$2y\beta^3 + 2p(p-x)\beta^2 + p^4 = 0. \tag{4}$$

Eliminant β entre ces deux équations, on aura le lieu des points d'où on peut mener deux normales rectangulaires à la parabole proposée; on trouve ainsi la parabole

$$4y^2 - 2px + 3d^2 = 0. \tag{5}$$

Cette parabole est tangente à la développée

$$27py^2 - 8(x-p)^3 = 0 \tag{6}$$

en deux points seulement, symétriques par rapport à l'axe des paraboles. En effet, portant dans (6) la valeur de y^2 tirée de (5), on trouve l'équation

$$32x^3 - 96px^2 + 42p^2x + 49p^3 = 0,$$

ou

$$(2x+p)(4x-7p)^2 = 0;$$

les coordonnées des points de contact N, N' sont donc

$$x = \frac{7p}{4}, \quad y = \pm\frac{p}{2\sqrt{2}}.$$

L'équation de la tangente à la parabole (5) au point (x', y') est

$$4y'y - p(x'+x) + 3p^2 = 0;$$

pour $x' = \frac{7p}{4}$, $y' = \frac{p}{2\sqrt{2}}$, par exemple, elle est $4\sqrt{2}y - 4x + 5p = 0$

et la normale au même point est représentée par

$$y + \sqrt{2}.x - 2p\sqrt{2} = 0.$$

Cette normale est aussi celle du point M $(p, p\sqrt{2})$ de la parabole proposée, qui se projette au point de rebroussement de sa développée; de plus, elle passe par le point de rencontre $(4p, -2p\sqrt{2})$ de cette parabole et de sa développée; donc, etc.

Cette question a été également résolue par MM. Dupont et Verheugen.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1816. Convertir les expressions

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}}, \qquad \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

en des fractions à dénominateur rationel.

1817. Résoudre l'équation

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+x^2}=a+b.$$

1818. Convertir l'expression

$$\frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$$

en une fraction à dénominateur rationnel.

1819. Si x, y, z sont en progression arithmétique, il en est de même de

$$x^2+xy+y^2, \quad x^2+xz+z^2, \quad y^2+yz+z^2.$$

1820. Résoude l'équation

$$\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2.$$

1821. Résoudre l'équation

$$(2x-1)^2(x+1)=4x^3. \qquad \text{(E. N. Barisien)}$$

Seule racine $x=\frac{1}{3}$.

1822. Résoudre l'équation

$$32(x-a)^3+27a(2x-a)^2=0. \quad \text{(E. N. Barisien)}$$

1823. Dans un triangle ABC rectangle en A, on mène la hauteur $AA'=h$ et de A' on mène les perpendiculaires $A'C'=\beta$ sur AB et $A'B'=\gamma$ sur AC. Démontrer que $h^3=a\beta\gamma$ (Théorème connu qu'un correspondant signale sous une autre forme).

1824. Les trois droites

$$y=(2+\sqrt{3})x+p, \quad y=(2-\sqrt{3})x+p, \quad x+y=q,$$

forment un triangle équilatéral. (E. N. Barisien)

1595. Soient S l'aire du triangle ABC, S_1 l'aire du triangle formé par les deux bissectrices issues de A et le côté BC, ∂ la projection de la médiane AA′ sur BC, on a la relation

$$\frac{S_1}{S} = \frac{bc}{a\partial}.$$

(E. N. Barisien)

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1601.** Soient AA′, BB′, CC′ les bissectrices intérieures d'un triangle ABC. Si par A et A′ on mène des parallèles aux bissectrices BB′ et CC′, on forme un parallèlogramme AA″A′A‴ dont l'aire S_1 est, en fonction des trois côtés et de l'aire S du triangle ABC,

$$S_1 = \frac{2bc(a+b+c)S}{a(b+c)^2}.$$

(E. N. Barisien)

1602. Chercher le conoïde droit dont les asymptotiques se projettent sur un plan normal à l'axe suivant des lemniscates (J. Rose)

×**1603.** Une transversale rencontre les côtés BA, BC, DA, DC d'un carré ABCD ou leurs prolongements aux points P, Q, R, S. Soient r_a, r_b, r_c, r_d les rayons des cercles inscrits aux triangles ARP, BPQ, CQS, DRS. Trois de ces rayons étant donnés, trouver le quatrième rayon et construire le carré ABCD avec la transversale PQ. (D. Biddle)

1604. D'un point P on mène à une parabole les trois normales PA, PB, PC; les tangentes en A, B, C forment le triangle A′B′C′. Démontrer que le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle est égal à la distance de P au foyer F de la parabole. (R. F. Scott)

1605. Un angle droit OAM tourne d'un mouvement uniforme autour de son côté OA supposé horizontal tandis que ce côté est animé d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe vertical OZ. Trouver les équations de la courbe engendrée par un point déterminé M du second côté du triangle mobile, celles de la tangente et du plan osculateur.

La courbe considérée est la trajectoire du centre d'une boule lumineuse de l'appareil Tudor qui fonctionne depuis quelque temps dans quelques vitrines.

FORMULE RELATIVE A CERTAINS VOLUMES DANS LES QUADRIQUES A CENTRE;

par M. C. E. Wasteels.

1. Lemme. Soit une conique à centre rapportée à ses axes Ox, Oy et proposons-nous de déterminer *le moment statique d'un secteur* OM_0M_1, limité à l'arc M_0M_1 de cette conique, *par rapport à la droite* OM_0.

Si l'équation de la courbe est

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}=1,$$

et qu'on désigne par θ l'angle xOM_0, par x_0, y_0 les coordonnées de M_0 et par x_1, y_1 celles de M_1, on trouve facilement que le moment cherché

$$\mu=\tfrac{1}{3}[\beta(x_0-x_1)\cos\theta+\alpha(y_0-y_1)\sin\theta]. \qquad (1)$$

Nous allons transformer cette expression de façon à ne la faire dépendre que des éléments faisant directement partie du secteur; à cet effet, menons le demi-diamètre ON passant par le milieu I de la corde M_0M_1 et introduisons le rapport

$$n=\frac{ON}{OI}.$$

En exprimant que le point N appartient à la conique, on trouve

$$\frac{n^2}{4}\left[\frac{(x_0+x_1)^2}{\alpha}+\frac{(y_0+y_1)^2}{\beta}\right]=1. \qquad (2)$$

D'autre part, des relations qui expriment que M_0 et M_1 appartiennent à la courbe, on déduit

$$\frac{(x_0+x_1)(x_0-x_1)}{\alpha}+\frac{(y_0+y_1)(y_0-y_1)}{\beta}=0.$$

Si nous introduisons dans (2) successivement les valeurs de $\frac{x_0+x_1}{\alpha}$ et de $\frac{y_0+y_1}{\beta}$ tirées de la dernière égalité, il vient

$$1=\frac{n^2}{2}\frac{(y_0+y_1)}{\beta(x_0-x_1)}(x_0y_1-x_1y_0)=\frac{n^2}{2}\frac{(x_0+x_1)}{\alpha(y_0-y_1)}(x_1y_0-x_0y_1),$$

ou, en désignant par u l'aire du triangle OM_0M_1,

$$1 = n^2 u \frac{y_0 + y_1}{\beta(x_0 - x_1)} = - n^2 u \frac{x_0 + x_1}{\alpha(y_0 - y_1)}.$$

On en tire

$$\beta(x_0 - x_1) = n^2 u(y_0 + y_1), \quad \alpha(y_0 - y_1) = - n^2 u(x_0 + x_1).$$

Par suite, la formule (1) devient

$$\mu = \frac{n^2 u}{3}[\cos\theta(y_0 + y_1) - \sin\theta(x_0 + x_1)],$$

ou, en représentant par h la hauteur M_1P du triangle OM_0M_1,

$$\mu = \frac{n^2 u h}{3}. \tag{3}$$

C'est sous cette forme que nous appliquerons la formule dans la suite de cette note.

Toutefois, avant d'aller plus loin, nous allons encore en donner deux formes simples; en désignant par u' l'aire du quadrilatère (rectiligne) OM_0NM_1, par h' la distance de N à OM_0 et par r_0 le demi-diamètre OM_0, on peut écrire

$$\mu = \frac{2u'^2}{3r_0}, \tag{4}$$

et

$$\mu = \frac{2}{3} u'h'. \tag{5}$$

2. Considérons maintenant une quadrique à centre et une ligne A_0AA_1 tracée sur cette surface; il s'agit de déterminer le volume V du secteur limité par la quadrique, la surface conique projetant du centre O la ligne donnée, et deux plans A_0OM_0 et A_1OM_0.

A cet effet, nous partageons l'arc A_0A_1 en parties infiniment petites AA' et nous menons les plans OM_0A, OM_0A' déterminant dans le secteur le volume infiniment petit ΔV; on aura

$$V = \lim \Sigma \Delta V.$$

Or, si nous imaginons le cylindre ayant pour section droite le secteur

plan OM_0A et qu'on désigne par v le volume de ce cylindre compris entre les deux plans OM_0A et OM_0A', on démontre sans peine que

$$V = \lim Sv.$$

Calculons v; μ désignant le moment statique du secteur OM_0A par rapport à OM_0 et ω l'angle des deux plans OM_0A et OM_0A', on aura

$$v = \mu \operatorname{tang} \omega = \frac{n^2 u}{3} h \operatorname{tang} \omega = \frac{n^2 u}{3} AB,$$

B étant l'intersection de la génératrice du cylindre passant par A avec le plan OM_0A', et les quantités u et h étant définies comme plus haut.

Utilisons les coordonnées géométriques : désignons les vecteurs $\overline{OM_0}$, $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ respectivement par $\bar{\varepsilon}$, $\bar{e}$, $\bar{e}' = \bar{e} + \Delta\bar{e}$; nous aurons

$$u.AB = \tfrac{1}{2}\,\overline{AB}.\mathscr{M}\bar{\varepsilon}\bar{e};$$

$$v = \frac{n^2}{6}\,\overline{AB}.\mathscr{M}\bar{\varepsilon}\bar{e}.$$

Par suite,

$$V = \lim S \frac{n^2}{6}\,\overline{AB}.\mathscr{M}\bar{\varepsilon}\bar{e} = \lim S \frac{n^2}{6}\,\Delta\bar{e}.\mathscr{M}\bar{\varepsilon}\bar{e}.$$

Calculons n en recourant à l'équation de la quadrique; cette équation peut s'écrire

$$\bar{e}\varphi\bar{e} = 1,$$

φ étant le symbole d'une fonction linéaire autoconjuguée.

Pour déterminer n, exprimons que le point qui a pour coordonnée géométrique $n\,\dfrac{(\bar{\varepsilon}+\bar{e})}{2}$ appartient à la quadrique; on aura

$$\frac{n^2}{4}(\bar{\varepsilon}+\bar{e})\varphi(\bar{\varepsilon}+\bar{e}) = 1.$$

Or, $$(\bar{\varepsilon}+\bar{e})\varphi(\bar{\varepsilon}+\bar{e}) = \bar{\varepsilon}\varphi\bar{\varepsilon} + \bar{e}\varphi\bar{e} + 2\bar{e}\varphi\bar{\varepsilon} = 2 + 2\bar{e}\varphi\varepsilon.$$

On trouve donc

$$\frac{n^2}{2}(1 + \bar{e}\varphi\bar{\varepsilon}) = 1;$$

d'où

$$\frac{n^2}{2} = \frac{1}{1 + \bar{e}\varphi\bar{\varepsilon}}.$$

La formule devient ainsi

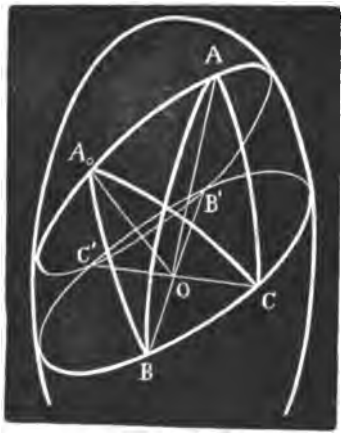
$$V = \frac{1}{3} \lim S \frac{\Delta \bar{e} \mathcal{M} \bar{\varepsilon} \bar{e}}{1 + \bar{e} \varphi \bar{\varepsilon}}. \tag{6}$$

En supposant la coordonnée $\bar{e}$ d'un point A qui décrit la ligne A_0A_1 exprimée en fonction d'une variable indépendante quelconque, on peut encore écrire

$$dV = \frac{1}{3} \frac{d\bar{e} \mathcal{M} \bar{\varepsilon} \bar{e}}{1 + \bar{e} \varphi \bar{\varepsilon}}. \tag{7}$$

3. APPLICATION. *Généralisation du théorème de Lexell.*

Considérons une quadrique quelconque à centre et, sur la surface, un triangle ABC dont les côtés sont déterminés par des plans menés par le centre O; *si le sommet* A *se déplace dans un plan passant par les points* B′ *et* C′, *diamétralement opposés aux sommets* B et C, *qui restent fixes, le volume de la pyramide limitée par les faces du trièdre* OABC *et la quadrique est constant.*



Démonstration. A_0 étant un point fixe du lieu de A, désignons par V et V′ les volumes des secteurs OBA_0A et OCA_0A; le théorème sera démontré si l'on prouve que $V = V'$ ou $dV = dV'$, vu que $V_0 = V'_0 = 0$.

Si nous représentons les vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ par $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, nous aurons

$$dV = \frac{1}{3} \frac{d\bar{a} \mathcal{M} \bar{b} \bar{a}}{1 + \bar{a} \varphi \bar{b}}, \quad dV' = \frac{1}{3} \frac{d\bar{a} \mathcal{M} \bar{c} \bar{a}}{1 + \bar{a} \varphi \bar{c}}.$$

Faisons donc voir que

$$\frac{d\bar{a} \mathcal{M} \bar{b} \bar{a}}{1 + \bar{a} \varphi \bar{b}} = \frac{d\bar{a} \mathcal{M} \bar{c} \bar{a}}{1 + \bar{a} \varphi \bar{c}},$$

ou

$$d\bar{a} \mathcal{M} \bar{a} [\bar{b} - \bar{c} + \bar{b}(\bar{a} \varphi \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \varphi \bar{b})] = 0.$$

Or, $$\bar{b}(\bar{a}\varphi\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\varphi\bar{b}) = \bar{b}(\bar{c}\varphi\bar{a}) - \bar{c}(\bar{b}\varphi\bar{a}) = \mathscr{M}_{\bar{c}\bar{a}}\mathscr{M}_{\bar{b}\bar{c}};$$

$$\mathscr{M}_{\bar{a}}\mathscr{M}_{\bar{c}\bar{a}}\mathscr{M}_{\bar{b}\bar{c}} = \varphi\bar{a}(\bar{a}\mathscr{M}_{\bar{b}\bar{c}}) - \mathscr{M}_{\bar{b}\bar{c}}(\bar{a}\varphi\bar{a})$$

$$= \varphi\bar{a}(\bar{a}\mathscr{M}_{\bar{b}\bar{c}}) - \mathscr{M}_{\bar{b}\bar{c}}.$$

Le premier membre de l'égalité à démontrer devient ainsi

$$d\bar{a}\left[\mathscr{M}_{\bar{a}}(\bar{b}-\bar{c}) - \mathscr{M}_{\bar{b}\bar{c}}\right] + d\bar{a}\varphi\bar{a}(\bar{a}\mathscr{M}_{\bar{b}\bar{c}}).$$

Comme le vecteur $d\bar{a}$ est dirigé suivant la tangente à la ligne A$_0$A en A, on a

$$d\bar{a}\varphi\bar{a} = 0.$$

L'expression se réduit donc à

$$d\bar{a}\left[\mathscr{M}_{\bar{a}}(\bar{b}-\bar{c}) - \mathscr{M}_{\bar{b}\bar{c}}\right] = d\bar{a}\mathscr{M}_{(\bar{a}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b})} = d\bar{a}\mathscr{M}_{\overline{C'A}\cdot\overline{B'A}}.$$

Cette quantité est nulle, puisque la tangente en A est contenue dans le plan AB'C'; le théorème est donc établi.

ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE.

Armes spéciales. — Concours de 1906.

Solutions par M. J. Rosz.

Arithmétique (2 1/2 heures). 1. Énoncer et démontrer le théorème de Fermat.

2. Dans une masse de fer de forme cubique, on a fait un trou cubique qu'on a rempli d'argent. Le poids total du système des deux corps est de 520,800 kg.; son poids spécifique moyen est de 8,1375. Quels sont les volumes de ces deux corps et les longueurs des arêtes;

On entend par poids spécifique moyen du système des deux corps, le poids spécifique d'un corps homogène qui aurait le même poids et le même volume que le système considéré.

Le poids spécifique du fer est 7.8 et celui de l'argent 10.5.

Algèbre (3 heures). 3. On donne le système

$$ax + by + cz = k,$$
$$a'x + b'y + c'z = k'.$$

On demande de résoudre ce système en nombres entiers et positifs. Comme application numérique, on demande de résoudre en nombres entiers et positifs le système

$$2x + 3y + z = 15, \quad 10x - 4y + 3z = 10.$$

R. En éliminant z entre les deux équations données, on a

$$-4x+13y=35; \quad \text{d'où} \quad x=\frac{13y-35}{4}=3y-8+\frac{y-3}{4}.$$

On en conclut une première solution $y=3$, $x=1$, puis les formules générales

$$y=3+4t, \quad x=1+13t, \quad z=4-38t.$$

Pour que les valeurs de x, y, z soient positives, il faut que l'on ait simultanément :

$$3+4t>0, \quad 1+13t>0, \quad 4-38t>0,$$

ou $$t>-\tfrac{5}{4}, \quad t>-\tfrac{1}{13}, \quad t<\tfrac{2}{19}.$$

Par suite la seule valeur possible de t est $t=0$, ce qui donne

$$x=1, \quad y=3, \quad z=4.$$

4. Résoudre l'inégalité

$$\frac{x(y-1)}{y-2}>1.$$

R. Il peut se présenter 3 cas :

1°) $y>2$, alors les valeurs de x correspondantes seront données par $x>\dfrac{y-2}{y-1}$ et sont toujours positives et inférieures à l'unité.

2°) $1<y<2$; on a alors $x<\dfrac{y-2}{y-1}$ et dans ce cas elles seront toutes négatives.

3°) $y<1$; alors $x>\dfrac{y-2}{y-1}$ ou $>\dfrac{2-y}{1-y}$ et les valeurs de x sont supérieures à l'unité.

Comment résout-on l'inégalité proposée par rapport à y? (J. N.)

Géométrie (3 heures). **5.** Comment obtient-on le triangle polaire d'un triangle sphérique donné.

Démontrer les théorèmes suivants :

a) Si le triangle sphérique ABC a pour triangle polaire A'B'C', réciproquement ABC sera le triangle polaire de A'B'C'.

b) Etant donnés deux triangles polaires, chaque angle de l'un aura pour mesure une demi-circonférence diminuée du côté opposé dans l'autre triangle.

6. Etant donnés dans un plan un cercle et un point H intérieur au cercle. On demande :

1°) de démontrer qu'il y a une infinité de triangles ABC inscrits dans le cercle et admettant le point H comme orthocentre.

2°) de chercher le lieu des milieux des côtés de ce triangle.

R. 1° On sait que les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés d'un triangle ABC sont des points du cercle circonscrit. Donc, si on mène par H une sécante du cercle O coupant la circonférence en A et A′ et par les milieux de A′H et AH des perpendiculaires BC et B′C′ sur cette sécante, les triangles ABC, A′B′C′ seront des triangles satisfaisants et il y en aura une infinité puisqu'on peut mener par H autant de cordes que l'on veut.

2° Soit O′ le milieu de OH ; le cercle de centre O′ et de rayon $\frac{1}{2}$ R est le cercle de neuf points d'un triangle quelconque. Comme il est fixe et qu'il passe par les milieux des côtés, c'est le lieu de ces points.

7. Inscrire dans un cercle donné un triangle ABC tel que son orthocentre coïncide avec un point donné H intérieur au cercle et qu'un de ses côtés, BC par exemple, ait une longueur donnée a. Pour quelles valeurs de a le problème est-il possible?

R. Le côté BC de longueur a est tangent en son milieu D à la circonférence de centre O et de rayon $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}$. D'autre part, ce même point D est sur la circonférence de centre O′ et de rayon $\frac{1}{2}$ R. C'est donc l'un des deux points d'intersection de ces circonférences. En l'un d'eux, on mène donc une tangente BC à la première circonférence et de H une perpendiculaire sur cette droite, ce qui donne le sommet A.

Il y aura deux solutions si en valeur absolue (observer que $OO' < \frac{1}{2}$ R)

$$\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} - \frac{R}{2} < OO'. \qquad (1)$$

Il y en aura une seule si, en valeur absolue,

$$OO' = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} - \frac{R}{2}$$

et alors le triangle est isoscèle.

Enfin il n'y en aura aucune si l'inégalité (1) est renversée.

TRIGONOMÉTRIE (2 ½ heures). 8. Théorie. Démontrer dans toute sa généralité la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

9. Vérifier l'identité

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{cotg} \frac{x}{2} - \operatorname{cotg} x.$$

R. On a :

$$\operatorname{cotg}\frac{x}{2}-\operatorname{cotg}x=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2}-\cos x\sin\frac{x}{2}}{\sin x\sin\frac{x}{2}}=\operatorname{coséc}x.$$

10. Résoudre l'équation

$$\operatorname{coséc}x+\operatorname{coséc}2x+\operatorname{coséc}4x+\cdots+\operatorname{coséc}2^{n-1}x=\frac{2}{\cos\frac{x(2^n-1)}{2}-\cos\frac{x(2^n+1)}{2}}.$$

R. On a successivement

$$\operatorname{coséc}x=\operatorname{cotg}\frac{x}{2}-\operatorname{cotg}x,$$

$$\operatorname{coséc}2x=\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}2x,$$

$$\operatorname{coséc}4x=\operatorname{cotg}2x-\operatorname{cotg}4x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{coséc}2^{n-1}x=\operatorname{cotg}2^{n-2}x-\operatorname{cotg}2^{n-1}x;$$

d'où, par addition,

$$\operatorname{coséc}x+\operatorname{coséc}2x+\operatorname{coséc}4x+\cdots+\operatorname{coséc}2^{n-1}x=\operatorname{cotg}\frac{x}{2}-\operatorname{cotg}2^{n-1}x=\frac{\sin\left(\frac{2^n-1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}\sin 2^{n-1}x}=\frac{2\sin\left(\frac{2^n-1}{2}\right)x}{\cos\left(\frac{2^n-1}{2}\right)x-\cos\left(\frac{2^n+1}{2}\right)x}.$$

L'équation à résoudre peut donc s'écrire

$$\sin\left(\frac{2^n-1}{2}\right)x-1=0.$$

D'où les valeurs

$$x=\frac{2\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)}{2^n-1}=\frac{(4k\pm1)\pi}{2^n-1}.$$

CALCUL LOGARITHMÉTIQUE (2 heures). **11.** Calculer l'arc x compris entre 0° et 90° qui satisfait à l'équation $\operatorname{tg}^2 x=\frac{\sin^2 A}{\cos B}$ dans laquelle $A=48°24'48''$, $B=15°31'40''$.

On exprimera le résultat en °, ′ et ″.

12. Calculer l'arc x compris entre 0 et 100 grades qui satisfait à l'équation

$\sin x = \frac{1}{2}\cos A$ dans laquelle $A = 58^{gr},1568$. On exprimera le résultat en grades et fractions de grades avec 4 décimales.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (3 heures). **13.** Une courbe du 2ᵈ ordre à centre étant définie en coordonnées rectangulaires par l'équation générale du 2ᵉ degré, on demande de la rapporter à ses axes.

14. On donne un cercle fixe de centre O et une droite fixe d. On considère les cercles tels que C′ tangents extérieurement à la circonférence O et tangents à la droite d. Rechercher le lieu des centres de similitude des cercles C et C′. Ce lieu peut il être une hyperbole équilatère? Ce lieu peut il être un système de deux droites parallèles?

On prendra comme axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle C, l'axe Ox étant perpendiculaire à d. On désignera par R le rayon du cercle C et par a l'abcisse de la droite d.

R. Soient α, β les coordonnées du centre du cercle C′ et r son rayon; nous supposons a positif. On a

$$r = a - \alpha,$$

et en exprimant que (C′) touche le cercle (C), il vient :

$$\alpha^2 + \beta^2 = (R + r)^2$$

ou
$$(a + R)^2 - 2\alpha(a + R) - \beta^2 = 0; \qquad (1)$$

donc le lieu du centre est une parabole. On peut du reste le voir immédiatement en menant la droite d' parallèle à d à la distance R de d; le point C′ est également distant de O et de d'.

D'autre part, le centre de similitude des deux cercles (C) et C′) a pour coordonnées

$$x = \frac{\alpha R}{R - r} = \frac{\alpha R}{R + \alpha - a}, \quad y = \frac{\beta R}{R + \alpha - a};$$

on en déduit

$$\alpha = \frac{(a - R)x}{x - R}, \quad \beta = \frac{\alpha y}{x} = \frac{(a - R)y}{x - R}.$$

En portant ces valeurs dans (1), on trouve pour le lieu cherché

$$(3R - a)(a + R)x^2 - 4R^2x(a + R) + R^2(a + R)^2 - (a - R)^2y^2 = 0,$$

équation d'une conique.

Elle représente une hyperbole équilatère si

$$3R^2 - a^2 + 2aR = a^2 - 2aR + R^2 \quad \text{ou} \quad a = R(1 + \sqrt{2}).$$

Les points communs à U et U'' vérifient l'équation

$$B'zx + C'xy = 0, \quad \text{ou} \quad x(B'z + C'y) = 0,$$

de sorte que les points communs autres que A_1 et A_2 sont situés sur une droite $B'z + C'y = 0$ passant par le point A ; cette droite est la tangente à la conique (4) au point A.

4. Enfin, les deux coniques passant l'une par les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1', C_2' et l'autre par les points $A_1, A_2, B_1', B_2', C_1, C_2$ ont pour équations

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx - 2C'xy = 0,$$
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz - 2B'zx + 2C'xy = 0;$$

d'où, par soustraction, $(B'z - C'y)x = 0$. On en conclut que ces courbes ont outre les points A_1, A_2 deux points communs situés sur la conjuguée harmonique, par rapport aux droites AB et AC, de la tangente en A à la conique (4).

BIBLIOGRAPHIE.

Ueber die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX Jahrhundert. Bericht der Deutschen Mathemathiker Vereinigung erstattet von MAX SIMON in Strassburg i. t. Leipzig, Teubner, 1906 (In 8° cartonné de VIII-278 pages, et 28 figures). Prix : 9 marcs.

Ce rapport sur le développement de la géométrie élémentaire était d'abord destiné à figurer dans l'*Encyclopédie der mathematischen Wissenschaften* ; à cause de la difficulté de faire contrôler toutes les citations bibliographiques, la direction de l'Encyclopédie a préféré de faire paraître l'immense travail de M. Simon comme *volume complémentaire* de cette publication. Il est à souhaiter que le succès du livre permette à l'auteur de le soumettre à une revision minutieuse en corrigeant les errata et les erreurs inévitables dans une aussi vaste entreprise et en comblant les nombreuses lacunes (*) A cet effet, les personnes qui

---

(*) En ce qui concerne la Belgique, signalons les erreurs ou omissions suivantes : Retsin (p. 28) et Buys (p. 29), auteur de la *Science de l'Espace*, sont belges; Aug. Poulain et Vuibert (p. 43) sont français; les géométries de Folie, Mineur, L. Lecointe (celle-ci dans le sens de la *fusion* de la planimétrie et de la stéréométrie) et de De Vylder (pour les écoles industrielles), ainsi que les Exercices de géométrie et de trigonométrie par Retsin sont omis : les études de Delbœuf sur l'*Ancienne et les Nouvelles géométries* (Revue philosophique, 1893 et 1894) et sa *Géométrie euclidienne sans le postulat d'Euclide* (Mém. de la Soc. Royale des Sciences de Liége, 1897) auraient dû être mentionnées; il y a encore

s'intéressent à l'histoire de la géométrie devraient transmettre leurs observations, leurs critiques, leurs désiderata ou les notices bibliographiques nouvelles dont elles disposent, à l'auteur qui, nous n'en doutons pas, s'empresserait d'en tenir compte.

Quoi qu'il en soit, l'ouvrage s'impose dès maintenant malgré quelques imperfections; il devrait se trouver dans la bibliothèque de tout professeur de mathématiques; même les élèves peuvent le consulter très utilement. On peut ne pas être d'accord avec l'auteur pour certaines de ses appréciations; mais la note toute personnelle, le style parfois humoristique du livre, les renseignements précieux qu'il contient, ne manqueront pas d'intéresser le lecteur d'un bout à l'autre.

Bien que le titre de l'ouvrage ne semble indiquer que le développement de la géométrie *élémentaire* au 19e siècle, nous faisons remarquer que l'auteur traite aussi des deux trigonométries et qu'il ne néglige pas de parler des siècles antérieurs quand le sujet l'exige. Son programme est à peu près celui des établissements d'instruction moyenne, sans être tout à fait limitatif.

Les 52 premières pages sont consacrées aux *généralités* : histoire, bibliographie, méthodologie et philosophie de la géométrie, manuels et recueils d'exercices publiés en France, Allemagne, Italie, Angleterre, Belgique, Hollande, Suède, Espagne, Portugal, Etats-Unis d'Amérique, etc. Cette partie présente un intérêt tout particulier, et il est vivement à souhaiter que l'auteur trouve bientôt l'occasion de la rendre aussi exacte et aussi complète que possible.

La suite de l'ouvrage est affectée aux *questions spéciales;* nous indiquerons sommairement les matières qui y sont traitées.

A. *Théorie des parallèles* (p. 53-60), histoire et bibliographie assez complètes. Il y manque cependant une note de Lamarle et le dernier essai de Delbœuf.

B. *Cercle* (p. 61-109). Quadrature (Démonstration de π, quadrateurs, constructions approchées du côté du carré équivalent, valeurs approchées de π, rectification d'un arc de cercle, problème de l'aiguille dans le calcul des probabilités, lunules d'Hippocrate). Polygones réguliers (Constructions exactes ou approchées, polygones étoilés, multisection des arcs). Trisection de l'angle (au moyen de certaines courbes ou d'instruments, solutions approchées). Propositions diverses sur le cercle (Théorème de Fermat, constructions de Mascheroni, théorème de Miquel, autres propositions moins connues). Inversion (théorie

---

lieu de citer les traités de trigonométrie de Cambier (6e édition), Meyer, L. Lecointe, Gelin, Mandart, Mineur, Barbette.

Pour la Hollande, on aurait pu parler des *Wiskundige Opgaven* et du *Nieuwe Archief*.

L'*Histoire des Mathématiques*, par Max. Marie (p. 10). comprend 12 volumes; une histoire de la géométrie, par Klimpert, fait partie de l'Encyclopédie de Kleyer.

La liste des auteurs français de traités de géométrie et de trigonométrie ayant de la valeur ou de la vogue demande des compléments; les noms de Bergery, Guichard, Combette, Dufailly, Rebière, Porchon, etc. manquent.

générale, applications, inverseurs). Problème d'Apollonius (Historique très étendu). Problèmes de Castillon et d'Ottejano et problèmes analogues.

C. *Aires* (pp. 109-123). Théorème de Pythagore pour le triangle rectangle et la pyramide trirectangle. Théorème de Potolémée, la réciproque et la généralisation par Casey pour quatre cercles touchant un même cinquième. Définitions de l'aire. Isopérimétrie (plus grande aire d'un périmètre donné, etc., autres maxima ou minima).

D. *Triangles* (pp. 124-154). Points remarquables (Cercle de Feuerbach, théorèmes analogues pour le tétraèdre et le triangle sphérique). Bissectrices des angles d'un triangle (Théorème de Lehmus-Steiner, construction du triangle dont on donne les trois bissectrices. Le triangle pseudoisoscèle d'Alauda n'est pas mentionné). Orthocentre. Cercles tritangents. Cercle circonscrit. Distances mutuelles des points remarquables. Centre de gravité. Théorème de Stevart. Droite de Simson. Problème de Malfatti. Triangles spéciaux.

L'auteur rappelle ici sans démonstration une foule de propositions peu connues et fait en quelque sorte une suite de monographies bibliographiques.

E. *Polygones* (pp. 155-168). Quadrangles et quadrilatères ordinaires ou complets. Quadrilatère inscrit, quadrilatère circonscrit. Pseudocarré. Trapèze. Polygones d'un nombre quelconque de côtés (Propositions diverses).

F. *Configurations planes générales* (pp. 169-188). Figures semblables. Division d'une droite en segments additifs ou soustractifs Division en moyenne et extrême raison. Rapports incommensurables. Division harmonique. Involution. Centre des moyennes distances. Transversales. Théorèmes de Pascal et de Brianchon.

G. *Figures de l'espace* (pp. 187-201). Stéréométrie (Bibliographie remarquable). Volumes et surfaces. Prismatoïde et obélisque. Volume d'un tonneau. Figures sphériques.

H. *Relations particulières* (pp. 202-222). Tétraèdre (théorèmes divers). Sphères tangentes aux quatre faces. Tétraèdre orthogonal. Tétraèdre isoscèle, etc. Polyèdres (Théorème d'Euler, conséquences). Polyèdres réguliers convexes ou étoilés, polyèdres semi-réguliers.

I. *Trigonométrie plane* (pp. 223-238). Historique, multiplication des arcs, manuels et recueils d'exercices, séries trigonométriques, équations trigonométriques, résolution des triangles, transformation continue de Lemoine.

J. *Trigonométrie sphérique* (pp. 239-249). (Généralités, historique, théorème de Legendre, équations de Delambre Gauss-Mollweide, excès sphérique, questions diverses). (J. NEUBERG)

Cours de Trigonométrie rectiligne et sphérique à l'usage de l'enseignement moyen par H. MANDART, Ancien élève de l'Ecole normale des sciences de Gand, Professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Tongres. Namur, Wesmael-Charlier, 1906 (Vol. in 8° de VIII-194 pp., avec figures dans le texte). Prix : 3 fr.

Sommaire. PREMIÈRE PARTIE. *Trigonométrie rectiligne.* CHAPITRE I. *Définitions et propriétés des lignes trigonométriques* (pp. 1—35). 1. Sinus et cosinus d'angles inférieurs à deux droits. 2. Lignes trigonométriques d'angles positifs

ou négatifs quelconques. 3. Formules fondamentales relatives aux triangles. 4. Fonctions trigonométriques de la somme ou de la différence de deux angles.

Dans ce chapitre, M. Mandart expose d'une façon simple et rigoureuse les propriétés des fonctions trigonométriques. L'auteur définit d'abord le sinus et le cosinus d'angles inférieurs à deux droits; ce sont là, le sinus et cosinus *géométriques*, les autres sont *algébriques* et sont définis d'une façon analogue à celle du produit des quantités négatives en algèbre. Il démontre, en effet, que pour a aigu, on a $\sin(a+90^\circ)=\cos a$, $\cos(a+90^\circ)=-\sin a$ et admet alors, *par convention*, que ces égalités existent pour toute valeur de a, positive ou négative, de même qu'en algèbre on admet par convention l'identité $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$ même quand $a-b$, $c-d$ sont des quantités négatives. C'est au moyen de cette convention que l'auteur donne une signification précise aux sinus et cosinus *algébriques*. La tangente est définie comme le rapport du sinus au cosinus; c'est du reste la manière logique et historique de définir cette fonction.

M. Mandart fait donc connaître immédiatement les fonctions circulaires comme des nombres et non comme des longueurs, ce n'est que plus loin qu'il nous les représente géométriquement, vu l'importance de cette représentation au point de vue de l'enseignement élémentaire et aussi pour indiquer que ce sont bien des fonctions *circulaires*.

Un grand mérite de l'ouvrage, c'est qu'il fait ressortir que les lignes trigonométriques sont de vraies fonctions périodiques d'une variable pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$.

Les formules concernant les fonctions trigonométriques de la somme ou de la différence de deux angles sont déduites des formules fondamentales des triangles quelconques, et sont généralisées ensuite à l'aide des relations conventionnelles fondamentales.

Chapitre II. *Calculs trigonométriques*. 1. Limites de certaines expressions trigonométriques. 2. Calcul des lignes trigonométriques. 3. Tables des logarithmes des lignes trigonométriques. 4. Usage des tables. 5. Réduction à la forme monôme des expressions algébriques dépendant de lignes trigonométriques. 6. Équations trigonométriques.

Dans le § 1, on trouve une démonstration claire et rigoureuse d'un théorème traité d'une façon incorrecte chez d'autres auteurs ($\sin x < x < \operatorname{tg} x$). Dans le § 6 l'auteur résout d'une façon très élégante plusieurs questions de maxima et minima; il a soin de prévenir les élèves contre les substitutions irrationnelles pour leur éviter le choix à faire parmi les solutions.

Chapitre III. *Application des fonctions circulaires à la géométrie*. 1. Formules relatives au triangle. 2. Résolution des triangles. 3. Résolution de triangles dont on connaît d'autres éléments que les angles et les côtés. 4. Questions de géométrie. 5. Applications topographiques.

Dans le § 3, l'auteur traite plusieurs cas de résolution de triangles avec le plus grand soin, et la discussion est claire et complète.

Chapitre IV. *Théorie générale des fonctions trigonométriques ou circulaires*. 1. Semi-droites et segments. 2. Rapport anharmonique de quatre points. 3. Projections. 4. Angles. 5. Fonctions trigonométriques ou circulaires. 6. For-

mules et théorèmes relatifs au contour triangulaire fermé. 7. Rapport anharmonique de quatre droites. 8. Théorème de Ménélaüs et de Ceva.

Ce chapitre ne doit être enseigné, ni en 3me professionnelle ni dans les humanités anciennes. Il contient, d'une façon vraiment scientifique, l'exposé de la théorie générale des fonctions trigonométriques. L'auteur est très soucieux de la généralité, et y arrive en utilisant la méthode des projections. C'est un chapitre qui préparera l'élève à l'étude de la géométrie analytique.

DEUXIÈME PARTIE. *Trigonométrie sphérique.* CHAPITRE I. Relations entre les éléments d'un triangle sphérique. 1. Formules fondamentales. 2. Formules relatives aux triangles rectangles. 4. Théorèmes relatifs aux triangles sphériques.

M. Mandart démontre avec rigueur d'une manière générale la formule fondamentale et il en déduit toutes les autres.

CHAPITRE II. *Résolution des triangles sphériques.* 1. Triangles rectangles. 2. Triangles non rectangles dont la résolution se ramène à celle des triangles rectangles. 3. Triangles sphériques quelconques. 4. Applications.

Ici encore les discussions sont claires et complètes.

Le livre de M. Mandart contient outre ce que l'on trouve dans tous les traités de Trigonométrie, une collection d'exercices simplement énoncés ou résolus et discutés avec soin.

C'est une œuvre solide, remarquable à plusieurs points de vue, et appelée à rendre des services aux professeurs et aux bons élèves.

(G. VERHEUGEN)

NOTES MATHÉMATIQUES.

3. *Sur les tangentes communes à une parabole et à un cercle.* M. BARISIEN nous adresse la question suivante :

On donne une parabole et une droite perpendiculaire à l'axe. D'un point quelconque de cette droite, comme centre, on décrit un cercle de rayon donné R. *Montrer que le produit des tangentes trigonométriques des angles avec l'axe que font les quatre tangentes communes à la parabole et au cercle, est constant.*

La démonstration ne présente pas de difficulté. En effet, l'équation d'une tangente à la parabole étant $y = mx + \frac{p}{2m}$, la condition que cette droite touche également la circonférence de centre (α, β) et de rayon R, s'exprime par l'équation

$$\frac{\beta - m\alpha - \frac{p}{2m}}{\sqrt{1+m^2}} = R, \qquad (1)$$

qui, rendue rationnelle, devient

$$4(\alpha^2 - R^2)m^4 - 8\alpha\beta m^3 + 4(\beta^2 + p\alpha - R^2)m^2 - 4mp\beta + p^2 = 0.$$

On en conclut $m_1m_2m_3m_4 = \dfrac{p^2}{4(\alpha^2 - R^2)}$, ce qui démontre le théorème de M. Barisien.

Je rappelle ici une autre proposition remarquable que j'ai signalée dans le JMS, 1888, p. 9 et d'où j'ai tiré de nombreuses conséquences. Soit t la tangente de la moitié de l'angle que fait avec l'axe de la parabole une tangente à cette courbe. En remplaçant m par $\dfrac{2t}{1-t^2}$, on déduit de (1),

$$pt^4 + 4(R+\beta)t^3 + 2(4\alpha - p)t^2 + 4(R-\beta)t + p = 0,$$

d'où $t_1t_2t_3t_4 = 1$, relation indépendante du cercle et du paramètre.

(J. NEUBERG)

×**2.** *Sur quelques lignes trigonométriques.* M. l'abbé Gélin, dans son remarquable travail sur les lignes trigonométriques de l'arc de 3° (*Mathesis*, juin 1906, *Supplément*), trouve

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right].$$

Par d'autres procédés, il trouve

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right].$$

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{32}\left[(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{5}) - (\sqrt{10}+\sqrt{3}-2-\sqrt{2})\sqrt{5+\sqrt{5}}\right].$$

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{8}\left[(\sqrt{5}-1)\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\right].$$

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3}(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

On obtiendrait ainsi des identités assez curieuses, en égalant ces diverses valeurs de sin 3°.

Voici d'autres identités du même genre :

$$\sin 24^\circ = \frac{1}{8}\left[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

$$\sin 21^\circ = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{8\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\sqrt{9-\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Par le procédé de M. Gélin, on peut obtenir les lignes trigonométriques de tous les arcs en degrés, divisibles par 3.

Signalons ou rappelons, à ce sujet, les relations suivantes :

$$\cos 18^\circ . \sin 35^\circ = \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{tg} 36^\circ \operatorname{cotg} 18^\circ = \sqrt{5}.$$

$$\sin 12^\circ . \cos 42^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{8}, \quad \sin 12^\circ \cos 42^\circ \cos 36^\circ = 1.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 1582.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 200).

Si, d'un point fixe M, *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers les points* F *et* F', *puis les normales aux points de contact, le lieu des points de rencontre de ces normales est la droite qui joint les centres de courbure des deux coniques homofocales qui se croisent au point* M. (LAGUERRE)

Solution par M. ABRAMESCU. Soient

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} = 1, \qquad (1)$$

(*) Nous avons reçu trop tard pour les mentionner antérieurement de bonnes solutions des questions 1572 par M. Roze, 1587 par M. Prange, 1588 par MM. Prange, Agronomof et Plakhovo (2e solution).

l'équation des coniques homofocales, $M(x_1, y_1)$ le pôle tangentiel et $N(\alpha, \beta)$ le pôle normal. Entre leurs coordonnées, on a les relations (Niewenglowski, *Géométrie analytique*)

$$\frac{y_1^2 - (b^2 - \lambda)}{\alpha y_1} = \frac{x_1^2 - (a^2 - \lambda)}{-\beta x_1} = \frac{(b^2 - \lambda)x_1^2 + (a^2 - \lambda)y_1^2}{-(a^2 - b^2)x_1 y_1}.$$

Si l'on représente ces trois rapports égaux par $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$, on élimine λ en déduisant de là la nouvelle proportion

$$\frac{p - p'}{q - q'} = \frac{p'' + px_1^2 - p'y_1^2}{q'' + qx_1^2 - q'y_1^2},$$

ce qui donne pour le lieu du point $N(\alpha, \beta)$,

$$2x_1y_1(\alpha y_1 + \beta x_1) = (a^2 - x_1^2 - b^2 + y_1^2)[\alpha x_1 - \beta y_1 - (a^2 - b^2)];$$

ce lieu est donc une ligne droite.

Pour déterminer la position de cette droite, considérons les deux coniques C_1, C_2 homofocales qui se croisent au point M. Supposons que M étant infiniment voisin de la conique C_1, les normales aux points de rencontre de cette conique avec la polaire de M se coupent en un point N et sont infiniment voisines; donc, à la limite, le point N se confond avec le centre de courbure du point M de la courbe C_1. Conclusion analogue pour C_2; donc la droite trouvée passe par le centre de courbure des coniques qui se croisent en M.

M. Barisien traite les deux parties de la question par le calcul et ajoute à sa solution les remarques suivantes :

1° Lorsque le système homofocal varie, en conservant les mêmes axes en direction, la droite trouvée enveloppe une parabole.

2° Le lieu des points de contact des tangentes ou des normales menées d'un point fixe M à des coniques homofocales est une strophoïde oblique, ayant M pour point double et passant par les foyers de ces courbes et par les projections de M sur les axes (théorème connu).

Question 1583.

(Voir *Mathesis* (3), VI, p 200).

La normale en un point M *d'une courbe* (C) *coupe l'axe* Oy *en* N'. *De* N' *on abaisse sur le rayon vecteur* OM *une perpendiculaire qui rencontre* Ox *en* R. *Déterminer la courbe* (C) *par la condition qu'il existe un rapport constant entre la distance* OR *et la sous-tangente en* M. (Rosk)

Solution par MM. G. Verheugen, Dupont, Barisien, Abramescu, Janne, E. Seam et Lez. On a

$$\frac{OR}{ON'} = \frac{y}{x}, \qquad ON' = y + \frac{x}{y'};$$

donc

$$OR = \frac{y^2}{x} + \frac{y}{y'},$$

et, puisque la sous-tangente est $\frac{y}{y'}$, on aura, a étant une constante,

$$a = \frac{yy'}{x} + 1,$$

d'où en posant $a - 1 = b$,

$$\frac{yy'}{x} = b, \qquad ydy - bdx = 0;$$

donc les courbes (C) sont les ellipses ou hyperboles

$$y^2 = 2bx^2 + c$$

Remarque. La différence entre OR et la sous-tangente est $\frac{y^2}{x}$, donc si les courbes (C) étaient données par la condition que la différence entre OR et la sous-tangente est constante, on aurait trouvé des paraboles.

M. Barisien vérifie le résultat sur l'ellipse et trouve que le rapport constant entre OR et la sous-tangente est $\frac{a^2}{c^2}$.

M. Janne se pose le même problème en prenant pour N' le point de rencontre de l'axe Oy avec la tangente en M. L'équation différentielle de la courbe est maintenant

$$xy'^2 - yy' - kx = 0 \quad \text{ou} \quad dy = \left(\frac{y}{2x} + \sqrt{\frac{y^2}{4x^2} + k}\right) dx;$$

en posant $y = xz$ on trouve

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 4k} - z} = \frac{(\sqrt{z^2 + 4k} + z)dz}{4k}.$$

L'intégration s'achève facilement.

×Question 1585.

(Voir *Mathesis*, (3); VI, p. 200).

Si a et b sont des nombres rationnels tels que $(a - b^3)b$ soit positif, le nombre

$$\sqrt[3]{a+\frac{8b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}+\sqrt[3]{a-\frac{8b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}} \quad (1)$$

est rationnel. (J. Tannery)

(Enoncé rectifié).

Solution par M. Hernandez (Valence). Comme en vertu des hypothèses le radical carré est réel, nous posons

$$\frac{a-b^3}{3b}=K^2, \quad \text{d'où} \quad a=b^3+3bK^2.$$

En substituant cette valeur de a, on trouve pour le premier radical cubique de (1),

$$\sqrt[3]{b^3+3bK^2+\frac{9b^3+3bK^2}{3b}K}=\sqrt[3]{b^3+3bK^2+3b^2K+K^3}=b+K.$$

Le second radical cubique ayant pour valeur $b - K$, l'expression (1) se réduit à $2b$.

M. Plakhovo a reconnu l'erratum dans l'énoncé en observant que l'expression (1) considérée comme racine d'une équation cubique dépend d'une équation à coefficients irrationnels; en traitant les radicaux cubiques par la méthode de M. Dickmann (*Journal de Hoffmann*, 30e année, p. 89), il n'arrivait non plus à aucun résultat.

Question 1589.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 253).

Etant donnés quatre rayons a, b, c, d d'un faisceau, trouver une transversale u qui les coupe en des points A, B, C, D *tels que* $AB = m.CD$, *m étant un nombre donné. Cas particulier où c est la bissectrice de l'angle ad et où $m = 1$.* (Abramescu)

Solution par M. Fr. Dupont. Des transversales parallèles étant coupées par les rayons a, b, c, d en segments homologues proportion-

nels, recherchons seulement parmi les droites $u \equiv ABCD$ issues d'un point donné C de c quelles sont celles qui répondent à la question.

Par le sommet O du faisceau, menons une parallèle à u limitée en un point E tel que $OE = m.DC$; l'extrémité du vecteur OE décrira une droite e parallèle à d. La ponctuelle [E] sera projective au faisceau des droites u et aussi à la ponctuelle [A] qu'il détermine par son intersection avec a; si, par le point E, nous menons une parallèle à b, elle coupera le rayon a en un point A′, qui décrira une ponctuelle projective à [E] et par conséquent à [A]. Or, si nous appelons A″ l'intersection de EA′ avec u, nous pourrons écrire $A''B = EO = m.CD$. Les points A et A′ venant se superposer en A_1 ou A_2 points doubles des deux ponctuelles [A] et [A′], A″ se trouvera dans ces positions coïncider avec A et les deux transversales CA_1 et CA_2 seront celles qui répondent à la question. Désignons par I et J′ les intersections de a avec une parallèle CI à d et avec la droite e : il est facile de voir que ce sont les points de fuite. On recherchera alors l'homologue M′ du milieu M de IJ′ : la méthode de Chasles fournira ainsi les points doubles cherchés A_1 et A_2.

Dans le cas particulier où $m = 1$, les points I et J′ coïncident en un point S; les deux ponctuelles [A] et [A′] sont donc en involution; dans ce cas, les points doubles A_1 et A_2 pourront s'obtenir plus simplement en menant CO′ parallèle a b, qui par son intersection O′ avec a donnera l'homologue du point O.

Dans le cas général, le lieu du point A″ étant le produit de deux faisceaux projectifs, est une hyperbole passant par le point C. On peut démontrer facilement que b est l'une de ses asymptotes et que l'autre est parallèle à d. Le centre de cette courbe se construit aisément en observant qu'elle passe par les points doubles A_1 et A_2 et que, de plus, la parallèle à a menée par C rencontre l'hyperbole en un second point C_1 qui n'est autre que l'intersection de cette droite avec la parallèle à b menée par J′. Si K et L désignent les milieux de A_1B_2 et de CC_1 l'intersection de KL avec b donnera le centre cherché.

Dans le cas particulier, en considérant CO comme une position de u, on arrive à ce résultat que la tangente à l'hyperbole au point C coïncide avec le rayon c.

Solution par M. Rose. On peut prendre arbitrairement le point C sur c; car, pour toutes les transversales parallèles entre elles, le rapport des segments interceptés par les angles ab et cd est le même. Menons

par C une parallèle à d qui coupe a en A′ et b en B′; nous aurons

$$(ABCD) = (A'B'C\infty) \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} = \frac{A'B'}{CB'}.$$

En posant $CD = x$, $BC = y$, nous déduisons de la dernière égalité

$$\frac{mx^2}{[(m+1)x+y]y} = \frac{A'B'}{B'C}.$$

Cette équation détermine le rapport $x : y$; le problème est ramené à une question connue.

Si c est la bissectrice de l'angle ad et $m = 1$, l'équation du problème devient

$$x^2 . B'C - 2xy . A'B' - y^2 . A'B' = 0,$$

d'où

$$\frac{y}{x} = \frac{A'B' \pm \sqrt{A'B' . A'C}}{A'B'}.$$

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1296. Soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs du triangle ABC. Par A et A′ on mène les parallèles aux hauteurs BB′ et CC′ et on forme ainsi un parallélogramme AA″A′A‴ d'aire S_a. On a de même deux autres parallélogrammes analogues d'aires S_b et S_c. 1° Montrer que a, b, c, S étant les côtés et l'aire du triangle ABC, on a

$$S_a = \frac{8S^2}{a^4}, \quad S_b = \frac{8S^2}{b^4}, \quad S_c = \frac{8S^2}{c^4}.$$

2° Si m_a, m_b, m_c sont les médianes de ABC et α, β, γ les angles des diagonales des trois parallélogrammes précédents, on a

$$\sin\alpha = \frac{2S}{am_a}, \quad \sin\beta = \frac{2S}{bm_b}, \quad \sin\gamma = \frac{2S}{cm_c}.$$

(E. N. Barisien)

Il suffit d'observer que le triangle AA″A′ est semblable au triangle ABC.

1297. Si dans un triangle ABC, $C - B = 90°$, la droite qui joint A au centre du cercle circonscrit est parallèle à BC. On a, en outre,

$$a = \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{c^2 + b^2}}, \quad S = \frac{c^2 - b^2}{2}\sqrt{\frac{bc}{2(b^2 + c^2)}},$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}, \quad m_a^2 = \frac{b^4 + 6b^2c^2 + c^4}{4(b^2 + c^2)}.$$

(E. N. Barisien)

Lorsque les sommets B et C restent fixes, le lieu du point A est l'hyperbole équilatère qui a pour axe transverse BC (théorème connu). Si l'on mène AP perpendiculaire à BC et que C′ désigne le symétrique de C par rapport à P, le triangle ABC′ est rectangle en A ; d'où l'on conclut facilement les valeurs des segments PB, PC′ = PC ; la hauteur AP, etc.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1606. On donne deux plans α, β et un triangle PQR. Une sécante quelconque menée par P rencontre α en A, β en B. Par la droite AQ on fait passer un plan α' perpendiculaire à α, et par la droite RB un plan β' perpendiculaire à β. Trouver la surface engendrée par l'intersection des plans α' et β', lorsque A parcourt une droite a ou une conique γ données dans le plan α. (J. NEUBERG)

1607. Trouver le lieu des sommets et des foyers d'une ellipse dont on donne une directrice et un sommet du petit axe.

Trouver le lieu des sommets du petit axe d'une ellipse dont on donne une directrice et un sommet du grand axe. (E. N. BARISIEN)

×**1608.** Eliminer x et y entre les équations :

$$x^4 + y^4 = A, \quad (x^3 - y^3)(x - y) = B, \quad (x^6 + y^6)(x^2 + y^2) = C.$$

(CUNNINGHAM)

×**1609.** On a, avec une erreur inférieure à $\frac{1}{32a}$,

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{2x}{4a + 1}$$

si x est compris entre 0 et $a + \frac{1}{4}$; et

$$\sqrt{(a^2 + 1)^2 - x} = a + 1 - \frac{2x}{4a + 3}$$

si x est compris entre 0 et $a + \frac{3}{4}$.

×**1610.** Un rayon OM de la circonférence circonscrite à un triangle ABC rencontre les côtés en A′, B′, C′. Démontrer que les projections A″, B″, C″ de A′, B′, C′ respectivement sur les droites AM, BM, CM appartiennent à la droite de Simson du point M. (A. GOB)

SUR DES POINTS D'INFLEXION QU'ON RENCONTRE EN STÉRÉOTOMIE(*),

par M. A. Claeys,
Répétiteur à l'Université de Gand.

Dans la présente note, nous faisons connaître des constructions simples, donnant exactement les points d'inflexion de certains panneaux que l'on rencontre fréquemment en stéréotomie.

Nous nous appuierons uniquement sur le théorème connu : les points d'inflexion de la transformée d'une courbe, tracée sur une surface développable qu'on développe, correspondent aux points de la courbe où le plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent à la surface.

Si la courbe est plane, on peut employer les constructions enseignées en géométrie descriptive dans le problème : mener à une surface développable un plan tangent perpendiculaire à un plan donné.

Nous pouvons donc examiner ici le seul cas des courbes gauches.

Sphère et cylindre. La construction donnée s'appliquera aux deux appareils, appelés communément le premier « porte biaise en tour ronde avec talus et rachetant une voûte sphérique en maçonnerie » (Leroy, *Traité de stéréotomie*, p. 219) le second « lunette biaise dans une voûte sphérique. » (Leroy, *Traité de stéréotomie*, p 272).

Supposons un cylindre de révolution autour d'un axe situé dans le plan horizontal qui passe par le centre de la sphère, mais dont l'axe ne passe pas par ce centre. Considérons seulement les moitiés supérieures des deux surfaces.

Prenons pour plan horizontal de projection celui qui renferme le centre O de la sphère et l'axe du cylindre. Soient AB l'équateur de la sphère, CE et DF les génératrices du cylindre qui sont situées dans le plan horizontal de projection; C, E, D, F sont sur la circonférence AB (fig. 1).

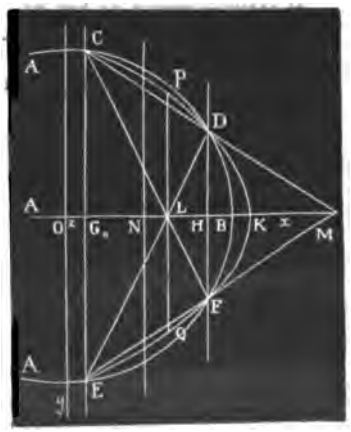


Fig. 1.

(*) Au fond, il ne s'agit dans l'article de M. Claeys que de constructions géométriques qui peuvent être utilisées en stéréotomie (Rédaction).

Prenons pour axe ox le diamètre OB perpendiculaire à l'axe du cylindre, pour axe oy le diamètre parallèle à cet axe, pour axe oz la verticale passant par O.

L'axe du cylindre et les génératrices CE, DF rencontrent OB en N, G et H respectivement.

Soient $OA = OB = R$, $NG = NH = r$, $ON = h$.

La courbe d'intersection de la sphère et du cylindre a pour équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$
$$(x - h)^2 + z^2 = r^2,$$

ou encore, en éliminant z^2 de la première

$$y^2 = h^2 + R^2 - r^2 - 2hx, \qquad (1)$$
$$z^2 = r^2 - (x - h)^2. \qquad (2)$$

D'après l'équation (1), la projection horizontale de cette courbe est une parabole dont l'axe se confond avec ox.

Cherchons en quel point de la courbe gauche le plan osculateur est normal au cylindre. Si l'on prend x comme variable indépendante, les coefficients directeurs de la binormale à la courbe et de la normale au cylindre sont respectivement

$$y'z'' - y''z', \quad -z'', \quad y''$$
$$z', \quad 0, \quad -1.$$

L'orthogonalité de ces deux droites s'exprime par la relation

$$y'z'z'' - y''z'^2 - y'' = 0. \qquad (3)$$

Mais des équations (1) et (2), on tire

$$y' = -\frac{h}{y}, \quad y'' = -\frac{h^2}{y^3}$$
$$z' = -\frac{x - h}{z}, \quad z'' = -\frac{r^2}{z^3}.$$

Alors l'égalité (3) devient, toutes réductions faites,

$$hx^2 - x(h^2 + R^2 - r^2) + hR^2 = 0. \qquad (4)$$

Cette équation donne les abscisses des points de la courbe qui deviendront des points d'inflexion dans le développement du cylindre.

On voit que le produit des racines de l'équation (4) est égal à R^2; donc les projections L et M sur ox des points demandés sont séparés

harmoniquement par A et B. La somme des racines est égale à

$$\frac{h^2 + R^2 - r^2}{h};$$

donc le milieu K de LM, donné par l'abscisse

$$\frac{h^2 + R^2 - r^2}{2h}$$

est le point de rencontre de la parabole (1) avec ox. Ainsi L et M sont aussi séparés harmoniquement par les points où la parabole (1) rencontre ox. Par conséquent, L et M sont les points doubles de l'involution que donne sur la droite ox le faisceau de coniques défini par le cercle AB et la parabole CDKFE. Comme les coniques dégénérées (CF, DE) et (CD, EF) de ce faisceau ont leurs points doubles sur ox, ce sont ces derniers points qui se confondent avec L et M. Il en résulte une construction très simple pour obtenir L et M.

Remarquons que (CE, DF) est une autre conique dégénérée du faisceau; donc L et M séparent aussi harmoniquement G et H; par conséquent, l'un des points L seulement correspond à des points réels P et Q de la courbe d'intersection.

Si l'une des génératrices CE et DF du cylindre ne rencontre pas le cercle AB en des points réels, l'involution (AB, GH) est elliptique; les points doubles ne sont pas réels et il n'y a pas de points d'inflexion sur la transformée de la courbe gauche.

Pour obtenir graphiquement P et Q, on prend comme plan auxiliaire le plan mené par L perpendiculairement à AB; ce plan coupe la sphère suivant un petit cercle et le demi-cylindre suivant une génératrice. Il suffit de rabattre le plan auxiliaire dans le plan horizontal de projection pour obtenir les rabattements des points cherchés P et Q

Deux cylindres. Premier cas. Les cylindres considérés sont de révolution autour d'axes rectangulaires situés dans un même plan horizontal. Les rayons sont différents et il s'agit, dans ce premier cas, du développement du cylindre qui a le plus petit rayon. Nous considérons seulement les moitiés supérieures des deux cylindres et nous supposons sur la figure 2 que le plus petit cylindre s'arrête à la courbe d'entrée.

La construction donnée s'appliquera aux deux appareils connus sous

les noms de « porte biaise en talus et rachetant un berceau en maçonnerie » (LEROY, *Traité de stéréotomie*, p. 208) et « lunette droite dans un berceau » (LEROY, *Traité de stéréotomie*, p. 267).

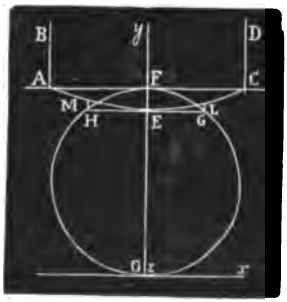


Fig. 2.

Prenons le plan des axes comme plan horizontal de projection. Soient AB et CD les génératrices du petit cylindre situées dans ce plan, AC l'une des deux génératrices du grand cylindre situées dans ce même plan. Prenons l'axe du grand cylindre comme axe ox; celui du petit cylindre comme axe oy; la verticale, menée par le point de rencontre des deux axes, comme axe oz.

La courbe d'intersection des deux cylindres a pour équations

$$y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + z^2 = r^2,$$

ou encore, en éliminant z^2 de la première

$$y^2 = x^2 + R^2 - r^2 \tag{1}$$

$$z^2 = r^2 - x^2. \tag{2}$$

Les points d'inflexion de la transformée de cette courbe sur le développement du petit cylindre sont donnés par l'équation déjà rencontrée

$$y'z'z'' - y''z'^2 - y'' = 0. \tag{3}$$

Mais des équations (1) et (2), on tire

$$y' = \frac{x}{y}, \quad y'' = \frac{R^2 - r^2}{y^3};$$

$$z' = -\frac{x}{z}, \quad z'' = -\frac{r^2}{z^3}.$$

Alors l'équation (3) devient, toutes réductions faites

$$x^4 + 2x^2(R^2 - r^2) - r^2(R^2 - r^2) = 0,$$

ou, en posant $R^2 - r^2 = k^2$,

$$x^4 + 2k^2x^2 - r^2k^2 = 0. \tag{4}$$

On trouve, en résolvant cette équation,

$$x^2 = -k^2 \pm \sqrt{k^4 + r^2k^2},$$

d'où, en supprimant devant le radical la signe moins qui donnerait à x des valeurs imaginaires, et en introduisant R

$$x^2 = k(R - k). \qquad (5)$$

Remarquons que la projection horizontale de la courbe d'intersection des deux cylindres est une hyperbole équilatère, représentée par l'équation (1). Les sommets réels ont pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = \pm k.$$

Soient E le sommet réel se trouvant sur la branche tracée dans la figure 2, F le point de rencontre de AC et OE; on a

$$OE = k, \quad EF = R - k.$$

Les abscisses des points qui deviennent des points d'inflexion dans le développement, sont, d'après l'équation (5), moyennes proportionnelles entre OE et EF.

Donc, sur OF comme diamètre on décrit une circonférence. Par E, on mène une parallèle à Ox qui rencontre cette circonférence en G et H. Les perpendiculaires à Ox menées par G et H rencontrent l'hyperbole aux points demandés L et M.

Pour construire exactement ces points, on se servira du plan mené par G ou H perpendiculairement à Ox; ce plan donne dans le grand cylindre une section droite, et dans l'autre demi-cylindre une génératrice. Par rabattement, on obtient la position exacte du point L; une parallèle à Ox menée par L donne aussi M.

Pour que les points L et M de la courbe d'intersection des deux cylindres soient réels, il faut que l'on ait

$$k(R - k) < r^2,$$

d'où

$$k < R,$$

inégalité qui est évidemment vérifiée.

Deuxième cas. Dans ce dernier cas, nous nous occupons des mêmes surfaces que dans le premier, mais ici c'est le grand cylindre que nous développons.

Si nous cherchons maintenant les y des points de la courbe d'intersection des deux cylindres, qui deviennent des points d'inflexion dans le développement, il est clair qu'il suffit de changer, dans l'équation (4)

du premier cas, x en y, R en r, r en R, k^2 en $-k^2$. Mais alors cette équation donne

$$y^2 = k^2 \pm kr\sqrt{-1}.$$

Il en résulte qu'il n'y a pas de points d'inflexion sur la transformée de la courbe gauche.

La connaissance de ce résultat négatif n'est pas sans valeur, puisqu'elle lève toute hésitation dans le tracé de la courbe.

Aux deux appareils cités dans le premier cas, nous ajouterons la « trompe cylindrique en tour ronde » (Eug. Rouché et Ch. Brisse, *Coupe des Pierres*, p. 116); dans cet appareil, c'est seulement le grand cylindre qu'on développe, le plus petit étant fictif, c'est-à-dire n'existant pas sur la pierre.

NOTES HISTORIQUES ET ANALYTIQUES (*),

par M. A. Aubry.

×1. *Démonstration élémentaire de la formule de Maskelyne.* Les deux identités

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^4 x\,(1 - \operatorname{tg}^4 x)$$

donnent, en y changeant x en $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{8}$, ... et multipliant, la suivante, due à Sarrus,

$$\frac{x^3 \cos x}{\sin^3 x} = \left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4}\right)\left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{x}{8}\right)\cdots$$

d'où, si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, et, à cause des relations

$$1 > (1-a)(1-b)\cdots > 1 - a - b - \cdots,$$

$$\operatorname{tang} x < \frac{4x}{\pi}, \quad 1 > \frac{x^3 \cos x}{\sin^3 x} > 1 - \frac{256}{15}\frac{x^4}{\pi^4} = 1 - 0{,}17\,x^4;$$

de là, si x est suffisamment petit, la formule en question

$$\frac{\sin x}{x} = \sqrt[5]{\cos x}.$$

(*) La Rédaction de *Mathesis* laisse au savant auteur de cet article la responsabilité de ses renseignements historiques relatifs à la priorité de telle ou telle découverte.

×3. *Sur la formule du binome.* Ce développement était connu des Indiens et des Arabes. En Europe, on le voit, pour la première fois, dans l'*Arithmetica integra*, de Stifel (Nuremberg, 1544), qui l'applique de la manière suivante à l'extraction des racines.

Soit à trouver $\sqrt[7]{3521614606208}$. On suppose connue la liste des septièmes puissances des neuf premiers nombres entiers ainsi que la suite

(α) 7000000, 2100000, 350000, 35000, 2100, 70, 1.

On partagera le nombre proposé en tranches de sept chiffres. La plus grande 7e puissance contenue dans la première tranche est $6^7 = 279936$: la différence est 72225. Divisons 722254606208 par le nombre 326592000000, obtenu en ajoutant les produits des sixième et cinquième puissances de 6, multipliées respectivement par les deux premiers nombres de la série (α). Le quotient 2 est le second chiffre de la racine. Multiplions ensuite les termes de (α) respectivement par les quantités

$$6^6.2,\quad 6^5.2^2,\quad 6^4.2^3,\quad 6^3.2^4,\quad 6^2.2^5,\quad 6^1.2^6,\quad 6^0.2^7,$$

et ajoutons; il viendra 722254606208, égal au reste : la racine est donc 62.

Les suites analogues à (α) dérivent immédiatement des nombres figurés.

3. Stifel avait seulement fait voir comment les coefficients, dans une puissance, se déduisent, par addition, de ceux de la puissance précédente. Briggs (*Trigonometria britannica*, Gouda, 1633), montra comment on peut les obtenir directement. La rareté de cet ouvrage nous fait penser qu'on verra avec intérêt le texte même de Briggs.

« ... Fiunt omnes hi numeri additione Diagonalium, quorum summa semper locatur in loco inferiore proximo ejusdem columnae cum Diagonali, à margine dextro remotiore.

Numerus quilibet est ad suum Diagonalem, ascendendo versus sinistram; ut Verticalis primi ad marginalem secundi.

Proportionales
- 15. in Columna B.
- 20. in Columna C.
- 3. Verticalis Columnae B.
- 4. Marginalis numeri 20.

ABACUS ΠΑΓΧΡΗΣΤΟΣ.

M	E	D	C	B	A
1	1	1	1	1	1
13	6	5	4	3	2
91	21	15	10	6	3
455	56	35	20	10	4
1820	126	70	35	15	5
6188	252	126	56	21	6
18564	462	210	84	28	7
50388	792	330	120	36	8
125970	1287	495	165	45	9
293930	2002	715	220	55	10
646646	3003	1001	286	66	11
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Horum numerorum usus est multiplex : quorum primus esse poterit Inventio numerorum solemnium quibus utimur in *Genesi* vel *Analysi* numerorum figuratorum. Est autem *Genesis* cum dato latere Gnomonum additionem integram potestatem invenire; *Analysis* autem cum data Potestate per eorundem Gnomonum subductionem, latus eiusdem eruere velimus

Hi numeri situ sunt proximi oblique ascendentes versus sinistram, quorum primus et postremus ostendunt distantiam Unitatis ab illa Potestate. cui inserviunt. Ut. 2. Quadrato; 3, 3 Cubo; 4, 6. 4. Biquadrato; 5, 10, 10. 5 Solido vel potestati quintae, etc.

4 La démonstration de la formule, pour le cas d'une puissance entière a été donnée, pour la première fois, par Pascal. Elle est assez connue, ainsi que la méthode de déduction de proche en proche qu'il a imaginée dans ce but. pour qu'il soit inutile de s'y arrêter. La première démonstration directe, par l'examen du développement du produit $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots$ a été donnée par Clairault

Newton a trouvé par induction que la formule de Briggs s'étend, sous certaines conditions, au cas d'une puissance fractionnaire ou négative : la démonstration a été donné par Euler, perfectionnée par Cauchy et étendue aux nombres complexes par Abel.

×5. *Quelques grands nombres.* 1° On a : $2^{64} = 18446744073709551616$,

nombre de vingt chiffres. En général, la n^e puissance de 2 a environ $\frac{1}{2}n$ chiffres.

2° Le produit des trente premiers entiers est

265252859812191058636308480000000.

Le produit des 10^n premiers nombres a environ $n.10^n$ chiffres.

3° D'après Legendre, la plus petite valeur entière de x satisfaisant à la relation $x^2 = 991y^2 + 1$, est 379516400906811930638014896080.

4° D'après Jacques Bernoulli, la somme des cinquièmes puissances des mille premiers nombres entiers est

91409924241424243424241924242500.

5° Le plus petit nombre ayant cent un diviseurs est

126765060022823940196703205376 (*).

6° La période décimale résultant de la division de $\frac{1}{n}$ est formée de $n-1$ chiffres pour $n = 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223, 229, 233, 257, 263, 269, 313, 337, 367, 379, 383, 389, 419, 433, 461, 487, 491, 499, 503, 509, 541, 571, 577, 593, 619. 647, 659, 701, 709, 727, 743, 811, 821, 823, 857, 863, 887, 937, 941, 953, 971, 977, 983, ...$

La période correspondant à $n = 347$ est 0028818443 8040345821 3256484149 8559077809 7982708933 7175792507 2046109510 0864553314 1210374639 7694524495 6772334293 9481268011 5273775216 1383285302 5936599423 6311239193 0835734870 317.

Gauss a calculé les périodes pour tous les nombres premiers et leurs puissances, jusqu'à 1000. L'utilité de cette théorie réside dans la possibilité qu'elle offre de remplacer la division par un grand nombre $abc...$ par une expression de la forme $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots$.

7° Considérons la suite 2, 4, 16, 256, ... dont chacun est le carré du précédent. Le vingt-cinquième terme a 5050446 chiffres, dont les premiers sont 181858... (Euler).

(*) D'après Schooten (*Exercitationum math. libri quinque*, Leyde 1657), qui donne la liste des plus petits nombres ayant 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... diviseurs, lesquels sont : 2, 4, 6, 16, 12, 64, 24, 36, 48, 1024, 60, 4096, 192, 144, 120, 65536, 180, 262144, 240, 576, 3072, 4194304, 360, 1296, 12288, 900, 960, 268435456, 720, 1073741824, ...

8° Le produit des cent mille premiers entiers a 456572 chiffres, dont les premiers sont 282423... (Fedor Thoman.)

9° Le plus grand nombre qu'on puisse écrire avec trois chiffres, lequel est 9^{9^9}, a 369693100 chiffres, qui commencent ainsi : 428124773175747 ... En admettant, pour chaque chiffre une largeur de $0^m,0025$, l'écriture de ce nombre demanderait une longueur de plus de 924^{Km}. (Fedor Thoman.)

10° Ed. Lucas a considéré, dans ses recherches sur la divisibilité des nombres de la forme $a^n \pm 1$, la série 6, 34, 1154, 1331714, ... dont chaque terme est égal au carré du précédent diminué de 2. Le produit des $2^{26}+1$ premiers termes a plus de 5.10^{18} chiffres, et, à raison de dix chiffres par seconde, il faudrait pour l'écrire, deux cent millions de siècles.

INVOLUTION ET ÉVOLUTION,

par J. Neuberg.

1. La question 1518 (voir *Mathesis*, (3) VI, p. 73) a pour proposition corrélative :

On donne deux triangles quelconques ABC, A'B'C' *dans deux plans différents* π, π'. 1° *Si les plans* A'BC, B'CA, C'AB *rencontrent* π' *au même point* D, *les plans* AB'C', BC'A', CA'B' *se rencontrent en un point* D' *de* π. 2° *Si les plans* A'BC, B'CA, C'AB *coupent* B'C', C'A', A'B' *en trois points collinéaires* X', Y', Z', *les plans* AB'C', BC'A', CA'B' *rencontrent* BC, CA, AB *en trois points collinéaires* X, Y, Z.

Bien que ce double théorème découle du principe de dualité, nous croyons utile d'en indiquer ici, à titre d'exercice, la démonstration directe.

2. Soient F, G, H, F', G', H' les points de rencontre des droites BC, CA, AB, B'C', C'A', A'B' avec la ligne d'intersection u des plans π, π'. Les traces des plans A'BC, B'CA, C'AB sur le plan π' sont les droites A'F, B'G, C'H ; nous supposons d'abord qu'elles concourent en un même point D. Alors les couples FF', GG', HH' appartiennent à une même involution comme intersections des couples de côtés opposés du quadrangle complet A'B'C'D par une sécante u. Réciproquement, les côtés du triangle ABC passant par trois points F, G, H, de cette invo-

lution, les droites AF', BG', CH' doivent passer par un même point D'.

Les deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D', d'après la construction précédente, sont chacun inscrit à l'autre; on les appelle tétraèdres de Möbius, d'après le géomètre qui les a signalés pour la première fois.

3. Si l'on rabat le plan π' autour de u sur π, on a dans un même plan, deux triangles ABC, A'B'C' dont les côtés rencontrent une transversale u en six points F, G, H, F', G', H' tels que les droites A'F, B'G, C'H concourent en un même point D. Cette propriété a pour conséquence que les droites AF', BG', CH' concourent en un second point D'. Les quadrangles ABCD', A'B'C'D sont donc tels que les côtés opposés AB et C'D, AC et B'D, ... concourent sur une même droite; pour cette raison, nous avons proposé de dire qu'ils sont *paralogiques* (*Mathesis*, 1902, p. 153.)

Si l'on suppose u à l'infini, on retrouve la propriété des *triangles métaparallèles*.

4. Passons à la démonstration du second théorème du § 1. Par hypothèse, les droites A'F, B'G, C'H rencontrent B'C', C'A', A'B' en trois points collinéaires X', Y', Z'. Soient E le point d'intersection des droites B'Y', C'Z' et F_1 le point de rencontre de la droite A'E avec u; d'après un théorème connu, le faisceau A'(B'C'X'E) est harmonique, d'où $(H'G'FF_1) = -1$. Si l'on considère le quadrangle complet A'B'C'E coupé par la transversale, on voit que les couples $F'F_1$, GG', HH' sont en involution et, par suite,

$$(GHF'H') = (G'H'F_1H), \quad \text{ou} \quad \frac{F'G}{F'H} : \frac{H'G}{H'H} = \frac{F_1G'}{F_1H'} : \frac{HG'}{HH'}. \qquad (a)$$

Si F_1' est le conjugué harmonique de F' par rapport à GH, on a

$$\frac{F'G}{F'H} = -\frac{F_1'G}{F_1'H}, \quad \frac{F_1G'}{F_1H'} = -\frac{FG'}{FH'}.$$

L'égalité (*a*) peut donc s'écrire

$$\frac{F_1'G}{F_1'H} : \frac{H'G}{H'H} = \frac{FG'}{FH'} : \frac{HG'}{HH'} \quad \text{ou} \quad (GHF_1'H') = (G'H'FH).$$

Par suite, les couples FF_1', GG', HH' sont en involution, et les droites AF_1', BG_1', CH' concourent en un même point E'. Comme AF_1' et AF rencontrent BC en deux points conjugués harmoniques par rapport à B et C, les trois points X, Y, Z sont en ligne droite.

Les deux triples de points FGH, F'G'H' jouissent de la propriété de donner lieu à une involution quand on remplace un élément d'un triple par son conjugué harmonique par rapport aux éléments non homologues de l'autre triple; on peut dire qu'ils sont en *évolution*.

5. Le lecteur voit immédiatement quel théorème on obtient en rabattant les plans π, π' l'un sur l'autre autour de u.

Si l'on prend pour u la droite de l'infini, on obtient le théorème suivant qui nous a été communiqué par M. Abramescu :

Etant donnés dans un même plan deux triangles ABC, A'B'C', *si les parallèles menées par* A, B, C *aux droites* B'C', C'A', A'B' *rencontrent* BC, CA, AB *en trois points collineaires, les parallèles menées par les sommets du second triangle aux côtés correspondants du premier triangle rencontrent également les côtés opposés du second triangle en trois points collinéaires.*

NOTES MATHÉMATIQUES.

5. *Sur un minimum.* Un correspondant nous adresse le problème suivant :

Par un point M *donné à l'intérieur d'un angle xCy, mener une sécante telle que le segment* AB *intercepté par l'angle soit minimum.*

Cette question se rencontre déjà dans les *Opuscules de Newton*, t. I, p. 87; elle se résout très simplement au moyen des considérations suivantes.

Si la sécante minimum AB se meut entre les côtés de l'angle xCy en gardant la même longueur, le centre instantané de rotation I se trouve à la rencontre des perpendiculaires élevées en A sur Cx et en B sur Cy, et le point de contact de AB avec son enveloppe coïncide avec la projection de I sur AB. Or, lorsque la sécante minimum AB tourne infiniment peu autour de M, on peut la considérer comme gardant la même longueur. On conclut de là que la sécante cherchée AB est telle que *les perpendiculaires élevées en* A *sur* Cx, *en* B *sur* Cy, *en* M *sur* AB *concourent en un même point* I.

Pour un raisonnement élémentaire, voir Casey, *A Sequel to Euclid*, p. 39.

CI est un diamètre de la circonférence circonscrite au triangle CAB;

par suite les projections C′, M de ses extrémités sur AB sont équidistantes du milieu de AB. Par conséquent, le point M est l'isotomique du pied C′ de la hauteur CC′ du triangle ABC.

Pour traiter la question par le calcul, posons $CA = x$, $CB = y$, $AB = c$ et désignons par α, β les coordonnées du point M par rapport aux axes Cx, Cy. Nous aurons

$$c^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos C, \quad \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} = 1;$$

d'où

$$(x - y\cos C)\,dx + (y - x\cos C)\,dy = 0,$$

$$\frac{\alpha}{x^2}\,dx + \frac{\beta}{y^2}\,dy = 0,$$

L'élimination des différentielles par la méthode des multiplicateurs indéterminés donne

$$x - y\cos C = \lambda\frac{\alpha}{x^2}, \quad y - x\cos C = \lambda\frac{\beta}{y^2};$$

en ajoutant ces égalités multipliées respectivement par x et y, on trouve $c^2 = \lambda$. Divisons les mêmes égalités membre à membre; il vient

$$\frac{x - y\cos C}{y - x\cos C} = \frac{\alpha y^2}{\beta x^2}. \qquad (1)$$

Menons les hauteurs AA′, BB′, CC′ du triangle ABC; on voit facilement que

$$x - y\cos C = AB', \quad y - x\cos C = BA',$$

$$\text{surface BCM} = \tfrac{1}{2}\alpha y\sin C, \quad \text{surface ACM} = \tfrac{1}{2}\beta x\sin C;$$

par conséquent, l'égalité (1) se réduit à

$$\frac{AB'.x}{BA'.y} = \frac{BM}{MA}.$$

Mais $AB'.x = AC'.c$, $BA'.y = BC'.c$; d'où enfin

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BM}{MA}.$$

Plus généralement, soit à mener à une courbe donnée γ une sécante dont le segment AB compris entre deux autres courbes données α et β soit minimum. Les normales à α, β, γ en A, B et au point de contact de γ doivent concourir en un même point. (J. N.)

6. *Sur les maxima et les minima.* Pour obtenir des fractions de la forme

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},$$

qui admettent un maximum et un minimum pour des valeurs rationnelles de x, on peut d'abord observer que d'après les théories du calcul différentiel l'expression

$$\varphi(x)\equiv\frac{m^2}{x-\mu}-\frac{n^2}{x^2-\nu}$$

devient maximum ou minimum pour les racines de l'équation

$$\frac{m^2}{(x-\mu)^2}=\frac{n^2}{(x-\nu)^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{x-\mu}=\pm\frac{n}{x-\nu};$$

ces racines sont rationnelles lorsque m, n, μ, ν sont des nombres rationnels.

Un premier exemple de cette espèce en donne d'autres lorsqu'on ajoute une constante, que l'on prenne ensuite l'inverse; c'est-à-dire $\varphi(x)+k$, $\dfrac{1}{\varphi(x)+k}$.

Plus généralement, des valeurs rationnelles de x qui rendent maximum ou minimum la quantité $\dfrac{F(x)}{f(x)}$, rendent également maximum ou minimum la quantité $\dfrac{pF(x)+qf(x)}{rF(x)+sf(x)}$, si le déterminant $ps-qr$ est différent de zéro; car la dérivée de la dernière expression est égale à

$$\frac{(Ff'-F'f)(rq-ps)}{(rF+sf)^2}.$$

(J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

La Géométrie analytique générale, par H. Laurent. Paris, Hermann, 1906 (Grand in-8 de VII-151 pp.). Prix : 6 francs.

Cet ouvrage étend à l'espace à n dimensions les définitions et les problèmes fondamentaux de la géométrie classique. Cette généralisation, théoriquement assez aisée, offre des difficultés de calcul où l'auteur trouve occasion de manifester son esprit de méthode et son originalité. Il donne deux formes nouvelles d'une théorie de l'élimination. Il démontre et généralise un théorème que

Chasles croyait inaccessible à l'analyse, et dont Liouville avait donné une première démonstration.

Dans l'introduction, dans le chapitre IV, intitulé *Incursion dans le domaine concret*, l'auteur fixe son point de vue relativement aux rapports de la géométrie théorique avec l'espace réel : la géométrie ne doit pas prendre son point de départ dans une idéalisation de l'espace sensible. Elle est une hypothèse qu'on applique. « Je ne pose aucun axiome, je n'ai pas besoin d'axiomes, je ne fais que des hypothèses et j'examine à la fois les conséquences de mes hypothèses et des hypothèses contraires. »

La géométrie sera donc édifiée sans appel à l'expérience : ce sera une branche de la théorie des nombres. Dans un système de géométrie à n variables, un point est un ensemble de n nombres $x_1 x_2 \ldots x_n$, appelées coordonnées du point. Si les coordonnées d'un point sont toutes fonctions d'un paramètre arbitraire, l'ensemble de ces points constitue une ligne, etc... Les dénominations points, lignes, plans, droites, espaces sont donc dénuées de toute signification spatiale; elles n'ont autre but que de faciliter les énoncés. Une substitution effectuée sur les coordonnées des points d'un ensemble s'appelle un déplacement. Si cette substitution est une transformation orthogonale, les distances (notion généralisée) et les angles sont des invariants : on dit que le déplacement s'est effectué sans changement de volume.

On peut appliquer à l'espace réel le système de géométrie développé sur ces données purement rationnelles; il suffit de faire les deux hypothèses suivantes : la position d'un point de l'espace peut être fixée au moyen de trois coordonnées ; tout déplacement d'un corps correspond à une substitution orthogonale effectuée sur les coordonnées de ses points. Moyennant ces deux hypothèses, la géométrie générale devient la géométrie d'Euclide, et les mots qu'elle emploie prennent la signification concrète que nous leur connaissons.

Une remarque importante se rapporte à la première hypothèse. Concevons dans l'espace un système de surfaces quelconques, ne se coupant pas, et tel que par chaque point passe une de ces surfaces; numérotons-les en employant les nombres de l'ensemble continu $-\infty$, $+\infty$. Supposons encore deux autres systèmes analogues. Les numéros des trois surfaces qui se coupent en un point seront les coordonnées de ce point. « Le plan étant une surface du premier degré, sa définition est celle d'une surface presque quelconque, puisque les plans $x_1 =$ constante, $x_2 =$ constante, $x_3 =$ constante sont les surfaces arbitraires simplement assujetties à ne pas se couper dans une même série. Il en résulte que la géométrie classique peut s'établir en appelant plan, cette surface presque arbitraire, et droite une ligne presque arbitraire aussi. » Ces propositions sont rigoureusement vraies, si on les applique à la géométrie euclidienne classique où ni la notion de distance ni celle d'angle ne sont définies. Nous éprouverions quelques difficultés à les appliquer à nos perceptions spatiales où les notions de distance et d'angle sont des réalités, sinon définies, au moins nullement arbitraires.

La seconde hypothèse, celle qui identifie le déplacement d'un corps avec une transformation orthogonale de coordonnées, conduit aux formules euclidiennes. D'autres modes de substitution sont possibles : ils donneront naissance à autant de néogéométries différentes. (F. W.)

1 **Leçons de Mécanique élémentaire à l'usage des Classes mathématiques A et B, conformément aux programmes du 31 mai 1902, par P. Appell, membre de l'Institut et J. Chappuis, Professeur à l'Ecole centrale. Paris, Gauthier Villars, 1905** (In 12 de 306 pp. avec 103 figures). **Prix : 4 fr.**

2. **Cours de Mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales, conforme au programme du 27 juillet 1901, par Paul Appell, membre de l'Institut. Deuxième édition, entièrement refondue. Paris, Gauthier Villars, 1905** (In 8 de 495 pp. avec 186 fig.). **Prix : 12 fr.**

M. Appell, comme l'on sait, a publié un *Traité de mécanique rationnelle*, le plus complet qui existe (Tomes I, II en seconde édition, 1902, 1904; tome III, 1902) et il est une des plus hautes autorités en la matière.

Il a écrit avec M. Chappuis pour la classe de Première des sections C (latin-sciences) D (sciences-langues vivantes) des lycées français, des Leçons de mécanique élémentaire que nous avons fait connaître à nos lecteurs en reproduisant la préface et les paragraphes les plus importants sur la relativité essentielle du mouvement (*Mathesis*, 1903, pp. 113-116).

Le premier des deux ouvrages que nous annonçons est la suite et le complément de ce manuel élémentaire, et il est écrit dans le même esprit, c'est-à-dire que rigoureux au point de vue des principes, il contient des applications plus pratiques que les anciens traités de mécanique. Il est destiné aux classes de mathématiques venant après la Première dans les sections des lycées français dont il est question plus haut.

Le *Cours de mécanique* est un ouvrage plus élevé destiné aux aspirants à l'Ecole Polytechnique et à Saint Cyr.

Nous n'avons pas qualité pour analyser d'une manière approfondie ces deux ouvrages que d'ailleurs le nom de leurs auteurs recommande suffisamment. Nous nous contenterons d'en indiquer sommairement le contenu.

Leçons de mécanique élémentaire. I. *Cinématique.* 1. Engrenages cylindriques. 2. Systèmes articulés plans. II. *Mécanique.* Forces appliquées à un point matériel. 1. Principes fondamentaux. 2. Equilibre d'un point libre. 3. Equilibre d'un point matériel non libre. III. Statique des corps solides libres. 1. Conditions d'équilibre. 2. Equivalence de deux systèmes de forces appliquées à un corps solide. IV. Equilibre des corps solides non libres. 1. Conditions d'équilibre. 2. Machines simples. V. *Dynamique.* 1. Équation du mouvement d'un point matériel. 2. Travail. 3. Théorème des forces vives. 4. Notions sur les machines.

Cours de mécanique. Introduction sur les vecteurs. I. *Cinématique.* 1. Point : vitesse, accélération, mouvement rapporté à des axes; diagrammes. 2. Mouvements élémentaires d'un corps solide. 3. Changement du système de comparaison. II. *Mécanique.* 4. Point matériel libre. 5. Travail, fonction de forces; force vive; attraction en raison inverse du carré de la distance. 6. Point matériel non libre. III. *Statique.* 7. Théorie des moments. 8. Equilibre d'un point ou d'un système. 9. Statique des corps solides. 10. Machines.

Dans les deux ouvrages, de nombreux exercices se trouvent à la fin de chaque paragraphe ou chapitre.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1488.

(Voir *Mathesis*, (3) IV, p. 216).

ABCDE *étant une pentagone plan convexe, traçons-en les diagonales et appelons* α, β, γ, δ, ε *les aires des triangles* EAB, ABC, BCD, CDE, DEA. *Si* x *est l'aire du pentagone, on a*

(1) $$x^2 - x\Sigma\alpha + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha) = 0.$$ (Möbius)

Soient α', β', γ', δ', ε' *les aires des triangles* ACD, BDE, CEA, DAB, EBC. *Démontrer la formule*

(2) $$x^2 = \Sigma\alpha'^2 \pm 2\Sigma\alpha'\beta';$$

la quantité $\pm\,\Sigma\alpha'\beta'$ *comprend cinq termes positifs et* 5 *termes négatifs, les premiers sont* $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\varepsilon'$, $\varepsilon'\alpha'$. (J. Neuberg)

Nous avons emprunté la première formule au *Calcul barycentrique* (paru en 1827), mais en écrivant à tort $\Sigma\alpha\beta$ pour le dernier terme. Dans l'appendice des *Beobachtungen auf der Leipziger Sternwarte* (1823), Möbius avait proposé le problème de déterminer x en fonction de α, β, γ, δ, ε ou en fonction des aires des quadrilatères BCDE, CDEA, ... que nous représenterons par α'', β'', γ'', δ'', ε''. Les *Astronomische Nachrichten* ont publié, peu après, des solutions de la première partie de ce problème, par Gauss et par Clausen. C'est ce qui a fait attribuer la formule à Gauss; voir, par exemple, les NAM, 1848, où elle est démontrée par P. Serret, et 1856, p. 378.

La démonstration suivante ne diffère pas essentiellement de celle de Möbius (*Œuvres complètes*, t. I, pp. 199 et 389-404).

Lemme. O étant un point quelconque du plan d'un quadrangle plan complet ABCD, on a entre les aires algébriques des triangles OAB, OAC, ... la relation

(3) $$\mathrm{OAB.OCD} + \mathrm{OAC.OBD} + \mathrm{OAD.OBC} = 0,$$

dont l'analogie avec la proposition sur quatre points en ligne droite et avec le théorème sur le quadrilatère inscrit est manifeste.

Monge (*Journal de l'Ecole polytechnique*, XV^e^ cahier, p. 96) l'a conclue d'une identité due à Fontaine; Chasles (*Géom. sup.*, §§ 24 et 30) la déduit de l'identité entre les sinus des angles de quatre droites a, b, c, d issues d'un même point :

$$\sin(a, b)\sin(c, d) + \sin(a, c)\sin(d, b) + \sin(a, d)\sin(b, c) = 0.$$

La démonstration suivante est peut-être nouvelle par sa forme. Entre trois nombres quelconques b, c, d on a l'identité facile à vérifier

$$b(c-d)+c(d-b)+d(b-c)=0.$$

Remplaçons b, c, d par $b-a$, $c-a$, $d-a$; nous aurons

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(d-b)+(a-d)(b-c)=0.$$

Dans cette nouvelle égalite, remplaçons a, b, c, d par $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \frac{x_4}{y_4}$; il vient

$$(x_1y_2-x_2y_1)(x_3y_4-x_4y_3)+(x_1y_3-x_3y_1)(x_4y_2-x_2y_4)+\dots=0.$$

Si (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... sont les coordonnées des points A, B, C, D par rapport à deux axes rectangulaires menés par O, les aires OAB. OCD, ... ont pour expression $\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$, $\frac{1}{2}(x_3y_4-x_4y_3)$, ... Le lemme est donc démontré.

Cela posé, on a les égalités

$$(4)\quad \begin{cases} x=\alpha+\beta'+\gamma, & x=\beta+\gamma'+\delta, \quad x=\gamma+\delta'+\varepsilon, \\ x=\delta+\varepsilon'+\alpha, & x=\varepsilon+\alpha'+\beta. \end{cases}$$

$$(5)\qquad \beta'\gamma'=\alpha\delta+\varepsilon\varepsilon',$$

dont la dernière résulte de l'application du lemme au quadrilatère ABCD et au point E.

Pour démontrer les formules proposées, il suffit d'éliminer entre les égalités (4) et (5) soit les qualités β', γ', ε', soit les quantités α, δ. ε.

La première élimination donne

$$(x-\beta-\delta)(x-\alpha-\gamma)=\alpha\delta+\varepsilon(x-\delta-\alpha),$$

d'où la formule (1).

Le système (4), par l'élimination de β et γ, se réduit à

$$\gamma'+\delta=\varepsilon+\alpha', \quad \delta'+\varepsilon=\alpha+\beta', \quad x=\delta+\varepsilon'+\alpha,$$

équations qu'on pourrait écrire directement. On en conclut

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(x-\varepsilon'+\gamma'+\delta'-\beta'-\alpha'), \quad \delta=\tfrac{1}{2}(x-\varepsilon'+\alpha'+\beta'-\gamma'-\delta'),$$
$$\varepsilon=\tfrac{1}{2}(x-\varepsilon'+\gamma'+\beta'-\alpha'-\delta').$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (5); il vient

$$4\beta'\gamma'=(x-\varepsilon')^2-(\gamma'+\delta'-\beta'-\alpha')^2+2\varepsilon'(x-\varepsilon'+\gamma'+\beta'-\alpha'-\delta'),$$

ou, après réductions, la formule (2).

Remarques. I. Les mêmes formules subsistent pour un pentagone quelconque (convexe, concave ou à périmètre présentant des points doubles), pourvu qu'on applique la règle des signes des aires.

II. Dans l'égalité (1), remplaçant α, β, ... par leurs valeurs $x - \alpha''$, $x - \beta''$, ..., on trouve

$$x^2 - x\Sigma\alpha'' + (\alpha''\beta'' + \beta''\gamma'' + \gamma''\delta'' + \delta''\varepsilon'' + \varepsilon''\alpha'') = 0.$$

III. Posons

$$S_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2, \quad S_1' = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2 + \varepsilon'^2;$$
$$S_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha, \quad S_2' = \alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\delta' = \delta'\varepsilon' + \varepsilon'\alpha'.$$
$$S_3 = \alpha\gamma + \beta\delta + \gamma\varepsilon + \delta\alpha + \varepsilon\beta, \quad S_3' = \alpha'\gamma' + \beta'\delta' + \gamma'\delta' + \delta'\varepsilon' + \varepsilon'\alpha'.$$

S_2 est la somme des produits de deux triangles *consécutifs* de la suite α, β, γ, δ, ε, et S_3 est la somme de produits de deux triangles *alternants* de cette suite. S_2' et S_3' ont la même signification pour la suite α', β', γ', δ', ε'; on peut aussi dire que S_2' et S_3' ont, par rapport au pentagone ACEBD la même signification que S_3 et S_2 par rapport au pentagone ABCDE.

Les égalités (1) et (2), avec ces notations, prennent la forme

$$(6) \qquad 2x = \Sigma\alpha \pm \sqrt{S_1 + 2S_3 - 2S_2}. \quad x^2 = S_1' + 2S_2' - 2S_3'.$$

Soient x_1, x_2 les deux racines de l'équation (1), et soit y l'aire du pentagone ACEBD; des formules (6) on déduit

$$x_1 + x_2 = \Sigma\alpha, \quad x_1 - x_2 = y.$$

IV. La connaissance des aires α, β, γ, δ, ε ne suffit pas pour construire le pentagone ABCDE, mais on en déduit x et par suite aussi α', β', γ', δ', ε'. Comme Möbius l'a observé, on peut prendre arbitrairement la *forme* du triangle EAB d'aire α; alors puisque les aires δ', β' des triangles DAB, BDE sont connues, on peut déterminer les distances du point D aux droites AB, BC. ce qui permet de construire le point D. Un procédé analogue sert à construire le point C. (J. Neuberg)

Question 1511.

(Voir *Mathesis* (3), V, p. 83).

Soient M *et* M' *les extrémités de deux diamètres conjugués* OM, OM' *d'une ellipse donnée et soit* P *la projection de* M' *sur la tangente en* M. *Le point* P *décrit une ovale du 4e degré dont l'aire est* $\frac{1}{2}\pi(a+b)^2$. *On suppose que les points* M *et* M' *parcourent simultanément l'ellipse d'un mouvement continu.* (E. N. Barisien)

Solution par J. Rose. Soient ($a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$) les coordonnées du point M; celles du point M′ seront ($a\sin\varphi$, $-b\cos\varphi$). Par conséquent, les équations de la tangente MP et de la droite M′P sont :

$$ay\sin\varphi + bx\cos\varphi = ab$$
$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

L'élimination de φ entre ces deux équations donne le lieu du point P; c'est une courbe du 4e degré dont les équations paramétriques sont :

$$x = a\sin\varphi + \frac{ab^2\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$$

$$y = -b\cos\varphi + \frac{a^2b\sin\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Soit R la projection du centre O sur la normale en M. L'aire U du lieu de P est égale à l'aire E de l'ellipse augmentée de l'aire engendrée par la tangente MP. Cette dernière elle-même (*Mathesis*, 1896. p. 116) est égale à l'aire engendrée par un rayon OS équipollent à MP ou puisque $PM = RM' = OR + OM'$, égale à l'aire de la podaire centrale de la développée de l'ellipse augmentée de l'aire de l'ellipse. La première vaut $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2) - \pi ab$. Donc

$$U = \pi ab + \frac{\pi}{2}(a^2+b^2) - \pi ab + \pi ab = \frac{\pi}{2}(a+b)^2.$$

Question 1513.

(Voir *Mathesis*, (3). VI, p. 83).

ABCD *étant un tétraèdre quelconque, si un point* M *est tel que les plans* MAB *et* MCD *sont perpendiculaires, ainsi que les plans* MAC *et* MBD, *les plans* MAD *et* MBD *seront également perpendiculaires. Trouver le lieu géométrique du point* M. (J. Neuberg)

Solution par M. Absolonne. La perpendiculaire ME au plan AMB est dans le plan MCD; soit E est le point où elle rencontre CD.

De même, appelons MF la perpendiculaire au plan AMC, rencontrant BD en F. Le plan EMF est perpendiculaire à AM et coupe le plan MBC suivant la droite MG.

Or, les cercles décrits sur les diagonales du quadrilatère complet EFBC comme diamètres passent par deux mêmes points, ils appartiennent donc à des sphères ayant les mêmes centres respectifs et

se coupant suivant un cercle unique. Le point M est sur ce cercle puisque les angles BME, CMF sont droits, l'angle DMG l'est donc également et MG étant perpendiculaire à MD et à AM, l'est au plan AMD. Les plans AMD et MBC sont donc perpendiculaires.

Les plans tels que ABM, CDM font partie de deux faisceaux homographiques ayant pour axes AB, CD et les intersections de ces plans engendrent un hyperboloïde. Il en est de même des faisceaux de plans ayant pour axes AC, BD et de ceux qui ont pour axes AD, BC. Les trois hyperboloïdes ont une intersection commune qui est le lieu du point M ; c'est une courbe passant par les sommets du tétraèdre et par les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets sur les faces opposées.

En chaque point du lieu, les plans tangents aux trois hyperboloïdes se coupent suivant une même droite qui est la tangente à la courbe, et aux sommets du tétraèdre, ces tangentes sont les intersections des plans menés par les arêtes de chaque trièdre perpendiculairement aux faces opposées.

Question 1566.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 112).

Calculer les coordonnées du point double de la quartique dont les équations paramétriques sont

$$x = A\cos\varphi + B\cos^2\varphi, \quad y = C\sin\varphi + D\sin^2\varphi. \qquad (1)$$

(E. N. Barisien)

M. Barisien a publié une étude intéressante de cette courbe dans l'Annuaire de l'AFAS, Congrès de Grenoble, 1904, mais sans traiter la question 1566 dans le cas général. Une solution partielle nous a été adressée par M. Abramescu.

Nous aurons égard à ces travaux dans les développements qui vont suivre.

Ecartons immédiatement les hypothèses $A = 0$, $C = 0$ ou $B = 0$, $D = 0$ qui donnent respectivement une droite et une ellipse.

1. Si l'on pose $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$, les équations (1) deviennent

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A(1-t^4) + B(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} \\ y &= \frac{2Ct(1+t^2) + 4Dt^2}{(1+t^2)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les valeurs de t qui correspondent aux points de rencontre de la courbe avec la droite $ux + vy + w = 0$ sont données par l'équation

$$Au(1-t^4) + Bu(1-t^2)^2 + 2Cvt(1+t^2) + 4Dvt^2 + (1+t^2)^2 w = 0,$$

ou

$$P_0 t^4 + P_1 t^3 + P_2 t^2 + P_3 t + P_4 = 0, \tag{3}$$

après avoir posé

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= (B-A)u + w, \quad P_1 = 2Cv, \quad P_2 = -2Bu + 4Dv + 2w, \\ P_3 &= 2Cv, \quad P_4 = (B+A)u + w. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

L'équation (3) étant du quatrième degré, la courbe (1) est du quatrième ordre.

Appelons t_1, t_2, t_3, t_4 les quatre racines; deux d'entre elles déterminent évidemment les deux autres. Autrement dit, il existe entre elles deux relations indépendantes de u, v, w.

De la relation $P_1 = P_3$ on conclut

$$\Sigma t_1 = \Sigma t_1 t_2 t_3; \tag{5}$$

si l'on désigne par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les valeurs de φ qui correspondent aux quatre points d'intersection d'une droite avec la quartique (1), l'égalité (5) exprime que $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2k\pi$.

En éliminant u, v, w entre les relations (4), on trouve encore

$$C(A+2B)P_0 + 2ADP_1 - ACP_2 + C(A-2B)P_4 = 0,$$

d'où la seconde relation entre t_1, t_2, t_3, t_4 :

$$C(A+2B) - 2AD\Sigma t_1 - AC\Sigma t_1 t_2 + C(A-2B)t_1 t_2 t_3 t_4 = 0. \tag{6}$$

2 Pour obtenir un point double, on doit chercher deux valeurs φ, φ_1 de l'angle paramétrique qui diffèrent d'un multiple de 2π et qui donnent les mêmes valeurs de x et de y. Ces valeurs vérifient donc les équations

$$\begin{aligned} A\cos\varphi + B\cos^2\varphi &= A\cos\varphi_1 + B\cos^2\varphi_1, \\ C\sin\varphi + D\sin^2\varphi &= C\sin\varphi_1 + D\sin^2\varphi_1; \end{aligned}$$

en écartant les facteurs $\cos\varphi - \cos\varphi_1$, $\sin\varphi - \sin\varphi_1$ et en posant pour abréger l'écriture, $\frac{A}{B} = \alpha$, $\frac{C}{D} = \beta$, on trouve

$$\cos\varphi + \cos\varphi_1 + \alpha = 0, \quad \sin\varphi + \sin\varphi_1 + \beta = 0,$$

d'où l'on conclut

$$(\cos\varphi + \alpha)^2 + (\sin\varphi + \beta)^2 = 1,$$

ou $$\cos^2\varphi + \alpha\cos\varphi + \frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} = 0; \qquad (7)$$

par analogie, $$\sin^2\varphi + \beta\sin\varphi + \frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = 0. \qquad (8)$$

Par conséquent, le point double a pour coordonnées

$$x = B(\alpha\cos\varphi + \cos^2\varphi) = B\left[\frac{B^2C^2}{A^2D^2+B^2C^2} - \frac{A^2D^2+B^2C^2}{4B^2D^2}\right], \qquad (9)$$

$$y = D(\beta\sin\varphi + \sin^2\varphi) = D\left[\frac{A^2D^2}{A^2D^2+B^2C^2} - \frac{A^2D^2+B^2C^2}{4B^2D^2}\right]. \qquad (10)$$

Des équations (7) et (8), on déduit encore

$$\cos\varphi = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{4-\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{\beta}{2} \mp \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{4-\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}.$$

4. On pourrait aussi déterminer les valeurs t_1 et t_2 de t qui correspondent au point double en résolvant le système

$$\frac{A(1-t_1^4)+B(1-t_1^2)^2}{A(1-t_2^4)+B(1-t_2^2)^2} = \frac{(1+t_1^2)^2}{(1+t_2^2)^2} = \frac{Ct_1(1+t_1^2)+2Dt_1^2}{Ct_2(1+t_2^2)+2Dt_2^2},$$

après l'avoir débarassé de la solution $t_1 = t_2$ en retranchant chaque conséquent de son antécédent.

Nous développons ici une méthode indiquée par M. Abramescu, mais en faisant tous les calculs nécessaires.

Quand on donne les valeurs t_1 et t_2 du paramètre t qui définissent deux points M_1, M_2 de la quartique, les équations (5) et (6) déterminent les valeurs t_3 et t_4 qui conviennent aux deux autres points de rencontre M_3, M_4 de la quartique avec la sécante M_1M_2. Ces équations deviennent donc indéterminées quand t_1 et t_2 définissent un seul et même point de la courbe, c'est-à-dire un point double. Or, si l'on pose

$$t_1 + t_2 = s, \quad t_1t_2 = p, \quad t_3 + t_4 = s', \quad t_3t_4 = p',$$

les relations (5) et (6) prennent la forme

$$s + s' = sp' + s'p. \qquad (11)$$

$$C(A+2B) - 2AD(s+s') - AC(p+p'+ss') + C(A-2B)pp' = 0.$$

Ordonnons-les par rapport à s' et p'; il vient

$$(1-p)s' - sp' + s = 0$$

$$-A(2D+Cs)s' + C[(A-2B)p - A]p' + C(A+2B) - 2ADs - ACp = 0.$$

En écrivant que les coefficients sont proportionnels, on obtient deux équations qui déterminent s et p, et par suite t_1 et t_2 :

$$C(1-p)[(A-2B)p-A] = As(2D+Cs), \quad (12)$$

$$C[(A-2B)p-A] = 2ADs + ACp - C(A+2B). \quad (13)$$

La dernière se réduit à

$$BC(1-p) = ADs, \ (14) \quad \text{ou} \quad \frac{s}{1-p} = \frac{BC}{AD};$$

on en conclut pour les valeurs φ_1 et φ_2 de φ au point double cette formule remarquable

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{BC}{AD},$$

et aussi, en s'appuyant sur la formule (11), pour les angles φ_3, φ_4 qui se rapportent aux deux autres points d'intersection de la quartique avec toute sécante menée par le point double :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_4) = -\frac{BC}{AD}.$$

Si l'on divise membre à membre (12) par (13), on trouve

$$D(A-2B)p - BCs = D(2B+A). \quad (15)$$

Ensuite, de (13) et (14) on déduit

$$p = \frac{A^2D^2+B^2C^2+2ABD^2}{A^2D^2+B^2C^2-2ABD^2}, \quad s = -\frac{4B^2CD}{A^2D^2+B^2C^2-2ABD^2}.$$

Il est maintenant facile de former l'équation du second degré qui donne t_1 et t_2.

Pour terminer, nous indiquons quelques cas particuliers examinés par M. Barisien.

a. Les formules

$$x = B\cos^2\varphi, \quad y = C\sin\varphi + D\sin^2\varphi$$

représentent une parabole.

b. Aux formules

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi + \sin^2\varphi,$$

ou à l'équation

$$(x^2+y-1)^2 + x^2 - 1 = 0$$

correspond une courbe symétrique par rapport à l'axe Oy, tangente à l'axe Ox en O et à la droite $y = -\frac{1}{4}$ aux points $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$; l'aire de

cette courbe $= \pi$; deux points d'inflexion ont pour coordonnées

$$x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

c. Aux formules

$$x = \cos\varphi + \cos^2\varphi, \quad y = \sin\varphi + \sin^2\varphi$$

ou à l'équation

$$(x+y)^4 - 2(x+y)^3 - 4xy = 0$$

correspond une courbe formée de deux boucles dont l'origine est le point double.

d. Les équations

$$x = \sqrt{2}\cos\varphi + \cos^2\varphi, \quad y = \sqrt{2}\sin\varphi + \sin^2\varphi$$

définissent une quartique piriforme dont la *pointe* a pour coordonnés $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

e. Les formules

$$x = \cos\varphi + \sqrt{2}\cos^2\varphi, \quad y = \sin\varphi + \sqrt{2}\sin^2\varphi$$

se rapportent à une courbe formée de deux boucles dont le point double a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

f. Si l'on suppose

$$x = 2\cos\varphi + \cos^2\varphi, \quad y = 2\sin\varphi + \sin^2\varphi,$$

on trouve une courbe fermée, ayant pour point isolé le point $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$. L'équation cartésienne est

$$(x+y+1)^4 - 64(x+1)(y+1) = 0. \qquad \text{(J. N.)}$$

Question 1591.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 225).

Un triangle isoscèle variable ABC *a sa base* BC *fixe. Montrer que :* 1° *le lieu des points de contact des cercles tritangents à* ABC *avec le côté* AB *se compose d'un cercle et d'une conchoïde de Nicomède;* 2° *le lieu des pieds des bissectrices situés sur* AB *est une hyperbole.*

(E. N. Barisien)

Solution par M. V. Retali. Appelant 1, 2, 3, 4 les points de contact et M le milieu de AB; la figure donne immédiatement

$$1B = B3 = 2A = A4 = \frac{BC}{2};$$

le lieu des points 1, 3 est donc le cercle $(B, \frac{1}{2}a)$. Le lieu des points 2, 4 est la conchoïde de Nicomède cuspidale dont AM est l'asymptote et B le rebroussement.

2° Les pieds A_1, A_2 des bissectrices issues de B sont alignés avec le pôle fixe B, conjugués par rapport au cercle-point C et séparés harmoniquement par B et le point variable A de la droite AM; le lieu cherché est donc (*) une hyperbole H^2 normale à BC en un point C, qu'on construit aisément.

En effet, comme B est le pôle de AM par rapport à H^2, si l'on prend $CD = \frac{2a}{3}$, D est un point du lieu et CD est l'axe transverse; en outre, les asymptotes étant parallèles aux droites qui joignent B aux points où AM est coupée par le cercle (C, CB), font un angle de 120°.

Autrement. Prenant B pour origine des coordonnées rectangulaires et BC pour axe des abscisses, les formules qui donnent les coordonnées X, Y du point A en fonction de celles des pieds A_1, A_2 des bissectrices, sont

$$X : Y : 1 = 2ax(x-a) : 2ay(x-a) : x^2+y^2-a^2. \qquad (a)$$

A la droite $2X = a$, correspond donc l'hyperbole

$$4x(x-a) = x^2+y^2-a^2.$$

Les formules (*a*) résolvent la question générale suivante : *Le sommet* A *d'un triangle* ABC *dont la base* BC *est fixe, décrit une courbe quelconque du plan* ABC; *déterminer le lieu des pieds des bissectrices situés sur* AB, *ou* AC.

MM. Rose, Lez, Majorin, Abramescu, Dupont et E. Seam résolvent de la même façon la première partie du problème. MM. Rose et Dupont traitent la seconde en prenant pour coordonnées du point A_1 l'angle $CBA = \omega$ et le rayon vecteur $BA_1 = \rho$; la proportion $BA_1 : A_1A = BC : AC$ donne

$$\rho = \frac{a}{1+2\cos\omega},$$

équation qui convient également au point A_2. MM. Majorin et Abramescu prenant pour axes la base BC et une perpendiculaire en C éliminent l'angle $CAB = \varphi$ entre les équations

$$(y^2-x^2)\operatorname{tg}\varphi + 2xy = 0, \qquad y + (x+2a)\operatorname{tg}\varphi = 0,$$

(*) Cfr. Retali, *Sur le double contact etc.*, § 1 (Mém. de la Société r. d. s. de Liége, 2e série, t. XVIII).

qui représentent respectivement les deux bissectrices de l'angle C et le côté BA. M. E. Seam et Lez prennent pour axes la base BC et la hauteur AH. M. Agronomof adopte les mêmes axes BC. AH et traite très-simplement par le calcul les deux parties de la question. MM. Terracini (Turin) et Brignon (au Harcholet) trouvent la conchoïde et l'hyperbole par le calcul, le premier en coordonnées rectangulaires, le second en coordonnées polaires.

Question 1597.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 280).

On donne deux plans α, β *et un point* P. *Une sécante quelconque menée par* P *rencontre* α *en* A, β *en* B. *Sur la droite* AB *on marque le point* M *symétrique de* P *par rapport au milieu* Q *de la droite* AB. *Trouver le lieu géométrique du point* M. (J. Neuberg)

Solution par M. V. Retali. Considérons une surface du deuxième ordre Σ, un pôle fixe P et un plan γ : si l'on prend sur une droite arbitraire g, issue du point P, le point Q conjugué harmonique du point $(g\gamma)$ par rapport aux intersections de g avec Σ, le lieu de ce point Q est une surface du deuxième ordre Γ qui passe par P, par la conique γ^2 suivant laquelle Σ est coupée par γ, par le pôle du plan γ par rapport à Σ et enfin par la conique intersection de Σ avec le plan polaire de P par rapport à Σ. Ceci est aussi évident, si l'on remarque que Γ est la transformée du plan γ par l'inversion de Hirst ayant P pour pôle et Σ pour quadrique double. Cela posé, si γ est le plan à l'infini et si Σ dégénère en un couple de plans $\alpha\beta$, on voit que le lieu du milieu Q de la droite AB est un cylindre hyperbolique passant par P, ayant ses génératrices rectilignes parallèles à la droite $l \equiv (\alpha, \beta)$, et ses plans asymptotiques parallèles aux plans donnés α, β ; le plan Pl est un plan diamétral et, comme le plan tangent le long de la génératrice l est le plan polaire de P par rapport à l'angle dièdre $\alpha\beta$, le cylindre Γ est parfaitement déterminé. Le lieu cherché est donc le cylindre symétrique de Γ par rapport au point P.

Autrement. Dans un plan arbitraire π mené par P et parallèle à la droite $\alpha\beta \equiv l$, le lieu de Q est formé par la droite p, menée par P parallèlement à l, et par la droite qui bissecte la bande comprise entre les droites parallèles $|\alpha\pi|$, $|\beta\pi|$; le lieu de Q est donc un cylindre passant par les droites p et l. Pour en déterminer la section normale, j'observe que dans le plan λ, mené par P et perpendiculaire

[illegible] dont le centre est le milieu d'un [illegible] ont une asymptote [illegible] les asymptotes sont parallèles [illegible] joint P au point $M \equiv V$, [illegible] le point V est la polaire de [illegible], et la tangente au point [illegible] [illegible] (a, b) etc.

En prenant P pour origine des coordonnées rectangulaires, la droite [illegible] pour axe des x et le plan Pl pour plan (zx), les équations du cylindre [illegible] symétrique, par rapport à P, sont :

$$(y - mx)(y - m'x) \pm d\left(\frac{m + m'}{2} y - mm'x\right) = 0,$$

[illegible] désigne la distance de P à la droite l, et m, m' les tangentes trigonométriques des angles formés par les plans α, β avec le plan [Pl]. Le [illegible] les perpendiculaires abaissées [illegible] supérieur se rapporte à r.

[illegible] par M. Hacken. Soient a, b, les perpendiculaires abaissées de P sur les plans α, β. Des triangles [illegible] a', b', celles abaissées [illegible] semblables donnent

$$\frac{a}{a'} = \frac{MA}{PA}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{MB}{PB},$$

[illegible] à cause MA = BP, MB = AP :

$$ab = a'b'.$$

Si l'on prend pour plan des xy un plan perpendiculaire à la droite [illegible] est facile de voir [illegible] pour les deux autres plans coordonnées [illegible] perpendiculaires [illegible] que toute section de la surface cherchée par un plan [illegible] la droite x^2 a pour équation

[illegible]

[illegible] étant les coordonnées de P [illegible]

[illegible]

M. Abramescu donne une solution analytique dans laquelle il trouve pour l'équation du lieu $PP' = K^2$, où $P = 0$ et $P' = 0$ sont les équations des plans α et β.

MM. Aenden Boom et Dupont résolvent la question synthétiquement par une méthode se rapprochant beaucoup de la seconde de M. Retali.

×Question 1598.

(Voir *Mathesis* (3), VI, p. 280).

Résoudre les systèmes d'équations

$$\text{I}\begin{cases} x+y=a, \\ (x^2+y^2)^2+b^2(x^2+y^2)=c^6. \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} x+y=a, \\ x^5+y^5+b(x^3+y^3)=c^5. \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} x+y=a, \\ 2(x^7+y^7)-7a(x^6+y^6)=b^7. \end{cases}$$

(E. N. Barisien)

Solution par M. L. Hacken. Quand on donne la somme des inconnues et une relation entre des sommes de puissances semblables des inconnues, on prend comme inconnue auxiliaire le produit $xy = z$.

On a l identité

$$x^n+y^n \equiv (x+y)(x^{n-1}+y^{n-1}) - xy(x^{n-2}+y^{n-2})$$

ou

$$x^n+y^n = a(x^{n-1}+y^{n-1}) - z(x^{n-2}+y^{n-2})$$

qui donne, de proche en proche, les valeurs, en fonction de z, des sommes de puissances semblables de x et y. On trouve

$$x^2+y^2 = a^2-2z, \quad x^3+y^3 = a^3-3az,$$
$$x^4+y^4 = a^4-4a^2z+2z^2, \quad x^5+y^5 = a^5-5a^3z+5az^2,$$
$$x^6+y^6 = a^6-6a^4z+9a^2z^2-2z^3, \quad x^7+y^7 = a^7-7a^5z+14a^3z^2-7az^3.$$

En introduisant ces valeurs dans les secondes équations des systèmes proposés, on obtient respectivement

$$(9a^2+4b^2)z^2-(6a^4+4a^2b^2)z+a^6+a^4b^2-c^6=0,$$
$$(5a+2b)z^2-(5a^3+4a^2b)z+a^5+a^4b-c^5=0,$$
$$35a^3z^2-28a^5z+5a^7+b^7=0.$$

Chacune de ces équations donne deux valeurs pour z.

On aura finalement à résoudre des systèmes de la forme

$$x+y=a, \quad xy=k.$$

x et y sont les racines de l'équation

$$u^2-2au+k=0.$$

De bonnes solutions de la même question par MM. Rose, Hermandez, Plakhovo, Brignon, Abramescu, Verheugen et Agronomof.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1328. La tangente en un point M d'une ellipse rencontre les axes en T et T', la normale en M les rencontre en N et N'. Quels sont les points pour lesquels $TT' = NN'$?

Au point $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, on a

$$TT' = \frac{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}{\sin\varphi\cos\varphi}, \quad NN' = \frac{c^2}{ab}\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi};$$

si $TT' = NN'$, on a

$$\sin 2\varphi = \frac{2ab}{c^2},$$

ce qui exige $b < a(\sqrt{2} - 1)$.

×**1329.** Démontrer que l'on a

$$[(a-b)(a-c)]^2 + [(b-c)(b-a)]^2 + [(c-a)(c-b)]^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)^2$$

On a

$$2\Sigma a^2 - 2\Sigma bc = \Sigma(a^2 + b^2 - 2ab) = \Sigma(a-b)^2;$$

donc en posant

$$a - b = z, \quad b - c = x, \quad c - a = y,$$

on ramène l'égalité proposée successivement à

$$4(z^2y^2 + x^2z^2 + y^2x^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

$$2\Sigma x^2y^2 - \Sigma x^4 = 0,$$

$$(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) = 0.$$

Or, on a $x + y + z = 0$, etc.

×**1330.** Décomposer en ses facteurs premiers le produit des 30 premiers nombres et déterminer le nombre de chiffres de ce produit.

(*Journal de Vuibert*)

On trouve

$$30! = 2^{26} \times 3^{14} \times 5^7 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29.$$

La caractéristique du logarithme de ce produit est 32; donc le produit a 33 chiffres.

×**1331.** On considère une droite sur laquelle on marque deux points A et B. Un point M se déplace de A en B, et l'on construit, du même côté de AB, les triangles équilatéraux AMP, BMQ. 1° Déterminer le point M de manière que PQ ait une longueur donnée l. 2° Etudier la variation de l'aire du triangle PMQ, (*Bacc. Montpellier*, 1906)

Dans le triangle PMQ, l'angle en M est constant et la somme MP + MQ = AB, etc.

×**1332**. Deux droites D et Δ étant données par leurs projections, mener parallèlement à un plan donné P une droite g qui s'appuie sur D et Δ et qui fasse avec ces droites des angles égaux.

(*Bacc. Lille*, 1906)

Construire un angle dont les côtés sont parallèles à D et à Δ; par la bissectrice de cet angle, mener un plan Q perpendiculaire au plan de cet angle; g est parallèle à l'intersection des plans P et Q etc.

×**1333**. Un hexagone régulier ABCDEF étant inscrit dans le cercle O, on construit sur AB, BD, DE, EA vers l'extérieur des demi-cercles. Démontrer que la somme des quatre lunules comprises extérieurement entre la circonférence O et les quatre demi-circonférences que l'on vient de construire est à l'aire de l'hexagone dans le rapport 2 : 3.

(Teodorescu).

×**1334**. Résoudre le système

$$ax + bx^2y + cx^4z - d = 0, \quad a^2x + b^2x^2y + c^2x^4z - d^2 = 0,$$
$$a^3x + b^3x^2y + c^3x^3z - d^3 = 0.$$

On cherche les valeurs x, x^2y, x^4z soit par les procédés élémentaires, soit par les déterminants; on en déduit facilement

$$x = \frac{d(d-b)(d-c)}{a(a-b)(a-c)},$$
$$y = -\frac{a^2(a-b)(a-c)^2(d-a)}{bd(b-c)(d-b)^2(d-c)},$$
$$z = -\frac{a^4(a-b)^4(a-c)^2(d-a)}{d^3c(d-b)^3(d-c)^4(c-b)}.$$

(*Gaseta Matematica, de Bucharest*)

1335. L'hyperbole équilatère qui passe par les sommets du rectangle des axes d'une ellipse, passe aussi par les foyers de cette courbe. (Barisien)

×**1336** Trouver un nombre inférieur à 100 qui s'écrive 52 dans le système à base x et 122 dans le système à base y. (Barisien)

Equation du problème : $5x + 2 = y^2 + 2y + 2$ ou $x = \frac{y(y+2)}{5}$; y ou $y + 2$ doit être divisible par 5. Les hypothèses $y = 5$, $y + 2 = 10$ donnent $x = 7$, $x = 16$ et le nombre cherché est 37 ou 83. L'hypothèse $y + 2 = 5$ donnerait $y = 3$, $x = 3$; elle est à rejeter, parce que x doit être supérieur à 5. Les autres suppositions donnent pour le nombre cherché une solution plus grande que 100.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1611.** Résoudre le système

$$y+z=a,\quad z^2+x^2+zx=b^2,\quad x^2+y^2+xy=c^2.$$

(E. N. BARISIEN)

1612. Une corde MM′ de la circonférence circonscrite à un triangle ABC rencontre les côtés BC, CA, AB aux points A′, B′, C′. Les parallèles menées par A′ à AM′, par B′ à BM′, par C′ à CM′ rencontrent respectivement AM, BM, CM en trois points collinéaires α, β, γ. De même les parallèles par A′ à AM, par B′ à BM, par C′ à CM rencontrent respectivement AM′, BM′, CM′ en trois points collinéaires α', β', γ'.

Lorsque la corde MM′ se déplace en restant de longueur constante, les droites $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ font entre elles un angle constant, sont des transversales réciproques du triangle ABC et enveloppent deux hypocycloïdes à trois rebroussements égales entre elles. (A. GOB)

Cette proposition généralise celle de la question 1610.

1613. Discuter le système

$$\begin{aligned} x+y+\lambda z&=a,\\ 2x-3y-2\lambda z&=b,\\ ax+by+z&=\lambda; \end{aligned}$$

(a, b) étant les coordonnées d'un point du plan, interpréter les résultats. (ABRAMESCU)

×**1614.** Soient a, b, c, A, B, C les côtés et les angles d'un triangle sphérique ABC. ED étant un diamètre quelconque d'une circonférence, construisons les cordes EA′, EB′, EC′ faisant avec ED respectivement les angles $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, et de E abaissons sur la corde C′B′ une perpendiculaire EF qui ira recouper la circonférence en G. Cela posé :

1° Si l'on construit un triangle ayant pour côtés C′F, FB′, A′D l'angle opposé au dernier côté est égal à l'angle A′ du triangle sphérique.

2° Si l'on construit un triangle ayant pour côtés EF, FG, A′D, l'angle opposé au dernier côté est égal à la moitié de l'excès sphérique. (A. C)

1615. La tangente en un point M d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy rencontre Oy en R. Déterminer la courbe par la condition que le rapport OR : RM ait une valeur constante m. (ROSE)

LA TRISECTRICE DE MACLAURIN,

par M. J. Neuberg.

Cette courbe(1) a été, il y a une vingtaine d'années, l'objet d'intéressants travaux de MM. Godefroy et Schoute(2), G. de Longchamps(3), Almeida Lima(4), Habich(5) et Capdeville(6). Dans le présent article, nous rattachons les uns aux autres différents modes de génération de la trisectrice et faisons une très courte digression sur la strophoïde.

1. Etant donné un cercle U de centre O et de diamètre $AB = 2a$, menons les tangentes AY et BT, le diamètre OE perpendiculaire à AB, et les perpendiculaires u, v aux milieux C, J des rayons OA, OB. Une sécante quelconque passant par A rencontre les droites BT, DE, u, v et la circonférence U aux points R, K, D, G, M; portons sur AR les segments $AR' = MR$, $AK' = KM$, $AD' = DM$; leurs extrémités R', K', D' décriront respectivement une cissoïde de Dioclès, une strophoïde et une trisectrice de Maclaurin.

Plus généralement, si l'on porte sur AR à partir de A un segment équipollent à celui qui est intercepté sur AB entre une droite quelconque w et la circonférence U, la courbe décrite par son extrémité a reçu le nom de *cissoïdale* ou de *strophoïdale*.

2. Le milieu I de la corde AM de U est aussi le milieu de la

---

(1) Elle se trouve dans le *Traité des Fluxions de Maclaurin* (1749, pl. X, fig. 184, p. 198).

(2) Voir *Nieuw Archief voor Wiskunde*, deel XII, 1883 : *Over de constructie van unicursale krommen door punten en raaklijnen*, par Dr P. H. Schoute, et *J. M. S.*, t. IV, 1885 : *Sur les courbes sectrices*, par Schoute.

(3) *J. M. S.*, t. IV, 1885, p. 178; *Supplément au Cours de Mathématiques spéciales*, p. 113; *Annuaire de l'AFAS*, Congrès de Grenoble, 1885, p. 131 et Congrès de Nancy, 1886, p. 7.

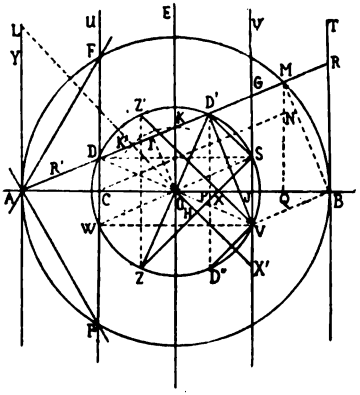
(4) Voir *Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas*, publié par Gomes Teixeira, Coïmbra, 1885, p. 13 : *Sobre una curva do terceiro grão.*

(5) Voir *Gaceta Cientifica*, année 1885, nos 9 et 12 : *Division de un angulo en partes iguales.*

(6) Capdeville, professeur français à Elvas (Portugal) en 1886, mort à Avranches en 1888, avait communiqué ses recherches à M. Schiappa Monteiro, professeur à l'Ecole polytechnique de Lisbonne. C'est M. Guimaraes, capitaine du génie à Elvas, qui a eu l'obligeance de nous faire connaître ces recherches (inédites) de Capdeville; dans les notes de notre honorable correspondant, l'identité des courbes est établie au moyen des équations cartésiennes de ces lignes.

distance KK′ ; par suite, K′I = IK, OK′ = OK. D'où deux modes de génération de la strophoïde :

Etant donné un angle droit AOE, *on mène par* A *une sécante quelconque qui rencontre le côté* OE *en* K ; *la circonférence* (O, OK) *recoupe* AK *en un point* K′ *qui décrit une strophoïde.*



On donne une circonférence de diamètre AO ; *une sécante quelconque issue de* A *coupe cette courbe en* I *et la tangente menée au point* O *en* K. *Le symétrique* K′ *de* K *par rapport à* I *parcourt une strophoïde.*

La droite OK′ rencontre AY en un point L tel que LA = LK′, car les triangles LAK′, OKK′ sont semblables. On retrouve ainsi la génération classique de la strophoïde.

3. I est également le milieu du segment DD′. On déduit de là ces deux constructions de la trisectrice :

u étant la perpendiculaire au milieu de la droite AO, *on mène par* A *une sécante quelconque qui coupe u en* D ; *la circonférence* (O, OD) *recoupe* AD *en un point* D′ *qui engendre une trisectrice.*

AO *étant un diamètre fixe d'une circonférence, si une sécante menée par* A *rencontre la circonférence en* I *et le diamètre perpendiculaire à* AO *en* D, *le symétrique de* D *par rapport à* I *décrit une trisectrice.*

4. Les triangles DAO, ODD′ étant isoscèles, on a *angle* OD′D = ODD′ = 2OAD, d'où angle BOD′ = 3OAM, ou OAD′ = $\frac{1}{3}$BOD′. C'est cette propriété qui a fait donner à la courbe le nom de trisectrice.

Si l'on prend pour pôle le centre O de U et pour axe polaire le rayon OB, la relation OD′ = OD = AD = AC : cos CAD conduit à l'équation de la trisectrice

$$r = \frac{a}{2\cos\frac{1}{3}\theta}.$$

Cette courbe est une transformée par rayons vecteurs réciproques de la courbe $r = b\cos\frac{1}{3}\theta$.

5. Prenons pour axes de coordonnées les droites AB, AY et construisons les ordonnées PD′, QM des points D′, M ; si (x, y) sont les

coordonnées de D', les triangles semblables APD', AQM donnent

$$\frac{y}{x} = \frac{QM}{AQ} = \frac{\sqrt{AQ.QB}}{AQ} = \sqrt{\frac{QB}{AQ}}.$$

Or $CQ = AP = x$; par suite, la trisectrice a pour équation

$$y = x\sqrt{\frac{3a - 2x}{a + 2x}}, \quad \text{ou} \quad 2x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2). \qquad (1)$$

En coordonnées polaires $r = AD', \theta = OAD'$, on trouve

$$r = AM - AD = 2a\cos\theta - \frac{a}{2\cos\theta}.$$

6. Lorsque le point M se rapproche sur U indéfiniment des points F ou F', le point générateur D' tend à se confondre avec A; par suite, la *corde* AD' de la trisectrice se confond, à la limite, avec les droites AF ou AF'. Concluons de là que A *est un point double, avec deux tangentes dirigées suivant* AF *et* AF'.

Lorsque le point M se rapproche sur U indéfiniment du point A, le point générateur D' s'éloigne indéfiniment dans la direction AL; comme le distance de D' à AY est constamment égale à celle du point M à la droite u, la courbe a pour asymptote la symétrique de la droite u par rapport au point A. La même conclusion se déduit de l'équation (1) où l'on fait $x = -\frac{1}{2}a$.

7. Si la parallèle à AM par C rencontre QM en W, on a $CN = DM = AD'$; donc le point N engendre une courbe égale à celle du point D'. D'où cette génération : *Mener par* A *une corde quelconque* AM *du cercle* U, *puis tracer par le milieu* C *du rayon* OA *une parallèle* CN *à* AM *et par* M *une perpendiculaire* MQ *à* AB; *l'intersection des droites* CN, MQ *décrit une trisectrice de Maclaurin*.

8. La circonférence (O, OD) coupe les droites u, v aux sommets d'un rectangle DSVW. Comme on a $JB = AC$, $JV = DC$, la droite BV est équipollente à DA et, par suite, à MD'; donc la figure D'MBV est un parallélogramme et même un rectangle, l'angle D'MB étant droit. Il en résulte que le droite VD', perpendiculaire à VB, enveloppe une parabole ayant pour foyer le point B, pour tangente au sommet la droite v et pour directrice OE.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

La trisectrice de Maclaurin est la polaire d'une parabole, le point fixe étant le symétrique du foyer par rapport à la directrice.

9. L'angle JOS = COD = CAD = $\frac{1}{3}$ JOD'; d'où l'on conclut l'égalité des arcs SV, SD', VD'' du cercle (O,OD), PD'' étant le prolongement de D'P. On déduit de là la génération suivante de la trisectrice, due à Capdeville :

Etant donnés un point O *et une droite v, on décrit du centre* O *un cercle variable, qui coupe v en* S *et* V, *et l'on inscrit à ce cercle les cordes* SD' = VD'' = SV; *les points* D', D'' *décrivent une trisectrice.*

10. Soit Z le symétrique de D' par rapport à O; puisque SD' = SV, on a SZ = VW = CJ. D'où le mode de génération dû à Lima :

On donne deux parallèles u, v et un point O *équidistant de ces droites. Si un cercle quelconque décrit du centre* O *coupe v en* S *et* V, *et que l'on inscrive à ce cercle les cordes* SZ = VZ' *égales à la distance constante* SD = JC, *les points* Z *et* Z' *décrivent une trisectrice.*

Soit H le milieu de la corde SZ; on a SH = OJ, OH = SJ. Donc la figure HOSJ est un trapèze isoscèle et X'J = X'H, X étant le point de rencontre de *v* avec OH. Par suite, *le point* H *décrit une strophoïde.*

Remarquons encore l'énoncé suivant : *Si un angle droit* OHS *dont le côté* HS *a une longueur constante, se déplace de manière que le côté (indéfini)* HO *glisse sur un point fixe, tandis que le point* S *glisse sur une droite v dont la distance au point* O *est égale à* HS, *le sommet* H *décrit une strophoïde, et le symétrique* Z *de* S *par rapport à* H *parcourt une trisectrice.*

×SUR LES TRANSVERSALES ANGULAIRES D'UN TRIANGLE,

par M. J. Tummers (Nimègue).

1. Dans le tome VII de *Mathesis*, p. 245, M. Neuberg a énoncé le théorème suivant qui lui a été suggéré par des cas particuliers qu'avaient signalés MM. Laisant, Catalan et H. Van Aubel :

Soient A', B', C' *les points de rencontre des côtés du triangle* ABC *avec les droites* AD, BD, CD, *et soient* A'', B'', C'' *les points de rencontre des côtés du triangle* A'B'C' (triangle pédal de D) *avec les droites* AE, BE, CE, D *et* E *étant deux points quelconques du plan* ABC. *Les droites* A'A'', B'B'', C'C'' *concourent en un même point* F.

M. Neuberg remarque que le théorème devient évident, si, par une projection conique, on transporte l'axe d'homologie des triangles ABC,

A'B'C' à l'infini ; D sera alors le centre de gravité de ABC, et F sera le complémentaire du réciproque de E par rapport à ABC.

M. Laurens a énoncé le théorème corrélatif dont il a donné une démonstration directe (*Mathesis*, VIII, p. 17).

Je vais donner du théorème de M. Neuberg auquel j'ai été également conduit après en avoir trouvé d'abord des cas particuliers, une démonstration par la géométrie élémentaire et une autre par la géométrie analytique.

2. Si l'on désigne par (X, m) la distance du point X à la droite m, on trouve facilement :

$$\frac{B'A''}{A''C'} = \frac{\text{aire } B'AA''}{\text{aire } AA''C'} = \frac{AB'.(A'', b)}{AC'.(A'', c)} = \frac{AB'}{AC'} \cdot \frac{(E, b)}{(E, c)},$$

$$\frac{C'B''}{B''A'} = \frac{BC'}{BA'} \cdot \frac{(E, c)}{(E, a)}, \quad \frac{A'C''}{C''B'} = \frac{CA'}{CB'} \cdot \frac{(E, a)}{(E, b)}.$$

En multipliant ces égalités membre à membre et observant que

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1,$$

on obtient

$$\frac{B'A''}{A''C'} \cdot \frac{C'B''}{B''A'} \cdot \frac{A'C''}{C''B'} = 1;$$

par conséquent, les droites A'A'', B'B'', C'C'' concourent en un même point(*).

3. Soient $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées des points D, E par rapport au triangle de référence ABC. On sait que les équations des droites B'C', C'A', A'B' sont

$$\delta_1 \equiv -\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0, \quad \delta_2 \equiv \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0, \quad \delta_3 \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = 0.$$

La droite A'A'' a une équation de la forme

$$m_2\delta_2 = m_3\delta_3. \qquad (1)$$

(*) Autrement. On a, sur la conique (ABCDE), l'égalité (EDAB) (EDBC) (EDCA) = 1; donc, si on désigne par A''', B''', C''' les points de rencontre des cotés du triangle A'B'C' avec les droites A'D, B'D, C'D, on a (C''C'''B'A') (A''A'''C'B') (B'B'''A'C') = 1. Cette égalité combinée avec celle qui exprime que les droites A'A''', A'B''', C'C''' sont concourantes, démontre le théorème énoncé. (C. S.).

Or, les coordonnées du point A″ de la droite AE peuvent être représentées par $n\alpha', \beta', \gamma'$; le coefficient n s'obtient en exprimant que ce point est sur la droite $\delta_1 = 0$. On trouve ainsi

$$n = \frac{\alpha}{\alpha'}\left(\frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'}\right).$$

Ecrivons maintenant que A″ vérifie l'équation (1); il vient $m_2\frac{\gamma'}{\gamma} = m_3\frac{\beta'}{\beta}$; on peut donc prendre $m_2 = \frac{\beta'}{\beta}$, $m_3 = \frac{\gamma'}{\gamma}$. Concluons de là que les équations des droites A′A″, B′B″, C′C″ sont

$$\frac{\beta'}{\beta}\delta_2 = \frac{\gamma'}{\gamma}\delta_3, \quad \frac{\gamma'}{\gamma}\delta_3 = \frac{\alpha'}{\alpha}\delta_1, \quad \frac{\alpha'}{\alpha}\delta_1 = \frac{\beta'}{\beta}\delta_2.$$

Il en résulte que ces droites concourent en un même point.

4. Voici les cas particuliers dont il a été question ci-dessus.

A. Soient AB′, BB′, CC′ les hauteurs du triangle ABC, et projetons A, B, C en A″, B″, C″ sur les côtés B′C′, C′A′, A′B′ du triangle orthique. Les droites A′A″, B′B″, C′C″ concourent en un même point F.

En effet, les droites AA″, BB″, CC″ concourent au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

B. Les bissectrices intérieures des angles du triangle ABC rencontrent respectivement B′C′, C′A′, A′B′ en des points A″, B″, C″ tels que les droites A′A″, B′B″, C′C″ concourent en un même point F.

C. Les médianes du triangle ABC rencontrent les côtés du triangle A′B′C′ en des points A″, B″, C″ tels que les droites A′A″, B′B″, C′C″ sont concourantes en un même point F.

La démonstration *directe* de ces propositions est très facile. On peut aussi déterminer sans peine les coordonnées barycentriques ou normales du point F par rapport à l'un des triangles ABC, A′B′C′.

NOTE Existe-t il un théorème analogue à celui du n° 1 et relatif au tétraèdre? (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Précis de Géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales par G. PAPELIER, professeur au lycée d'Orléans. Paris, Vuibert et Nony, 1907 (In-8°, 696 pages avec 238 figures). Prix : 10 francs.

Mathesis a déjà analysé les ouvrages suivants du même auteur : *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, *Formulaire* (Algèbre, Trigonométrie, Géométrie

analytique), *Précis d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie* (*Mathesis* (2) V, p. 163; (3) IV, p. 113). Les mêmes qualités caractérisent le manuel que nous annonçons ici : Grande concision alliée à une grande clarté, démonstrations rigoureuses d'après les méthodes les plus récentes, bon choix d'applications bien expliquées. Le programme développe le cours de géométrie analytique à deux et à trois dimensions; il va un peu plus loin que les leçons données chez nous en première scientifique. L'auteur fait usage des déterminants, des propriétés des équations algébriques d'un degré quelconque et des premières notions de calcul différentiel et de calcul intégral.

La table des matières montrera suffisamment au lecteur les limites du Précis et l'ordre suivi par l'auteur.

Géométrie analytique à deux dimensions (pp. 1-430). I. Homogénéité et construction des formules. II Des coordonnées. III. De la ligne droite. IV. Angles et distances. V. Faisceaux de droites et coordonnées homogènes. VI. Rapport anharmonique. VII. Du cercle. VIII. Lieux géométriques. IX. Homographie et involution. X. Courbes dont l'équation est résolue ou résoluble par rapport à l'une des coordonnées. XI. Courbes définies par l'expression des coordonnées d'un de leurs points en fonction d'un paramètre. XII. Courbes dont l'équation n'est pas résolue par rapport à l'une des coordonnées. XIII. Enveloppes. XIV. Tangentes et normales. XV. Courbure et développées. XVI. Classification des coniques. XVII et XVIII. Centre, diamètres et axes dans les coniques. XIX. Réduction de l'équation du second degré XX. Pôles et polaires. XXI, XXII et XXIII. Etude particulière de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. XXIV. Foyers et directrices. XXV. Détermination des coniques. XXVI. Intersection de deux coniques. XXVII. Equations générales de coniques. XXVIII. Propriétés homographiques des coniques. XXIX. Homothétie. XXX. Coordonnées polaires.

Géométrie analytique à trois dimensions (pp. 431-687). I. Des coordonnées. II. Transformation des coordonnées. III. Le plan et la droite. IV. Angles et distances. V. Sphère. VI. Lieux géométriques et génération des surfaces. VII. Propriétés des courbes gauches. VIII. Plans tangents aux surfaces. IX. Généralités sur les quadriques. X. Classification des quadriques. XI. Centre, plans diamétraux et diamètres. XII. Directions principales dans les quadriques. XIII. Réduction de l'équation du deuxième degré. XIV. Pôles et plans polaires. XV, XVI et XVII. Etude particulière de l'ellipsoïde, des hyperboloïdes, des paraboloïdes. XVIII. Homothétie. XIX. Variation de la courbure des sections normales en un point simple d'une surface.

Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung, für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen sowie zum Selbstunterricht dargestellt von Dr. R. Schröder, Director der Oberrealschule zu Gross-Lichterfelde. Leipzig, B.G. Teubner, 1905 (In-8° cartonné de VII-131 pp.). Prix : 1,60 marc.

Sommaire. I. *Dérivées* (pp. 1-89). 1. Fonction. 2. Dérivée, interprétation

géométrique. 3-4. Dérivées des fonctions algébriques ou transcendantes. 5. Fonctions de fonctions. 6. Dérivées successives. 7. Dérivées des fonctions implicites. 8. Exercices. (pp. 24-39). II. *Formes indéterminées* (pp. 40-51). III. *Maxima et minima* (pp. 52-61). IV. *Applications géométriques* (pp. 62-85). Tangente, normale, sous tangente, sous normale, rayon de courbure, développée; formules en coordonnées polaires. Applications au cercle, aux coniques, à la parabole semi-cubique, à la cissoïde, à la cycloïde, à la lemniscate, à la cardioïde. V. *Intégrales; méthodes d'intégration* (pp. 86-95). VI. *Quadratures* (pp. 96-107). Formules en coordonnées rectangulaires ou polaires. Cercle et coniques, cissoïde, cycloïde, cardioïde, lemniscate. VII. *Rectifications* (pp. 108-116). Formules en coordonnées rectangulaires ou polaires. Parabole, cissoïde, cycloïde, cardioïde. VIII. *Applications mécaniques* (pp. 117-131). Vitesse. Accélération. Exercices (pp. 120-131).

Comme on le voit par cet extrait de la table des matières, le plan du petit livre de M. Schröder est excellent; les exemples sont bien choisis, les exercices nombreux. Mais c'est tout le bien que l'on puisse en dire: presque toutes les questions de principe y sont exposées de manière à introduire des idées fausses dans l'esprit des élèves. Page 4, selon l'auteur, r est toujours positif en coordonnées polaires. Page 5, définition empirique de la continuité, reliée p. 7, on ne sait comment, à la définition analytique. Pages 6, 7, emploi singulier des mots *infini* et *fini*. Page 8, Δx est supposé nul. Page 8 : il manque ici la définition de la différentielle, ce qui vicie toute la suite. On la trouve, hélas, page 21, sous la forme absurde : si $y = fx$, $dy =$ limite pour $\Delta x = 0$ de $f(x + \Delta x) - fx$. Quand saura-t-on donc en Allemagne que Leibniz, dès 1684, a défini dy comme étant égal à $f'x\Delta x$, Δx étant quelconque? Page 9 : distinction imaginaire entre *Differentialquotient* et *derivierte Funktion*. Page 14. Dérivée de x^m, quand m est égal à 1 : n, n entier, en s'appuyant sur le binôme. Page 21 : dérivées successives, compliqué et sans rigueur. Page 23 : dérivées des fonctions implicites, même remarque. Page 40 : la définition de la vraie valeur d'une expression indéterminée manque. Extension, sans preuve, de la règle de l'Hospital, p. 41, aux dérivées secondes, p. 45, aux expressions $(\infty : \infty)$. Page 53, vains essais de démonstration de la règle pour la recherche des maxima et minima, sans s'appuyer sur le premier principe de la moyenne; de même, p. 66, pour trouver les points d'inflexion et p. 87, pour introduire une constante dans une intégrale indéfinie. Page 64, on ne dit rien du signe de la sous-normale et de la sous-tangente; page 72, il manque la vraie définition de la sous-tangente et de la sous-normale polaires. Page 73 : on admet sans preuve qu'une courbe dont le rayon de courbure est constant est un cercle. Page 81 : la figure représentant la cycloïde est par trop inexacte aux points de rebroussement. Page 94 : le changement de variable dans une intégrale est insuffisamment justifié. Page 108 : la démonstration de la formule de rectification des courbes planes est manquée. Dans les applications mécaniques, la direction de la vitesse et de l'accélération n'est pas nettement définie.

Si, comme on le voit, le petit livre de M. Schröder est à refaire dans toute la partie relative aux principes pour les applications, il rendra des services dans les Écoles secondaires et les Realgymnasien allemands, parce que ces applications sont nombreuses et judicieusement choisies. (P. M.)

J. A. Serret. **Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung** Nach Axel Harnack's Ubersetzung. Dritte Auflage neu bearbeiteit von Georg Scheffers. Erster Band. **Differential rechnung** mit 70 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1906 (In-8° de XVI-624 pp.). Prix : 13 marcs.

Nous avons annoncé antérieurement les tomes II et III de la seconde édition de la traduction du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de Serret (*Mathesis*, 1905, pp. 16-17). Voici d'après le nouvel éditeur les changements principaux introduits dans la traduction de Harnack. 1. Addition d'un chapitre préliminaire sur l'idée de nombre afin de pouvoir rendre plus rigoureuses les considérations sur la continuité des fonctions ou la convergence des séries. 2. La théorie des fonctions implicites a été réunie en un chapitre spécial contenant le nécessaire sur les déterminants fonctionnels, pour que cette théorie puisse être traitée plus à fond. 3. Les difficultés que l'on rencontre dans la théorie des maxima et minima de plusieurs variables ont été élucidées autant que possible. 4. Une foule de changements ont été introduits dans les applications géométriques du calcul différentiel, en particulier, pour faire disparaître certaines ambiguités de signe dans les formules. 5. Le chapitre consacré aux fonctions d'une variable imaginaire a été retravaillé complètement.

Malgré ces additions et modifications, le nouvel éditeur espère que le Traité peut toujours porter le nom de Serret.

Voici les titres des douze chapitres de l'ouvrage. 1. Préliminaires. 2. Dérivée des fonctions d'une variable. 3. Dérivées successives; dérivées partielles; différentielles totales. 4. Différentiation des fonctions implicites. 5. Développement des fonctions en séries entières. 6. Théorie des maxima et minima. 7-8. Théorie des courbes dans l'espace et des surfaces. 10. Courbes tracées sur des surfaces et familles de surfaces. 11. Fonctions élémentaires d'une variable complexe. 12. Décomposition des fractions rationnelles. — Index.

NOTES MATHÉMATIQUES.

7. *Quelques grands nombres* (*) 11° On trouvera I. M. 1900, p. 176, le centième terme de la série de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ainsi que divers moyens d'arriver à ce résultat et d'en déduire le deux centième, tout au moins le nombre de ses chiffres, ainsi que ses chiffres extrêmes à droite et à gauche.

Si on a :

$$u_{n+4} < 10u_n < u_{n+5} \quad \text{et} \quad u_{n+5} < 10u_{n+1} < u_{n+6},$$

il s'en suivra $u_{n+6} < 10u_{n+2} < u_{n+7}$.

(*) Addition à l'article de M. Aubry, pp. 65-66, reçue trop tard pour être insérée dans la livraison de mars.

On conclut aisément de cette remarque que le nombre des chiffres de u_n est compris entre $\frac{1}{3}n$ et $\frac{1}{2}n$.

12° On pourra, à titre d'exercice, essayer de se rendre compte de la croissance extrêmement rapide des termes de la suite $a = 2$, $b = a^a$, $c = b^b$....

9. *Sur les points communs à une parabole et à sa développée.* Ces courbes ayant pour équations

$$y^2 = 2px, \quad y^2 = \frac{8(x-p)^3}{27p},$$

l'équation aux abscisses des points d'intersection est

$$4(x-p)^3 - 27p^2x = 0, \quad \text{ou} \quad (x-4p)(2x+p)^2 = 0.$$

Deux de ces points ont donc pour coordonnées $4p$, $\pm 2p\sqrt{2}$; les quatre autres points coïncident deux à deux et ont pour coordonnées $-\frac{p}{2}$, $\pm p\sqrt{-1}$. Par conséquent, *la développée est bitangente à la parabole aux mêmes points de la directrice que le cercle de rayon nul qui a son centre au foyer de la parabole.*

Ce fait a-t-il déjà été signalé? Peut-on l'expliquer sans calcul et l'étendre à l'ellipse et à l'hyperbole? (E. N. Barisien)

Réponse. Une tangente isotrope m à une courbe plane Σ est en même temps la normale à cette courbe au point de contact M. Un cercle tangent à la courbe en ce point se compose de deux droites isotropes dont l'une est m. Ce cercle est osculateur s'il rencontre la courbe en trois points coïncidents en M; ce qui exige que la seconde droite isotrope m' passe par ce point M. Ce dernier est alors le centre du cercle et on voit que : *Une courbe et sa développée ont les mêmes tangentes isotropes avec les mêmes points de contact.* (C. S.)

×9. *Sur le centre de gravité d'un triangle*, par M. N. Agronomof (Reval, Russie). Voici quelques théorèmes que l'on démontre facilement, soit par la géométrie élémentaire, soit en projetant le triangle ABC suivant un triangle équilatéral, soit en calculant les coordonnées des différents points par rapport à deux axes quelconques ou par rapport au triangle ABC; on pourrait aussi les vérifier en appliquant aux sommets des triangles dérivés de ABC des masses égales.

Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle ABC et A_2, B_2, C_2

les milieux des médianes AA_1, BB_1, CC_1. Le centre de gravité G des deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ est aussi le centre de gravité des triangles ayant pour sommets :

1. Les centres de gravité des triangles GBC, GCA, GAB ou des triangles GB_1C_1, GC_1A_1, GA_1B_1 ou des triangles GB_2C_2, GC_2A_2, GA_2B_2 ;

2. Les centres de gravité des triangles ABA_1, BCB_1, CAC_1 ou des triangles ABB_1, BCC_1, CAA_1.

3. Les centres de gravité des triangles ABC_2, BCA_2, CAC_2 ou des triangles ABA_2, BCB_2, CAC_2 ou des triangles ABB_2, BCC_2, CAA_2.

4. Les centres de gravité des triangles GAB_1, GBC_1, GCA_1 ou des triangles GAC_1, GBA_1, GCB_1 ou des triangles GAB_2, GBC_2, GCA_2 ou des triangles GA_1B_2, GB_1C_2, GC_1A_2, etc.

5. Les centres de gravité des triangles AA_1B_2, BB_1C_2, CC_1A_2 ou des triangles AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2 ou des triangles $A_1B_2C_1$, $B_1C_2A_2$ $C_1A_2B_2$, etc.

10. *Sur deux lieux géométriques.* I. Par un point P du plan d'un triangle ABC on mène des parallèles aux trois côtés a, b, c. La parallèle à a coupe b en C_a et c en B_a; la parallèle à b coupe a en C_b et c en A_b; enfin la parallèle à c coupe a en B_c et b en A_c. On demande le lieu d'un point P tel qu'on ait

$$PB_a.PC_a + PC_b.PA_b + BB_c.PA_c = m, \qquad (1)$$

où il faut avoir égard à la règle des signes des segments situés sur une même droite.

Ce problème est résolu au moyen des coordonnées cartésiennes dans le *Traité des Sections coniques* par Salmon-Fiedler, 6e édition, t. I, p. 206. M. Tafelmacher (Santiago) vient de lui consacrer un intéressant article dans le *Journal de Hoffmann*, 37e année, p. 330. Les coordonnées normales conduisent rapidement à une équation du lieu (P).

En effet, si α, β, γ représentent les coordonnées normales absolues du point P, la figure montre que le produit $PB_a.PC_a$ est exprimé en grandeur et en signe par $-\frac{\gamma\beta}{\sin B \sin C}$. L'équation du lieu est donc

$$-\frac{R}{S}(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta) = m. \qquad (2)$$

On en conclut que m est la puissance de P par rapport au cercle ABC. Par suite, si m est constant, le lieu de P est une circonférence.

Il est intéressant de remarquer que le premier membre de (1) est nul lorsque P est sur la circonférence ABC, et qu'il est égal à $-R^2$ lorsque P coïncide avec le centre de cette circonférence.

II. Les notations restant les mêmes, on demande le lieu d'un point P tel que la somme algébrique des aires des parallélogrammes PA_cAA_b, PB_aBB_c, PC_bCC_a ait une valeur constante n, ou ce qui revient au même, que la somme des aires des triangles PB_cC_b, PC_aA_c, PA_bB_a ait une valeur constante p.

On trouve respectivement les équations

$$\frac{\beta\gamma}{\sin A}+\frac{\gamma\alpha}{\sin B}+\frac{\alpha\beta}{\sin C}=n,$$

$$\frac{\alpha^2\sin A}{\sin B\sin C}+\frac{\beta^2\sin B}{\sin C\sin A}+\frac{\gamma^2\sin C}{\sin A\sin B}=2p.$$

A l'hypothèse $n=0$ correspond l'ellipse circonscrite au triangle ABC et ayant pour centre le centre de gravité G. Si n a une valeur quelconque, le lieu cherché est une ellipse semblable à la précédente et de même centre.

L'hypothèse $p=0$ donne une ellipse (imaginaire) qui est conjuguée au triangle ABC et a pour centre le point G. (J. N)

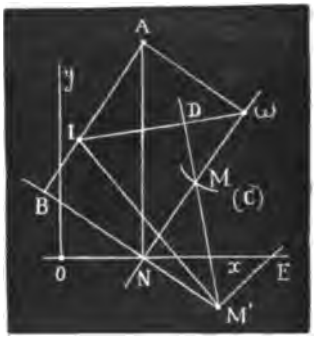
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1492.

(Voir *Mathesis* (3), IV, p. 112).

La normale en un point quelconque M *d'une courbe* (C) *rencontre l'axe* Ox *au point* N ; *sur la perpendiculaire élevée en* N *sur* NM *on prend la longueur* NM′ = NM. *Le point* M′ *engendre une seconde courbe* (C′). *On demande* 1° *de construire la tangente en* M′ *à la courbe* (C′) ; 2° *de déterminer la courbe* (C) *par la condition que le rayon vecteur* OM′ *soit égal à l'abcisse du point* M. (Abramescu)

Solution par J. Rose. 1° Le centre instantané de rotation de l'angle droit MNM′ se trouve au point de rencontre A de la perpendiculaire en N à la trajectoire ox de ce point et de la normale à l'enveloppe de la droite MN, c'est-à-dire de la perpendiculaire menée par le centre de courbure ω à MN. Donc le point de contact de NM′ avec son enveloppe est au pied B de la perpendiculaire abaissée de A sur cette droite.



D'autre part, le centre instantané de rotation de MN qui reste normale à (C) est le centre de courbure ω. Par suite, le point de contact de MM′ invariablement liée à cette droite, avec son enveloppe est le pied D de la perpendiculaire menée de ω sur cette droite. Cela étant, dans le mouvement de l'angle invariable MM′N, le centre instantané de rotation I se trouve au point de rencontre des normales BA et ωD aux enveloppes de ses côtés. Par suite, IM′ est la normale à (C′) et M′E est la tangente.

2° En supposant menées les ordonnées MP, M′P′, on voit facilement que les triangles PNM, P′M′N étant égaux, on a, en valeur absolue, $NP' = y$, $P'M = NP = yy'$; d'où l'on conclut que l'équation différentielle des courbes (C) correspondant à la question est :

$$y^2y'^2 + (y + x + yy')^2 = x^2,$$

ou
$$2yy'^2 + 2y'(y + x) + y + 2x = 0, \qquad (1)$$

d'où
$$y = -\frac{2(1+p)x}{1 + 2p + 2p^2} \qquad (2)$$

Par différentiation, on obtient :

$$pdx = -\frac{2(1+p)dx}{1+2p+2p^2} + \frac{2xdp(1+4p+2p^2)}{(1+2p+2p^2)^2},$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{2x} = -\frac{dp(1+4p+2p^2)}{(1+2p+2p^2)(2p^3+2p^2+3p+2)}. \qquad (3)$$

On en déduit

$$lC\sqrt{x} = \int -\frac{dp(1+4p+2p^2)}{(1+2p+2p^2)(2p^3+2p^2+3p+2)}. \qquad (4)$$

Les équations (4) et (2) déterminent x et y en fonction de p qui joue le rôle de paramètre variable.

La seconde partie de la question est ramenée à l'intégration d'une fraction rationnelle; il faudrait connaître les racines de l'équation $2p^5+2p^2+3p+2=a$. On rencontre la même difficulté lorsqu'on tire y' de l'équation (1) et que l'on emploie ensuite la substitution $y=xz$ propre aux équations homogènes.

L'enveloppe de la droite NM' est une *transformée orthotangentielle* de la développée de (C). On peut voir à ce sujet une question proposée par E. Cesaro (*Mathesis*, 1888, p. 248 et 1889, p. 142; NAM, 1885, p 545; ibid., 1885, p. 259 et 1889, p. 116).

L'enveloppe de la droite MM' est une *développoïde* ou *quasi-développée* de (C); pour cette courbe, nous renvoyons à un article de M. Mansion qui a paru dans la NCM, 1879, pp. 356 et 398. (J. N.)

Question 1594.

(Voir *Mathesis* (3), VI, p. 256).

Une droite AB *de longueur constante glisse sur une droite donnée* m. *Par ses extrémités* A, B *et par un point donné* C, *on trace une parabole* (P) *dont la directrice est parallèle à* m. *Trouver les lieux du sommet, du foyer et du pied de la directrice de cette parabole.*

Solution par M. E. N. Barisien. Prenons la droite m pour axe des x et la perpendiculaire abaissée de C sur m pour axe des y. O étant la projection de C sur AB, posons $AB=2a$, $OA=\alpha$, $OB=\alpha+2a$, $OC=b$.

Soient (X, Y) le foyer de la parabole et $y-\lambda=0$, l'équation de la directrice. La parabole a pour équation

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=(y-\lambda)^2,$$

ou
$$x^2-2Xx-2(Y-\lambda)y+X^2+Y^2-\lambda^2=0. \qquad (1)$$

Les conditions pour qu'elle passe par A, B, C, sont

$$\alpha+a=X, \qquad (2)$$

$$\alpha(\alpha+2a)=X^2+Y^2-\lambda^2, \qquad (3)$$

$$2b(Y-\lambda)=X^2+Y^2-\lambda^2. \qquad (4)$$

Lieu du foyer. Pour avoir le lieu du foyer, il n'y a qu'à éliminer λ et α entre (1), (2) et (3). En éliminant α entre (2) et (3), on obtient

$$\lambda^2=a^2+Y^2.$$

Remplaçons dans (4) λ par $\sqrt{a^2+y^2}$; il vient

$$Y = \frac{(X^2-a^2)^2 - 4a^2b^2}{4b(X^2-a^2)}. \tag{5}$$

Le lieu du foyer est donc une quartique symétrique par rapport à l'axe OC et ayant pour asymptotes les deux droites $X = \pm a$. Elle est unicursale, puisque X et Y sont fonctions rationnelles du paramètre α :

$$X = \alpha + a, \quad Y = \frac{\alpha^2(\alpha+2a)^2 - 4a^2b^2}{4b\alpha(\alpha+2a)}. \tag{6}$$

Lieu du sommet. En tenant compte des relations (2), (3), (4), l'équation (4) de la parabole s'écrit, en fonction de α,

$$x^2 - 2(\alpha+a)x - \frac{\alpha(2a+\alpha)}{b}y + \alpha(2a+\alpha) = 0. \tag{7}$$

L'équation de l'axe de la parabole est $x = \alpha + a$. En portant la valeur $\alpha = x - a$ dans (7) on a l'équation du lieu du sommet

$$y = \frac{a^2b}{a^2-x^2}. \tag{8}$$

C'est une cubique passant par C et ayant pour asymptotes l'axe des x et les droites $x = \pm a$.

Lieu du pied de la directrice. Les coordonnées x_1 et y_1 de ce point sont, en fonction de celles X, Y du foyer et x, y du sommet

$$x_1 = 2x - X, \quad y_1 = 2y - Y. \tag{9}$$

Or, X et Y sont données par (6), et x et y proviennent de (7) et $x = a + \alpha$. On a ainsi

$$x = \alpha + a, \quad y = -\frac{a^2b}{\alpha(\alpha+2a)}.$$

Les coordonnées (9) sont alors

$$x_1 = \alpha + a, \quad y_1 = -\frac{2a^2b}{\alpha(\alpha+2a)} - \frac{[\alpha^2(\alpha+2a)^2 - 4a^2b^2]}{4b\alpha(\alpha+2a)},$$

ou

$$x_1 = \alpha + a, \quad y_1 = -\frac{\alpha^2(\alpha+2a)^2 + 4a^2b^2}{4\alpha b(\alpha+2a)}.$$

L'élimination de α entre ces deux valeurs de x_1 et y_1 donne la quartique

$$y_1 = -\frac{[(x_1^2-a^2)^2 + 4a^2b^2]}{4b(x_1^2-a^2)},$$

courbe du même genre que la courbe (5).

Remarque. Les paraboles (7) passant toutes par le point C, il semble que ce point doive être l'unique enveloppe de ces courbes. Cependant, si on exprime que l'équation (7) du second degré en α a deux racines égales, on trouve pour enveloppe la cubique

$$x^2 = -\frac{a^2(y-b)^2}{by},$$

qui est tout entière située au-dessous de l'axe de x, et qui passe par le point isolé C($x=0$, $y=b$).

M. Rose a également résolu la question 1594 en partant de l'équation focale M. Lez part de l'équation $y - y_1 = 2p(x - x_1)$ où (x_1, y_1) désignent les coordonnées du sommet; les coordonnées du foyer sont alors $x_2 = x_1 + \frac{p}{2}$, $y_2 = y_1$ et celles du pied de la directrice, $x_2 = x_1 - \frac{p}{2}$, $y_2 = y_1$; le paramètre p est variable. Cette méthode est à recommander lorsque la direction de l'axe d'une parabole variable reste fixe; elle donne, par exemple, des calculs faciles lorsque le segment AB de m se déplace de manière que l'angle ACB soit constant. M. Dupont résout la question d'une manière analogue. (J. N.)

Question 1596.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 280).

Soient A, B, C ... L *des points donnés d'une même sphère* O, *et soient* $a, b, c \dots l, s$ *des nombres donnés. Le lieu d'un point* M *de la sphère tel que*

$$a \cos AM + b \cos BM + \dots + l \cos LM = s \qquad (a)$$

est un cercle dont le plan se déplace parallèlement à lui-même lorsque s *varie.* (Steiner)

Solution par MM. J. Rose, E. Seam et Liang (étudiant chinois à Mons) et Abramescu. On rapporte la sphère à trois diamètres rectangulaires; soit son équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (1)$$

Soient x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2 \dots n)$ les coordonnées des points A, B, C ... L et soient x, y, z, celles du point M. La relation de l'énoncé peut alors s'écrire :

$$\Sigma a (x x_i + y y_i + z z_i) = s R^2. \qquad (2)$$
$$(i = 1, 2 \dots n).$$

Les équations (1) et (2) donnent le lieu de M qui est, par suite, un cercle. Si s varie, le premier membre de (2) ne change pas ; par suite le plan du cercle se déplace parallèlement à lui-même.

En particulier si $s = 0$ le lieu de M est un grand cercle.

Solution par M. Aenden Boom. On porte suivant les semi droites OA, OB. ... OL respectivement les segments OA', OB', ... OL' mesurés par les nombres $a, b, \ldots l$; on construit leur résultante OR. D'après l'égalité (a) la projection de OR sur la semi droite OM est constante ; il en est de même de la projection de OM sur OR, l'angle ROM étant constant. Par suite, le lieu du point M est un cercle dont le plan se déplace normalement à OR quand s varie.

Solution par M. L. Hacken. La question se ramène à celle-ci : On donne n points A, B, C, . . L, situés d'une façon quelconque dans l'espace, et les nombres $a, b, c \ldots l, s$. Des points, on abaisse des perpendiculaires $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sur un plan P passant par un point fixe O. Trouver le lieu de la perpendiculaire menée par O sur P quand on a

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + \cdots + lx_n = s \quad \text{ou} \quad \Sigma a x_1 = s.$$

Considérons le barycentre G des masses $a, b, c, \ldots l$ situées aux points A, B, C, ... L. La perpendiculaire, y, abaissée de G sur P est donnée par $y = \frac{\Sigma a x_1}{\Sigma a} = \frac{s}{\Sigma a}$; y est donc une constante et l'enveloppe du plan P est le cône de révolution ayant pour sommet O et circonscrit à la sphère de centre G et de rayon $\frac{s}{\Sigma a}$. Pendant que le plan P se meut tangentiellement au cône, la perpendiculaire en O sur P engendre un autre cône de révolution de même axe que le premier, de même sommet et ayant une ouverture supplémentaire.

Dans la question proposée, les cosinus sont proportionnels aux distances de A, B, C. ... L à un plan passant par O et perpendiculaire sur OM. Le lieu de OM, pour chaque valeur de s, est un cône de sommet O et ayant pour axe OG. Quand s varie, l'ouverture du cône seule varie et les intersections des différents cônes avec la sphère O seront une série de cercles situés dans des plans parallèles, perpendiculaires sur OG. M se meut sur les circonférences de ces cercles.

M. Malaise (Liége) transforme l'énoncé de Steiner en substituant aux

points A, B, ... M les grands cercles dont ces points sont les pôles, ce qui donne le théorème suivant qu'il démontre par la géométrie analytique :

Si un grand cercle se déplace sur une sphère de manière que les angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *qu'il fait avec des cercles donnés vérifient la relation*

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \cdots + a_n \cos \alpha_n = s, \qquad (1)$$

il reste tangent à un petit cercle fixe.

Si l'on transforme cette dernière proposition par inversion en mettant le pôle d'inversion en un point quelconque de la sphère, M. Malaise trouve le théorème suivant :

Si un cercle variable d'un réseau rencontre n cercles fixes du réseau sous des angles $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *vérifiant la relation* (1), *il enveloppe un cercle fixe* ou une droite

M. Weber nous signale une démonstration de la question 1596 qui se trouve dans la trigonométrie de Casey.

Question 1599.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 280).

Soit M *un point fixe d'une conique de centre* C *et de foyers* F *et* F'.

1° *Lieu des centres des coniques tangentes à la conique donnée en* M *et passant par* F *et* F'.

2° *Lieu des centres des coniques tangentes à la conique donnée par* M *et passant par* F *et* C.

3° *Chacun des lieux précédents est une conique dont on demande le lieu des centres lorsque le point* M *se déplace sur la conique donnée.*

(E. N. Barisien)

Solution par MM. J. Rose et Aenden Boom. 1° On sait que le lieu des centres des coniques d'un faisceau ponctuel est la conique des neuf points du quadrangle de base.

Dans le cas actuel, deux sommets de ce quadrangle sont réunis en M et le lieu cherché est une conique (Γ) passant par M, par C, par les milieux A et B de MF et MF' ainsi que par le point T où la tangente en M coupe FF'.

2° De même, dans ce cas, le lieu est une conique (Γ') passant par M, T, A et par D et E milieux de MC et de CF.

3° La figure AMBC est un parallélogramme inscrit dans (Γ); donc son centre, c'est-à-dire le milieu G de CM, est le centre de (Γ). Par suite, quand M décrit la conique donnée, G décrit la conique homothé-

tique, le centre d'homothétié étant C et le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$.

De même, H milieu de ME est le centre de (Γ′) et quand M varie, il décrit également une conique.

M. Hacken fait passer les coniques variables des nos 1 et 2 par deux points fixes quelconques P, Q et cherche ensuite le lieu des centres des coniques passant les points P, Q (axes coordonnés, MP, MQ) et touchant en M une droite donnée (la tangente en M à la conique donnée). Ce lieu est une conique ayant pour centre le milieu I de la droite joignant M au milieu du segment PQ. Par suite, lorsque M parcourt la conique donnée, I décrit une conique homothétique à la première.

M. Lez représente la conique variable par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1-\left(\frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}-1\right)(lx+my+n)=0,$$

et élimine l, m, n entre les équations du centre et celles qui expriment que la conique variable passe par les points F, F′ ou par les points F et C. Il trouve respectivement les coniques

$$b^2\cos\varphi\sin^2\varphi.x^2+2ab\sin^3\varphi,\quad xy-(b^2+a^2\sin^2\varphi)\cos\varphi.y^2 - ab^2\sin^2\varphi.x+b^3\sin\varphi\cos\varphi.y=0,$$

$$2b^2\cos\varphi\sin^2\varphi.x^2+4ab\sin^3\varphi.xy-2a[a\cos\varphi(1+\sin^2\varphi)-c]y^2 - b^2(2a+c\cos\varphi)\sin^2\varphi.x+ab[2a\cos\varphi-c(2+\sin^2\varphi),]\sin\varphi.y+ab^2c\sin^2\varphi=0.$$

Pour traiter le 3e, il élimine φ entre les équations du centre de chacune des coniques précédentes.

×Question 1601.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 321.

Soient AA′, BB′, CC′ *les bissectrices intérieures d'un triangle* ABC. *Si par* A *et* A′ *on mène des parallèles aux bissectrices* BB′ *et* CC′, *on forme un parallélogramme* AA″A′A‴ *dont l'aire* S_1 *est, en fonction des trois côtés et de l'aire* S *du triangle* ABC,

$$S_1=\frac{2bc(a+b+c)S}{a(b+c)^2}.$$

(E. N. Barisien)

Solution par MM. Lez, Gallez (Liége), Doutrewe (Liége), Demeyer (Gand), Rose, Plakhovo (Tambov), Constantinescu, Terracini *et* Delahaye (Roye).

Les angles du triangle AA'A'' étant égaux à $1^{dr} - \frac{1}{2}C$, $1^{dr} - \frac{1}{2}B$, $1^{dr} - \frac{1}{2}C$, une formule connue donne

$$S_1 = \overline{AA'}^2 \frac{\cos\frac{1}{2}B \cdot \cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}. \qquad (1)$$

D'autre part,

$$\overline{AA'}^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}, \quad \cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (1), on obtient la formule proposée.

Remarques. I. Soit R_1 le rayon du cercle circonscrit au triangle AA'A''; on a

$$R_1 = \frac{AA'}{2\sin AA''A'} = \frac{bc}{b+c}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

(Plakhovo)

Le diamètre de ce cercle est donc une moyenne harmonique entre les côtés b et c, et les rayons des cercles circonscrits aux trois triangles AA'A'', BB'B'', CC'C'' dont les côtés sont parallèles aux bissectrices intérieures sont inversement proportionnels aux produits $a(b+c)$, $b(c+a)$, $c(a+b)$.

II. Si AA', BB', CC' désignent les bissectrices extérieures du triangle ABC et S_1' la surface du nouveau parallélogramme AA'A'', on trouve

$$S_1' = \frac{4bc}{a(b-c)^2} rr_a^2 = S\frac{4bc(p-b)(p-c)}{a(p-a)(b-c)^2},$$

$$\sqrt{\frac{S_1}{S_1'}} = \frac{b-c}{b+c}\cot\tfrac{1}{2}A, \quad \sqrt{S_1 S_1'} = 4S\frac{bcr_a}{a(b^2-c^2)}.$$

(Delahaye)

III. Soit s la surface du parallélogramme APMQ dont les côtés AP et QM, AQ et MP sont respectivement parallèles à CC', BB', QM et MP passant respectivement par B et par C. L'angle MAP étant égal à $1^{dr} + \frac{A}{2}$, et les côtés AM, AP étant calculés dans les triangles ACM, ABP, on trouve

$$s = bc\frac{\sin(A+\frac{1}{2}C)\sin(A+\frac{1}{2}B)}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

Développant $\sin(A+\frac{1}{2}C)$ et $\sin(A+\frac{1}{2}B)$, on trouve pour le produit :

$$\sin^2 A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C+(1-\sin^2 A)\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C+\sin A\cos A\sin\tfrac{1}{2}(B+C)$$
$$=\sin^2 A\sin\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C+\sin A\cos A\cos\tfrac{1}{2}A$$
$$=\sin A\cos\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Par conséquent,

$$s=bc\left(\sin A+\frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\right)=2S+\frac{bc}{ap}S. \qquad \text{(Rose)}$$

Solution par M. Hacken. Soient D le point de rencontre de BB′ avec A′A″ parallèle à CC′, et E celui de CC′ avec A′A‴ ; nous aurons

$$\frac{DIE}{BIC}=\frac{ID.IE}{IB.IC}=\frac{ID}{IB}\cdot\frac{IE}{IC}=\frac{A'C}{a}\cdot\frac{A'B}{a}=\frac{bc}{(b+c)^2},$$

$$DIE=\tfrac{1}{2}IDA'E,\quad \frac{IDA'E}{2S_1}=\frac{\overline{IA'}^2}{\overline{AA'}^2}=\frac{a^2}{(a+b+c)^2},\quad \frac{BIC}{S}=\frac{a}{a+b+c},$$

d'où l'on conclut aisément la formule de M. Barisien.

Solution par M. Liang Tu (étudiant chinois, à Mons). Menons A″P, BR, CQ perpendiculaires à AA′ et prolongeons la bissectrice BIB′ jusqu'à sa rencontre en K avec AA‴. Nous aurons

$$S_1=AB'.A'''P,\quad S=\tfrac{1}{2}AA'(BR+CQ),\quad \text{d'où}\quad \frac{S_1}{S}=\frac{2A'''P}{CQ+BR},$$

et, à cause de $BR:CQ=c:b$,

$$\frac{S_1}{S}=\frac{2b}{b+c}\cdot\frac{A'''P}{CQ}.$$

D'autre part,

$$\frac{A'''P}{CQ}=\frac{AA''}{IC}=\frac{AA'''}{AK}\cdot\frac{AK}{IC}=\frac{AA'}{AI}\cdot\frac{AB'}{B'C}=\frac{AA'}{AI}\cdot\frac{c}{a},$$

$$\frac{AA'}{AI}=\frac{aire\,AA'C}{aire\,AIC}=\frac{aire\,AA'B}{aire\,AIB}=\frac{AA'C+AA'B}{AIC+AIB}=\frac{(a+b+c)r}{br+cr};$$

de là résulte la relation proposée.

Solution par M. Abramescu. Si les droites AA″ parallèle à BB′ et la droite AA‴ parallèle à CC rencontrent BC en des points D, E, on a

$$S_1=DAE-DA''A'-EA'''A'=DAE\left(1-\frac{\overline{DA'}^2}{\overline{DE}^2}-\frac{\overline{EA'}^2}{\overline{DE}^2}\right).$$

Or, $DB = BA = c$, $EC = b$, $DA' = DB + BA' = c + \frac{ac}{b+c} = c\frac{a+b+c}{b+c}$,

$EA' = b\frac{a+b+c}{b+c}$, $DE = a+b+c$; par conséquent

$$S_1 = DAE\left(1 - \frac{b^2+c^2}{(b+c)^2}\right) = DAE\,\frac{2bc}{(b+c)^2}. \qquad (1)$$

D'autre part, I étant le centre du cercle inscrit, on a

$$\frac{DAE}{BIC} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2}, \quad \frac{BIC}{ABC} = \frac{ar}{(a+b+c)r};$$

en multipliant ces relations membre à membre, il vient

$$\frac{DAE}{S} = \frac{a+b+c}{a}. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on déduit facilement la formule proposée.

Généralisation par M. B. Baidaff (Jassy). Nous prenons pour AA', BB', CC' trois droites concourant en un point quelconque I du plan ABC; soient B_1, C_1 les points d'intersection de BB' avec A'A''' parallèle à CC' et de CC' avec A'A''. Nous aurons

$$\frac{AA'A''}{IA'C_1} = \frac{\overline{AA'}^2}{\overline{IA'}^2}, \quad \frac{IA'C_1}{IA'C} = \frac{IC_1}{IC} = \frac{A'B}{BC},$$

$$\frac{IA'C}{AA'C} = \frac{IA'}{AA'}, \quad \frac{AA'C}{S} = \frac{A'C}{BC};$$

en multipliant ces égalités membre à membre, on obtient

$$\frac{AA'A''}{S} = \frac{AA'}{IA'}\cdot\frac{A'B.A'C}{\overline{BC}^2}.$$

Soient α, β, γ les coordonnées barycentriques de I, c'est-à-dire des quantités proportionnelles aux aires IBC, ICA, IAB; la relation précédente pourra prendre la forme

$$\frac{AA'A''}{S} = \frac{\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha(\beta+\gamma)^2}.$$

Si I est le centre du cercle inscrit ou le point de Lemoine, on remplacera α, β, γ respectivement par a, b, c ou par a^2, b^2, c^2.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1837. Sur les côtés OX, OY d'un angle XOY on donne deux points A et B; on considère une droite variable, de direction constante, coupant respectivement OX et OY en P et Q. Trouver le lieu de l'intersection M des droites AQ et BP. Dans quel cas le lieu est-il une circonférence?

On voit immédiatement que les droites AQ, BP projettent deux ponctuelles semblables [Q], [P]; par suite, M engendre une conique passant par A, B et O.

Si l'on pose $OA = a$, $OB = b$, $OP = \lambda p$, $OQ = \lambda q$, où λ est un paramètre variable, les génératrices AQ, BP du lieu ont pour équations

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda q} = 1, \qquad \frac{x}{\lambda p} + \frac{y}{b} = 1;$$

l'élimination de λ donne pour le lieu cherché

$$bqx^2 - apy^2 - ab(qx - py) = 0.$$

Pour que ce lieu soit une circonférence, les axes OX, OY doivent être rectangulaires, ainsi que AB et la direction PQ.

×**1838.** Vérifier que les trois racines de l'équation

$$x(x - a - b)^2 - a(x - a + b,^2 \cos^2\alpha - b(x - b + a)^2 \sin^2\alpha = 0$$

sont

$$a + b \pm 2\sqrt{ab,} \quad a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha.$$

(E. N. Barisien)

×**1839.** $\sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} - \sqrt{2})(2 + \sqrt{3}) = 2$. (*Journal de Vuibert*)

×**1840.** Résoudre le système $x^y = y^x$, $x^p = y^q$. (*J. de Vuibert*)

×**1841.** Le trinome $x^{2m} + x^m + 1$ est divisible par $x^2 + x + 1$ si m n'est pas multiple de 3; dans le cas contraire, le reste de la division est 3. (*J. de Vuibert*)

×**1842.** On a

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad + \frac{1}{m} =$$

$$m - \frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} - \cdots$$

$$+ (-1)^{m-1}\frac{1}{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-m+1)}{1.2 \qquad m}.$$

(*J. de Vuibert*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1616. Trouver les valeurs, réelles ou imaginaires, de x qui rendent réelle l'expression

$$\varphi(x) = (a + a'i)x^2 + (b + b'i)x + (c + c'i), \quad (i = \sqrt{-1})$$

et déterminer pour chacune de ces valeurs de x le signe de $\varphi(x)$.

Exemple : $(1 - i)x^2 - 2ix + 1 + i$. (ABRAMESCU)

1617. Soient M un point d'une parabole qui se projette sur l'axe au point de rebroussement R de la développée. 1° Le centre de courbure C′ est situé sur la parabole ; 2° Les tangentes en C′ à la parabole et à la développée rencontrent l'axe en des points A, B tels que OB = 2OR, OA = 4OR, O étant le sommet de la parabole. (ROSE)

1618. Soient d_a, d_b, d_c les parallèles menées aux côtés du triangle ABC par le centre O du cercle circonscrit. On projette un point quelconque M de ce cercle en A′, B′, C′ sur les droites d_a, d_b, d_c, et en A″, B″, C″ sur les rayons OA, OB, OC. Démontrer

1° que les droites A′A″, B′B″, C′C″ concourent en un point D de la droite de Simson de M ; 2° que le point D est l'orthocentre du triangle A′B′C′ et le centre du cercle inscrit au triangle A″B″C″ ; 3° lorsque M parcourt la circonférence ABC, D parcourt l'ellipse inscrite au triangle ABC et ayant pour centre le point O. (A. GOB)

1619. Une sphère étant inscrite à un tétraèdre, on joint le point de contact d'une face aux sommets de cette face. Démontrer que les trois angles compris entre les droites ainsi menées sont les mêmes dans les quatre faces. (BANG)

1620. Montrer que le système

$$x^2y = (a - x)^2, \quad x(a - y) = y^2,$$

est satisfait pour $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, et que les quatre autres solutions sont imaginaires. (E. N. BARBIER)

SUR LES QUADRIQUES HOMOFOCALES,

par M. C. Servais, professeur à l'Université de Gand.

1. Les polaires m d'un point donné M par rapport à un système de coniques homofocales Σ, sont tangentes à une parabole (P). Cette courbe est aussi l'enveloppe des normales n correspondant aux tangentes t menées du point M aux coniques Σ. La polaire m_k du point M par rapport à une conique fixe Σ_k du système Σ est coupée par la normale n au pôle T_k de la droite t relativement à la conique Σ_k. Si la droite t tourne autour de M, le faisceau engendré (t) est projectif à la ponctuelle (T_k). Dans cette projectivité, à l'involution $(t\,t')$ formée par les couples de tangentes t, t' menées du point M aux coniques Σ correspond l'involution (T_kT_k'). Par suite les couples de normales n, n' relatives aux couples de tangentes t, t' appartiennent à une involution de tangentes sur la parabole (P). Ainsi le lieu du point (nn') est une droite k polaire de cette involution sur la parabole (P). Les éléments doubles de cette involution sont les normales p, q aux deux coniques homofocales Σ_1, Σ_2, passant par le point M. Le point M est donc le pôle de la droite k par rapport à la parabole (P), et il résulte de là :

Si d'un point M *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques homofocales* Σ, *puis les normales aux points de contact, la polaire du point* M *relativement à ces deux normales est une droite fixe* k. (Laguerre, *Œuvres*, t. II, p. 540).

2. Soient $P_1, P_2, \ldots P_k$; $Q_1, Q_2, \ldots Q_k$ les pôles des droites p, q relativement aux coniques homofocales $\Sigma_1\Sigma_2\ldots\Sigma_k$; les ponctuelles $(P_1P_2\ldots P_k)$ et $(Q_1Q_2\ldots Q_k)$ sont semblables, leurs supports sont respectivement q et p, et elles engendrent la parabole (P). Les coniques Σ_1 et Σ_2 passant par le point M, les points P_2, Q_1 sont confondus en M, donc leurs homologues Q_2 et P_1 sont les points de contact des droites p, q avec la parabole (P). Ainsi la droite k joint les points P_1, Q_2. Par suite :

Deux coniques homofocales Σ_1, Σ_2 *passent par le point* M; *la droite fixe* k (1) *passe par le pôle relativement à* Σ_2 (*ou* Σ_1) *de la droite* q (*ou* p) *tangente en* M *à la conique* Σ_1 (*ou* Σ_2).

Le point (nn'), pour l'élément double p ou q de l'involution sur la parabole (P), est le centre de courbure de la conique Σ_1 ou Σ_2 au point M. Donc :

Si d'un point M *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques homofocales* Σ, *puis les normales aux points de contact, le lieu des points de rencontre de ces normales est la droite qui joint les centres de courbure des deux coniques homofocales qui se croisent au point* M. (LAGUERRE, *Œuvres*, t. II, p. 541. *Mathesis*. (3), VII, p. 50).

COROLLAIRE. *Le centre de courbure* Q_2 *d'une conique* Σ_1 *au point* M *est le pôle de la tangente* q *en ce point par rapport à la conique homofocale* Σ_2 *passant par* M. (Théorème connu).

8. Les conjuguées m d'une droite donnée s par rapport à un système de quadriques homofocales Σ sont les rayons d'un système réglé (m) situé sur un paraboloïde hyperbolique (P). L'autre système réglé de ce paraboloïde a pour rayons, les normales n correspondant aux plans tangents τ menés de la droite s aux quadriques Σ. La conjuguée m_k de la droite s par rapport à une quadrique fixe Σ_k du système Σ est coupée par la normale n au pôle T_k du plan τ relativement à la quadrique Σ_k. Si le plan τ tourne autour de la droite s, le faisceau engendré (τ) est projectif à la ponctuelle (T_k). Dans cette projectivité, à l'involution $(\tau\tau')$ formée par les couples de plans tangents τ, τ' menés de la droite s aux quadriques Σ, correspond l'involution (T_kT_k'). Par suite les couples de normales n, n' correspondant aux couples de plans tangents τ, τ', appartiennent à une involution de rayons (nn') sur le système réglé (n) du paraboloïde (P). Les éléments doubles de cette involution sont les normales p, q aux deux quadriques Σ_1, Σ_2 du système Σ, tangentes à la droite s. Soient $S_1 \equiv (ps)$, $S_2 \equiv (qs)$ les deux points de contact, m_1, m_2 les conjuguées de la droite s relativement à Σ_1, Σ_2; Q_2, P_1 les points (pm_2) et (qm_1), s' la droite Q_2P_1. Le système réglé $(pqnn')$ étant harmonique, les quatre droites s, s', n, n' forment un système réglé harmonique; autrement dit, la droite s' est la conjuguée harmonique ou la polaire de s, par rapport au couple n, n'. Ainsi :

Si par une droite s on mène des plans tangents à l'une quelconque des quadriques homofocales Σ, *puis les normales aux points de contact, la polaire de la droite s relativement à ces deux normales est une droite fixe s'* (*).

(*) Nous reviendrons ultérieurement sur une généralisation de ce théorème. (C. S.)

4. Le point $Q_2 \equiv (pm_2)$ est le pôle du plan (sq) tangent en S_1 à la surface Σ_1, relativement à la quadrique Σ_2. Donc :

Deux quadriques homofocales Σ_1, Σ_2 sont tangentes à la droite s; la droite fixe s' passe par le pôle relativement à Σ_2 (ou Σ_1) du plan (sq) [ou (sp)] tangent à la quadrique Σ_1 (ou Σ_2).

Le plan directeur du système réglé (n) du paraboloïde (P) est normal à la droite s, par suite la plus courte distance des rayons n, n' s'appuie sur la droite s' en un point, qui est le milieu de cette plus courte distance (3). Donc :

Si par une droite s on mène des plans tangents à l'une quelconque des quadriques homofocales Σ, puis les normales aux points de contact, le milieu de la plus courte distance de ces deux normales décrit la droite fixe s'.

5. Ce milieu, pour l'élément double p de l'involution (nn'), est le point $Q \equiv (ps')$; c'est le point central de la génératrice p sur la normalie ayant pour directrice une courbe (Δ) de la surface Σ_1 tangente à la droite m_1 au point S_1 car les droites s et m_1 sont deux tangentes conjuguées sur la quadrique Σ_1. Donc :

Deux quadriques homofocales Σ_1, Σ_2 sont tangentes à la droite s aux points S_1, S_2; m_1, m_2 sont les conjuguées correspondantes de la droite s. La droite fixe s' coupe la normale p (ou q) au point S_1 (ou S_2) de la surface Σ_1 (ou Σ_2), au point central de la génératrice p (ou q) sur la normalie ayant pour directrice une courbe (Δ) de la surface Σ_1 (ou Σ_2) tangente à la droite m_1 (ou m_2) au point (S_1 ou S_2).

On conclut de ce qui précède le théorème suivant :

En un point S_1 d'une courbe (Δ) tracée sur une quadrique Σ_1 on mène la tangente m_1 et sa conjuguée s, le point central de la génératrice p issue de S_1 sur la normalie dont (Δ) est la directrice, est le pôle du plan (sm_1) tangent en S_1 à la quadrique Σ_1, relativement à la quadrique Σ_2 homofocale à Σ_1 et tangente à la droite s.

Corollaire. Si la droite s est une tangente principale de la quadrique Σ_1, les points S_1 et S_2 coïncident et le point Q_2 est le centre de courbure de la section principale (pm_1) au point S_1. On retrouve ainsi cette propriété :

Les centres de courbure principaux au point S_1 de la quadrique Σ_1 sont les pôles du plan tangent en S_1 à Σ_1, par rapport aux deux quadriques homofocales à Σ_1, passant par le point S_1.

6. Le diamètre d de la conique Σ_1, passant par le point M (notations n° 1) est la polaire du point à l'infini de la tangente q à cette courbe au point M, et la normale n correspondante, tangente à la parabole (P) est rejetée à l'infini; par suite, la droite d est normale à l'axe de cette courbe. Par un point R arbitrairement choisi sur la droite q, passe une seconde tangente à la parabole (P) coupant la droite p au point R_1; la perpendiculaire abaissée de R sur le diamètre d rencontre p au point R_2. Si le point R se déplace sur la droite q, les ponctuelles (R), (R_1), (R_2) sont semblables. Mais la droite RR_2 parallèle à l'axe de la parabole (P) ne peut coïncider avec la tangente RR_1 à cette courbe que si le point R est à l'infini. Par suite les ponctuelles semblables (R_1), (R_2) ont un élément double unique à l'infini et sont égales. Le segment R_1R_2 est donc constant et pour la position M du point R, on trouve $R_1R_2 = MQ_2$. Ainsi : *D'un point* R *de la tangente en un point* M *d'une conique, on abaisse des perpendiculaires sur sa polaire et sur le diamètre passant par le point* M. *Si* R_1, R_2 *sont les points où ces perpendiculaires coupent la normale en* M, *le segment* R_1R_2 *est égal au rayon de courbure de la courbe au point* M. (Ribaucour, NAM (2), VII, p. 172.)

7. Le plan diamétral δ de la quadrique Σ_1, passant par la droite s (notations n° 3) est le plan polaire du point à l'infini de la droite m_1 et la normale n correspondante, rayon du système réglé (n), est rejetée à l'infini dans le plan μ, mené par la droite m_1 perpendiculairement au plan δ. Ce plan μ est donc le plan directeur du second système réglé (m) du paraboloïde (P) et sa trace l sur le plan ps est parallèle à la droite m_2. Par un point R arbitrairement choisi sur la droite m_1, passent un rayon n du système réglé (n) et une droite r perpendiculaire au plan diamétral δ. Les plus courtes distances $R'R_1$, $R''R_2$ des couples de droites (n, p), (r, p) sont parallèles à s et sont situées dans le plan ps. Les points R', R'' sont les traces de n, r sur le plan ps; R' est situé sur m_2 et R'' sur l. Les points R_1, R_2 sont les projections orthogonales de R' et R'' sur la droite p. La droite R'R'' du plan rn normal à la droite s, est parallèle à la droite p; on a donc $R'R'' = R_1R_2 = S_1S_2$. Ainsi : *En un point* S_1 *d'une courbe* (Δ) *tracée sur une quadrique* Σ, *on mène la tangente* m_1, *sa conjuguée* s, *et la normale* p *à la surface* Σ_1. *D'un point quelconque* R *de la droite* m_1 *on abaisse des perpendiculaires* n, r *sur son plan polaire et sur le plan diamétral passant par la droite* s. *Si* R_1, R_2 *sont les points d'appui sur la normale* p, *des plus courtes distances des*

couples de droites (p, n), (p, r), *le segment* R_1R_2 *est constant. Il est égal au segment* S_1Q_2, Q_2 *étant le point central de la génératrice p sur la normalie dont la courbe* (Δ) *est la directrice.*

8. Le plan diamétral δ est normal à l'axe du paraboloïde (P), car la direction de cet axe est donnée par l'intersection des plans directeurs de (P); par suite le plan σ mené par la droite s, perpendiculairement au plan δ est un plan diamétral du paraboloïde. Ce plan σ coupe la conjuguée Q_2P_1 de s, par rapport à cette surface, au milieu du segment Q_2P_1. Donc : *Soient* Σ_1, Σ_2 *deux quadriques homofocales tangentes à la droite donnée s;* Q_2 *le pôle par rapport à* Σ_2 *du plan tangent à* Σ_1, P_1 *le pôle par rapport à* Σ_1 *du plan tangent à* Σ_2 ; *le milieu du segment* P_1Q_2 *est dans le plan mené par s normalement au plan diamétral passant par cette droite.*

9. Le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice S_1Q_2 du paraboloïde de (P) est égal à :

$$p = \frac{S_1Q_2}{\operatorname{tg} P_1S_1S_2} = \frac{S_1Q_2.S_1S_2}{S_2P_1}.$$

Car le plan ps est le plan central tangent en Q_2, et le plan pm_1 est le plan tangent au point S_1. De même le paramètre de distribution pour la génératrice S_2P_1 est

$$p' = \frac{S_2P_1.S_1S_2}{S_1Q_2}$$

par suite $$pp' = \overline{S_1S_2}^2.$$

Ainsi : *Dans un paraboloïde hyperbolique le produit des paramètres de distribution relatifs à deux génératrices de même système et perpendiculaires entre elles, est égal au carré de la plus courte distance de ces deux droites.*

10. Le plan mené par S_1 perpendiculairement à la droite m_1 est tangent à la normalie dont (Δ) est la directrice, en un point X_1 qui est le centre de courbure en S_1 de la section normale (pm_1) de Σ_1 (BB, (3), XXIV, p. 468). Le paraboloïde (P) et cette normalie étant de raccordement le long de la génératrice p, on a :

$$-p^2 = Q_2S_1.Q_2X_1.$$

De même, si on désigne par X_2 le centre de courbure en S_2 de la section normale (qm_2) de Σ_2 on a

$$-p'^2 = P_1S_2.P_1X_2;$$

donc en posant

$$R_0 = S_1Q_2, \quad R = S_1X_1, \quad R'_0 = S_2P_1, \quad R' = S_2X_2$$

on a, d'après l'égalité (9),

$$R_0R'_0(R - R_0)(R' - R'_0) = \overline{S_1S_2}^4.$$

Soient R_1, R_2 les rayons de courbure principaux S_1C_1, S_1C_2 au point S_1 de la quadrique Σ_1; les points C_1, C_2 sont les points de contact du paraboloïde (P) avec les sections principales de la quadrique Σ_1 (Mannheim, G. D., p. 293). On a donc :

$$Q_2C_1 . Q_2C_2 = -p^2 \quad \text{ou} \quad (R_1 - R_0)(R_2 - R_0) = -p^2.$$

De même pour la quadrique Σ_2 on a :

$$R'_1 - R'_0)(R'_2 - R'_0) = -p'^2$$

par suite :

$$(R_1 - R_0)(R_2 - R_0)(R'_1 - R'_0)(R'_2 - R'_0) = \overline{S_1S_2}^4.$$

On a donc le théorème suivant : *Soient Σ_1, Σ_2 deux quadriques homofocales tangentes à la droite s, aux points S_1, S_2; m_1 la conjuguée de s par rapport à Σ_1; p la normale à Σ_1 au point S_1; R_1, R_2 les rayons de courbure principaux de Σ_1, au point S_1; R le rayon de courbure en S_1 de la section normale (pm_1) de Σ_1; R_0 l'ordonnée S_1Q_2 du point central Q_2 sur la génératrice p de la normalie dont la directrice (Δ) est une courbe tangente en S_1 à la droite m_1. On désigne par R'_1, R'_2, R', R'_3 les grandeurs analogues pour la surface Σ_2 au point S_2; cela étant on a :*

$$R_0R'_0(R - R_0)(R' - R'_3) = \overline{S_1S_2}^4$$

$$(R_1 - R_0)(R_2 - R_0)(R'_1 - R'_0)(R'_2 - R'_0) = \overline{S_1S_2}^4.$$

11. Un plan de symétrie α des quadriques homofocales Σ_1 et Σ_2 tangentes à la droite s, coupe les normales S_1Q_2, S_2P_1 à ces surfaces (notations n° 3) aux points N_1, N_2. Les pôles du plan (S_1q) relativement à Σ_1, Σ_2, et à la conique focale (α) sont respectivement S_1, Q_2, N_1 (4). Les pôles correspondants du plan (S_2p) sont P_1, S_2, N_2. La similitude des ponctuelles $(S_1Q_2N_1\ldots)$, $(P_1S_2N_2\ldots)$ donne :

$$\frac{S_1N_1}{S_1Q_2} = \frac{P_1N_2}{P_1S_2} = \frac{P_1S_2 + S_2N_1}{P_1S_2}$$

ou

$$\frac{S_1N_1}{S_1Q_2} + \frac{S_2N_2}{S_2P_1} = 1.$$

Ainsi : *Si* N, N′ *désignent les longueurs des normales aux points* S_1, S_2 *des quadriques homofocales* Σ_1, Σ_2 *tangentes à la droite s en ces points, limitées à un plan de symétrie de ces surfaces, on a :*

$$\frac{N}{R_0}+\frac{N'}{R_0'}=1.$$

12. Soient M un point d'une surface quelconque (S), n, t_1, t_2 la normale et les tangentes principales, C_1, C_2 les centres de courbure des sections principales $\mu_1 \equiv nt_1$, $\mu_2 \equiv nt_2$. Les parallèles n_1, n_2 menées par les points C_1, C_2 respectivement aux droites t_1, t_2 sont les normales aux points C_1, C_2 aux deux nappes Σ_1, Σ_2 de la surface des centres de courbure de la surface (S). Si le point M se déplace sur la ligne de courbure (Δ_1) tangente en M à la droite t_1, la normale n engendre une surface développable dont l'arête de rebroussement (C_1) appartient à Σ_1. Cette surface développable est circonscrite à la nappe Σ_2 le long de la courbe (C_2) décrite par le point C_2. Soient M′ une position de M sur la courbe (Δ_1), μ_1', μ_2' les plans principaux, C_1', C_2' les centres de courbure correspondants. Le plan μ_2' est tangent à la nappe Σ_1 au point C_1'; on en conclut que la droite n (limite de C_1C_1') et l'axe de courbure m_1 de la courbe (Δ_1) au point M, (limite de la droite $\mu_2\mu_2'$) sont deux tangentes conjuguées sur la nappe Σ_1. Le plan μ_1' est tangent à la nappe Σ_2 au point C_2', donc la droite n (limite de la droite $\mu_1\mu_1'$) et la tangente m_2 au point C_2 de la courbe (C_2) (limite de la droite C_2C_2') sont deux tangentes conjuguées sur la nappe Σ_2. Les normales n_2' à la nappe Σ_2 aux différents points C_2' de la courbe (C_2) engendrent une surface réglée (n_2). Le plan μ_2 passant par la génératrice n_2 de cette surface, lui est tangent en un point P_1 qui est la limite du point $(\mu_2 n_2')$. Ce point $(\mu_2 n_2')$ appartenant à la droite $\mu_2\mu_2'$, sa limite P_1 est un point de la droite m_1. Ainsi le point P_1 est à l'intersection des droites n_2 et m_1. On sait que le plan $(n_2 s) \equiv \mu_2$ est le plan central de la génératrice n_2 de la normalie (n_2); par suite le point P_1 est le point central correspondant. On a donc le théorème suivant : *Les deux nappes* Σ_1, Σ_2 *de la surface focale de la congruence des normales à une surface* (S) *sont tangentes à une droite n de la congruence aux points* C_1, C_2 ; *on désigne par* n_1, n_2 *les normales aux points* C_1, C_2 *à la surface focale, par* m_1, m_2 *les conjuguées de la tangente n sur chacune des nappes* Σ_1, Σ_2 ; *le point* $P_1 \equiv (n_2 m_1)$ *est le point central sur la génératrice* n_2 *de la normalie* (n_2) *relative à* Σ_2 *et ayant pour directrice une courbe de* Σ_2 *tangente en* C_2 *à la droite* m_2.

Le point $Q_2 \equiv (n_1 m_2)$ jouit de la propriété analogue pour la nappe Σ_1.

13. Le paraboloïde passant par les côtés n_1, m_1, n_2, m_2 du quadrilatère gauche $C_1P_1C_2Q_2$ a un plan directeur normal à la droite n; le plan nn_2 est donc le plan central de la génératrice n_2 et le point P_1 est le point central correspondant. Ce paraboloïde tangent en C_2 au plan (m_2n_2) est donc de raccordement le long de la génératrice n_2 avec la normalie (n_2) (12) relative à Σ_2. Il est de même de raccordement le long de la génératrice n_1 avec la normalie (n_1) relative à Σ_1. Mais le produit des paramètres de distribution le long des génératrices n_1, n_2 du paraboloïde est égal à $\overline{C_1C_2}^2$ (9). Par suite : *Soient p le paramètre de distribution sur la génératrice n_1 de la normalie (n_1) relative à Σ_1 et dont la directrice est tangente en C_1 à la droite m_1; p' le paramètre de distribution sur la génératrice n_2 de la normalie (n_2) relative à Σ_2 et dont la directrice est tangente en C_2 à la droite m_2*; on a

$$pp' = \overline{C_1C_2}^2.$$

14. Si la nappe Σ_1 se réduit à une courbe (C_1), la surface (S) est alors l'enveloppe d'une sphère de rayon variable dont le centre décrit la courbe (C_1). Une ligne de courbure Δ_1 au point M de (S) est circulaire et les normales aux différents points de cette courbe forment nn cône de révolution de sommet C_1 et circonscrit à la nappe Σ_2 le long d'une conique (C_2) lieu des centres de courbure C_2 correspondant à ces normales (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 266). La normale n et la tangente m_2 au point C_2 à cette conique sont deux tangentes conjuguées sur la nappe Σ_2 et par suite (12), la droite m_2 est l'axe de courbure de la seconde ligne de courbure Δ_2 au point M de la surface (S). Les normales à la surface (S) le long de Δ_2 engendrent une développable (D) passant par la courbe (C_1); donc la tangente m_1 à la courbe (C_1) au point C_1 est dans le plan μ_2. Cette droite m_1 indépendante de la position de M sur Δ_1 est l'axe de ce cercle Δ_1. Les normales à la développable (D) le long de la courbe (C_1) engendrent une surface réglée (n_1) tangente au plan m_2n_1 au point $Q_2 \equiv (m_2n_1)$ qui est ainsi le point central de la génératrice n_1 sur (n_1); la démonstration est identique à celle faite au n° 12 pour le point $P_1 \equiv (m_1n_2)$. Les normales à Σ_2 le long de la conique (C_2) engendrent une surface réglée (n_2), le point $P_1 \equiv (m_1n_2)$ est le point central de la génératrice n_2 sur cette surface.

Ainsi les propriétés **12**, **13** sont applicables au cas où la nappe Σ_1 se

réduit à une courbe (C_1) si l'on substitue 1° à la droite m_1 conjuguée de n sur la nappe Σ_1, la tangente m_1 à la courbe (C_1) au point C_1; 2° à la normalie (n_1) relative à la nappe Σ_1, la normalie à la développable (D) le long de la courbe (C_1).

15. *Soient π_1, π_2, n les plans principaux et la normale au point* M *d'une quadrique Σ_1; α, β deux plans de symétrie de cette surface. Au point* N_α *où la normale n coupe le plan α, on élève sur cette droite dans le plan π_1 une perpendiculaire p. Cette droite p rencontre le plan déterminé par le point* M *et l'axe de symétrie $(\alpha\beta)$, en un point situé dans le plan mené parallèlement au plan β, par le centre de courbure C_1 de la section principale (π_1).*

On désigne par t_1, t_2 les tangentes au point M des sections principales (π_1), (π_2) de la quadrique Σ_1. Les conjuguées de la droite t_2, relativement au système de quadriques homofocales à Σ_1, enveloppent une parabole (P) située dans le plan π_1 et tangente aux droites n, t_1, $(\pi_1\alpha)$, $(\pi_1\beta)$; le point de contact de la tangente n est le centre de courbure C_1 de la section principale (π_1). La détermination de ce point de contact C_1 par le théorème de Brianchon montre que les droites p, MS, $[S \equiv (\alpha\beta\pi_1)]$ se coupent sur la parallèle menée par le point C_1 à la droite $(\pi_1\beta)$ ce qui établit la proposition énoncée.

16. L'axe de la parabole (P) est normal au plan diamétral δ de la quadrique Σ_1 mené par la tangente t_2 (8). La direction de cet axe peut remplacer la tangente $(\pi_1\beta)$ à cette parabole dans la détermination du point C_1. Le théorème de Brianchon donne alors la construction suivante : on trace par le point M une parallèle l à la droite $(\pi_1\alpha)$; elle rencontre la droite p en un point de la droite m, menée par le point C_1 parallèlement à l'axe de la parabole. Donc :

Le plan mené par le point M *parallèlement au plan de symétrie a coupe la droite p en un point situé sur la perpendiculaire abaissée du centre de courbure C_1 de la section principale (π_1), sur le plan diamétral de la quadrique Σ_1, passant par la tangente principale t_2.*

Ces déterminations du point C_1 généralisent des constructions du centre de courbure en un point d'une conique.

Remarque. Le plan diamétral δ coupe p au point S de l'intersection k du plan δ avec le plan mené normalement à n par le point $(n\alpha)$. Les droites MS, p sont deux hauteurs du triangle lmn, donc la droite C_1S est

perpendiculaire à la droite l. On en conclut que le plan (kC_1) est normal à la droite l et par suite normal au plan α. Ainsi :

Par la trace N_α sur le plan de symétrie α de la normale n, on mène un plan perpendiculaire à cette droite et coupant le plan diamétral δ suivant la droite k. Le plan mené par cette droite normalement au plan α, rencontre la normale n au centre de courbure (C_1).

Cette construction du point C_1 a été établie analytiquement par Laguerre (loc. cit. p. 524).

RÉSOLUTION GRAPHIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ,

par M. P. Noaillon (Chênée).

1. On connaît cette question classique, dite *problème de Pappus : Etant données deux droites X'X, Y'Y qui se coupent en O, mener par un point donné P une sécante AB telle que le segment intercepté entre X'X et Y'Y ait une longueur donnée m* (fig. 1).

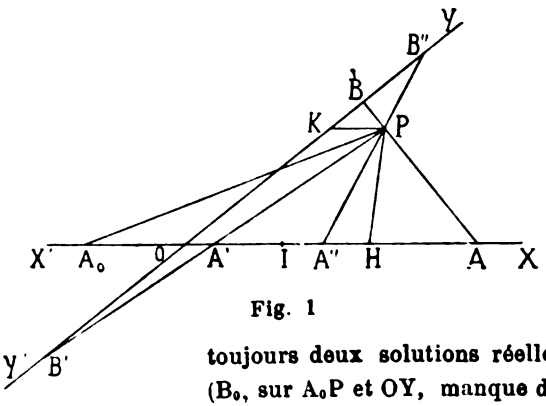


Fig. 1

Nous supposerons le point P situé dans l'angle XOY. Le problème admet alors toujours deux solutions réelles, une sécante A_0B_0 (B_0, sur A_0P et OY, manque dans la figure) passant dans l'angle X'OY et une sécante A'B' passant dans l'angle XOY'; il admet deux solutions AB et A''B'' dans l'angle XOY, si la longueur m surpasse un certain minimum (Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 68).

Lorsque P est équidistant de X'X et Y'Y, les sécantes cherchées peuvent se construire avec la règle et le compas. Dans tous les cas, on peut les obtenir mécaniquement en faisant glisser un segment de droite de longueur m entre X'X et Y'Y et, en cherchant les positions telles que le segment lui même ou son prolongement passe par P.

On peut disposer la figure de manière à se donner d'avance une solution; alors le problème ne dépend plus que d'une équation du

troisième degré et les racines de celle-ci s'obtiendront graphiquement. Tel est le principe de notre résolution de l'équation cubique.

2. Soient donc A_0B_0, AB deux sécantes de longueur m, passant par P; la première est supposée connue. Menons PK parallèle à OY et se terminant en K à OX; nous poserons

$$OA = x, \quad OA_0 = x', \quad PB = z, \quad PB_0 = z', \quad KP = l.$$

Pour rendre nos relations applicables à tous les cas, nous observerons la règle des signes en considérant les directions OX, OY, AB comme positives. Cela posé, les triangles semblables BKP et BOA, B_0KP et B_0OA_0 donnent

$$\frac{z}{m} = \frac{l}{x}, \quad \frac{x'}{m} = \frac{l}{x'}, \quad \text{d'où} \quad xz = x'z'. \tag{1}$$

Abaissons PH perpendiculaire à Ox et appelons I le milieu de A_0A, d la distance OH. Nous aurons

$$\overline{PA}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HA}^2, \quad \overline{PA_0}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HA_0}^2,$$

d'où par soustraction

$$\overline{PA}^2 - \overline{PA_0}^2 = \overline{HA}^2 - \overline{HA_0}^2 = (HA + HA_0)(HA - HA_0) = 2HI.A_0A,$$

ce qui revient à

$$(m - z)^2 - (m - z')^2 = (x + x' - 2d)(x - x'),$$

ou

$$(z' - z)(z' + z - 2m) = (x' - x)(x' + x - 2d). \tag{2}$$

Eliminons z entre (1) et (2); nous aurons

$$x^3 + (x' - 2d)x^2 + x'(z' - 2m)x + x'z'^2 = 0. \tag{3}$$

Comme les équations (1) et (2) ne changent pas quand on échange à la fois x et z, x' et z', d et m, on peut écrire immédiatement

$$z^3 + (z' - 2m)z^2 + x'(x' - 2d)z + z'x'^2 = 0. \tag{4}$$

3. Considérons maintenant l'équation cubique

$$x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0. \tag{5}$$

Elle devient identique à l'équation (3) si l'on fait

$$x' - 2d = A_1, \quad z'(z' - 2m) = A_2, \quad x'z'^2 = A_3.$$

c'est-à-dire

$$x' = \frac{A_3}{z'^2}, \quad 2d = x' - A_1, \quad 2m = z' - \frac{A_2}{z'}, \tag{6}$$

où nous prendrons z' arbitrairement, positif ou négatif, mais de manière que m soit positif.

A_1, A_2, A_3 sont des nombres donnés, positifs, négatifs ou nuls ; en adoptant une unité de longueur, on déduira des formules (6) des longueurs (positives ou négatives) qui représentent x', d et m. Cela fait, portons sur une droite quelconque X'X à partir d'une origine O les abscisses $OA_0 = x'$, $OH = d$ en observant la règle des signes. Construisons ensuite le triangle rectangle A_0HP en prenant pour hypoténuse la valeur absolue de $m - z'$; enfin, plaçons sur A_0P la longueur $A_0B_0 = m$ et traçons la droite OB_0Y. Il reste à mener par P les autres sécantes A'B', AB, A''B''; les racines de (5) seront OA', OA, OA''.

Pour que cette construction soit applicable, la valeur absolue de $m - z'$ doit être plus grande que A_0H.

4. On pourrait encore identifier les équations (5) et (4) en posant

$$z' = \frac{A_3}{x'^2}, \quad 2m = z' - A_1, \quad 2d = x' - \frac{A_2}{x'},$$

où x' reste arbitraire. Les constructions sont les mêmes que ci dessus, et les racines de (5) seront PB', PB, PB''.

5. La sécante AB coïncide avec A''B'' lorsque P est le point de contact de AB avec son enveloppe dans un glissement entre X'X et Y'Y, c'est-à-dire lorsque les perpendiculaires élevées en A, B, P respectivement sur X'X, Y'Y, AB concourent en un même point; alors AB est la sécante minimum menée par P.

Soient x_1, x_2, x_3 les trois racines de (3); on a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2d - x', \quad \text{d'où} \quad \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x') = \tfrac{1}{2}d.$$

Il résulte de là que le centre de gravité des quatre points A_0, A, A', A'' est au milieu de OH. Semblablement, celui des points B_0, B, B', B'' coïncide avec la projection du milieu de la distance OP sur Y'Y.

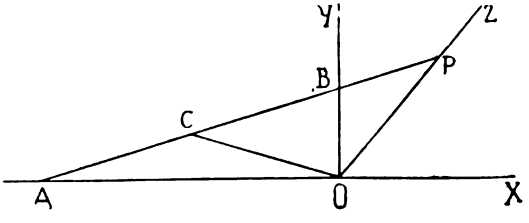


Fig. 2.

6. Pour terminer nous rattachons au problème de Pappus la trisection d'un angle donné XOZ (fig. 2).

Prenons sur OZ une longueur quelconque OP et menons OY perpendiculaire à OX ; cherchons ensuite une sécante passant par P et telle que le segment AB intercepté entre OX et OY soit égal à 2OP. L'angle OAB sera égal à $\frac{1}{3}$ XOZ; en effet, si C est le milieu de AB, nous aurons CO = CA = CB = OP ; d'où

$$\textit{angle}\ \mathrm{OPC} = \mathrm{OCP} = \mathrm{OAC} + \mathrm{AOC} = 2\mathrm{OAC},$$
$$\textit{angle}\ \mathrm{XOZ} = \mathrm{OAP} + \mathrm{OPA} = 3\mathrm{OAP}.$$

L'une des sécantes de longueur 2OP et passant par P est symétrique de OP par rapport à l'ordonnée de P et ne compte pas dans le problème de la trisection. Les autres sécantes font avec OX les angles $\frac{1}{3}$ XOZ. $\frac{1}{3}\mathrm{XOZ} + \frac{2\pi}{3}$, $\frac{1}{3}\mathrm{XOZ} + \frac{4\pi}{3}$.

BIBLIOGRAPHIE.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von L. Heffter und C. Köhler. I. Band : Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Leipzig und Berlin, Teubner, 1905 (XVI-527 p. in-8°). Prix : 14 marcs.

« Parmi les nombreux traités de géométrie analytique parus dans ces derniers temps, l'ouvrage de MM. Hefftar et Köhler occupe une place toute particulière. C'est un essai, exécuté avec beaucoup de soins et d'habileté, de tenir compte complètement, dès les commencements, des points de vue scientifiques modernes. Pour se conformer à ce programme, les auteurs ont séparé nettement dans leurs développements les trois divisions de la géométrie qu'on obtient en considérant successivement le groupe des transformations projectives, celui des transformations affines et enfin celui des transformations par similitude; le lecteur verra comment chacun des deux derniers groupes est subordonné à celui qui le précède. Ces divisions sont appelées ici respectivement géométrie projective, affine et équiforme; elles comportent chacune des invariants absolus caractéristiques qui sont utilisés dans le système de coordonnées approprié. Une attention très grande a été accordée à l'énonciation correcte des résultats, dans le sens des vœux de E. Study demandant des définitions précises et l'indication exacte des limites entre lesquelles une proposition de géométrie est valable. L'auteur du présent compte-rendu n'approuve pas toutes les définitions nouvelles introduites par MM. Heffter et Köhler en vue d'énoncés faciles et exacts sans exceptions. Il considère comme inutiles l'introduction de la conique identique à laquelle appartiennent tous les points du plan, et celle du faisceau identique qui ne possède qu'un élément. A continuer ainsi, un point isolé pourrait être considéré comme un espace spécial d'un nombre quelconque de dimensions.

D'après le contenu, le livre offre un cours complet de géométrie analytique, traitant des figures rectilignes et des coniques, précédé d'une étude approfondie des formes fondamentales du premier ordre et dépassant les limites ordinaires des manuels dans les chapitres relatifs aux faisceaux ponctuels ou tangentiels de coniques. Outre la manière générale d'exposer la science, on peut signaler une certaine originalité dans un grand nombre de détails, notamment dans les propriétés métriques des figures affines. Des tableaux synoptiques des résultats acquis facilitent souvent l'intelligence des différents chapitres.

En résumé, nous avons devant nous un manuel original et de valeur que nous pouvons vivement recommander aux étudiants déjà en possession des premiers éléments de la science qui désirent étendre leur horizon et augmenter leurs connaissances. » (G K. dans les *Literaturberichte* des *Monatshefte für Math. und. Phys*, XVIII, 1907, p. 21).

Nous nous rallions aux appréciations explicitement formulées ou sous-entendues dans l'analyse précédente. L'ouvrage n'est pas écrit pour des commençants; étant trop touffu (beleidigend ausgebreitet) et peu excitateur à cause de l'absence d'exercices intéressants; il manque de qualités didactiques essentielles. Mais il peut rendre de grands services à ceux qui ont déjà étudié la géométrie cartésienne et voudraient approfondir la science dans ses tendances modernes.

E. V. Huntington. **La Continuo.** Elementa teorio starigita sur la ideo de ordo kun aldono pri transfinitaj nombroj. Tradukita de la angla linguo kun la aùtoro de Raoul Bricard. Paris, Gauthier-Villars, 1907 (In-16 de X-125 pp.). Prix : 2 fr. 75.

Préface du traducteur. « L'original de cet ouvrage, réimprimé du journal américain *Annals of Mathematics* (VI, VII, 1905) est intitulé [en anglais] : *Le continu comme un type d'ordre; exposition de la théorie moderne avec un appendice sur les nombres transfinis.*

M. Huntington y présente, sous une forme qui semble définitive, le résultat de recherches très importantes qui ont exigé beaucoup d'efforts des plus éminents mathématiciens de la fin du dix-neuvième siècle. Son ouvrage rigoureux, concis et bien rédigé, est destiné à devenir classique. Il m'a semblé très intéressant de le rendre international et d'enrichir ainsi la littérature scientifique de l'Esperanto [en le traduisant dans cette langue], ce à quoi consentirent aimablement l'auteur et les éditeurs des *Annals of Mathematics.* »

La théorie des ensembles ne rentre pas dans le programme de *Mathesis.* Si nous signalons cet opuscule de M. Huntington à nos lecteurs, c'est parce que la traduction qu'en a faite M. Bricard est écrite en *esperanto.* Le traducteur, qui a publié chez Hachette, en 1905, un *vocabulaire mathématique esperanto avec chrestomatie,* a dû naturellement imaginer quelques mots nouveaux pour rendre les termes de la théorie très moderne des ensembles. On en trouve la liste à la fin du livre avec traduction française, anglaise, allemande (celle ci parfois mal orthographiée). L'orthographe esperantiste de M. Bricard n'est pas toujours non plus orthodoxe, ce qui est assez inquiétant pour l'avenir de langue artificielle créée par le Dr Zamenhof.

NOTES MATHÉMATIQUES.

10. *Théorèmes sur les transversales.* 1. Soient AA_1, BB_1, CC_1 trois transversales angulaires d'un triangle ABC, se coupant au point P_1, et soient A'_1, B'_1, C'_1 les isotomiques de leurs pieds A_1, B_1, C_1. Les droites AA'_1, BB'_1, CC'_1 se coupent au point P'_1 réciproque de P_1. Les coordonnées barycentriques des points P_1 et P'_1 étant (α, β, γ), $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$, les équations des transversales angulaires des points P_1, P'_1 seront

$$\frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{z}{\gamma} = \frac{x}{\alpha}, \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta};$$

$$\beta y = \gamma z, \ \gamma z = \alpha x, \ \alpha x = \beta y.$$

Cela posé, menons par le point d'intersection de AA_1 avec BB'_1 la transversale angulaire CC_2, par le point (BB_1, CC'_1) la transversale AA_2, enfin par le point (CC_1, AA'_1) la transversale BB_2; ces nouvelles droites auront pour équations

$$\frac{y}{\beta} = \frac{\alpha x}{\gamma^2}, \quad \frac{z}{\gamma} = \frac{\beta y}{\alpha^2}, \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{\gamma z}{\beta^2}.$$

Par conséquent, elles se coupent en un point P_2, de coordonnées

$$\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\alpha}.$$

Semblablement, les droites joignant C, A, B respectivement aux points (AA'_1, BB_1), (BB'_1, CC_1), (CC'_1, AA_1) concourent au point P'_2 $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, réciproque de P_2.

On obtient un théorème analogue si on remplace les droites AA'_1, BB'_1, CC'_1 par les isogonales des droites AA_1, BB_1, CC_1.

2. Soient maintenant A_1, B_1, C_1 les points où une transversale quelconque P_1 rencontre BC, CA, AB et soient A'_1, B'_1, C'_1 leurs isotomiques situés sur la transversale p'_1, réciproque de p. Les droites $A_1B'_1$, $B_1C'_1$, $C_1A'_1$ rencontrent respectivement AB, BC, CA en trois points C_2, A_2, B_2 situés sur une même droite p_2, et les droites A'_1B_1, B'_1C_1, C'_1A_1 coupent ces côtés en trois points C'_2, A'_2, B'_2 situés sur une seconde droite p'_2. Si les équations de p_1 et p'_1 sont

$$ux + vy + wz = 0, \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0,$$

celles de p_2 et p'_2 sont

$$\frac{w}{v}x + \frac{u}{w}y + \frac{v}{u}z = 0, \quad \frac{v}{w}x + \frac{w}{u}y + \frac{u}{v}z = 0.$$

(TERRACINI, Turin).

11. *Sur la conique* [GK], *passant par les pieds des médianes et des symédianes.* (Voir *Mathesis*, juin et juillet 1905.) La conique [GK] peut être considérée comme la conique des neuf points du quadrangle ABCK, lieu des centres des coniques passant par les quatre points A, B, C, K. Il en résulte que la conique [GK] coupe une quatrième fois le cercle d'Euler au centre de l'hyperbole équilatère ABCK ou hyperbole de Jerabeck. (EMILE WEBER)

×**12.** *Géométrie du triangle.* La collinéation suivante semble avoir été peu remarquée :

H, orthocentre du triangle ABC;

G', centre de gravité du périmètre;

J, point de concours des perpendiculaires abaissées des centres des cercles ex-inscrits sur les côtés de ABC.

Il suffit d'observer que I et J sont symétriques par rapport au centre O du cercle ABC; que I et G' sont des points complémentaires, de manière que G divise la droite IG' dans le rapport 2 : 1; enfin que G est le centre de gravité du triangle HIJ. (EMILE WEBER)

×**13.** *Théorèmes d'Arithmologie.* Un zélé correspondant nous signale les deux identités

$$n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2,$$

$$n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2.$$

desquelles il conclut que *le cube de tout nombre entier et la somme des cubes de deux nombres entiers consécutifs sont toujours des différences de deux carrés.*

Ces identités sont des cas particuliers de la suivante, bien connue :

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

il suffit de prendre respectivement $a = n^2$, $b = n$ et $a = n^2 + n + 1$, $b = (2n+1)$. Pour avoir une décomposition de ab en une différence de deux carrés entiers, il faut supposer a et b de même parité.

En particulier, si a est impair, on peut écrire

$$a = a \times 1 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2,$$

identité qui fournit pour n^3 et pour $n^3 + (n+1)^3$ deux autres décompositions en différences de deux carrés. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (*).

Question 1133.

(Voir *Mathesis*, XVII, p. 214; (3), V, p 31).

Un triangle ABC *de forme invariable se déplace de façon que ses côtés restent tangents à une hypocycloïde à trois rebroussements. L'orthocentre et le centre du cercle circonscrit décrivent un même cercle. La droite d'Euler enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Le centre de gravité décrit une hypocycloïde à trois rebroussements à laquelle la droite d'Euler est normale. Un point quelconque, invariablement lié au triangle* ABC *(c'est-à-dire dont les coordonnées normales par rapport à ce triangle ne varient pas) décrit une hypotrochoïde.* (A. Gob)

Pour démontrer cette proposition, considérons, en général, un triangle donné ABC; soient H son orthocentre, O le centre du cercle circonscrit. Désignons par A', B', C' les projections d'un point P du cercle O sur les côtés BC, CA, AB; on sait que ces points sont sur une même droite d, droite de Simson ou pédale de P.

Si P parcourt le centre O, d enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements que nous représenterons par le symbole $\mathfrak{H}$; cette courbe est tritangente au cercle d'Euler (des neuf points) du triangle ABC.

Faisons tourner les projetantes PA', PB', PC' d'un même angle α autour de P; soient A'', B'', C'' les points de rencontre de ces droites avec BC, CA, AB. On sait que A'', B'', C'' sont situés sur une même droite d_α, appelée droite de Simson d'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$, ou *pédale oblique* de P. Lorsque P se déplace sur le cercle ABC, la pédale d_α enveloppe $\mathfrak{H}_\alpha$

$\mathfrak{H}$ étant l'enveloppe de d et $\mathfrak{H}_\alpha$ l'enveloppe de d_α, ces courbes sont semblables On peut ramener $\mathfrak{H}_\alpha$ à $\mathfrak{H}$ par les transformations suivantes (A Gob, *Sur l'hypocycloïde*) : 1° multiplier les rayons vecteurs issus de H par $\cos\alpha$; 2° faire tourner la figure de l'angle α autour de H;

(*) Nous avons reçu trop tard pour les mentionner antérieurement, de M. Droz Farny, des solutions des questions 1582 et 1691.

3° faire tourner la figure de l'angle $\frac{4\alpha}{3}$ autour du centre ω du cercle d'Euler (des neuf points), en sens contraire à la rotation précédente.

Ces opérations changent un triangle ABC circonscrit à $\mathfrak{D}_\alpha$ en un triangle *abc* circonscrit à $\mathfrak{D}$, dont les côtés sont égaux à BC cos α, CA cos α, AB cos α, et font avec BC, CA, AB l'angle $\frac{\alpha}{3}$.

Donc, étant donnés $\mathfrak{D}$ et son triangle principal ABC, si l'on fait varier l'angle α, on obtient une série de triangles *abc*, circonscrits à $\mathfrak{D}$ et semblables à ABC; le rapport de similitude de *abc* et ABC est égal à cos α.

Cherchons les positions de l'orthocentre *h* et du centre *o* du cercle circonscrit relatifs à un triangle *abc* circonscrit à $\mathfrak{D}$ et semblable à ABC. Soient H, ω, O l'orthocentre, le centre du cercle d'Euler, le centre du cercle circonscrit à ABC. Appliquons à HO les trois transformations successives qui changent $\mathfrak{D}_\alpha$ en $\mathfrak{D}$ et ABC en *abc*. La droite HO doit d'abord tourner autour de H de l'angle α et devenir égale à HO cos α; donc elle deviendra la corde HI, qui dans le cercle de diamètre HO fait avec HO l'angle α. Elle doit ensuite tourner autour de ω, dans le sens opposé, de l'angle $\frac{4\alpha}{3}$; donc si *h* est sa position définitive, on a angle $H\omega h = \frac{4\alpha}{3}$, $O\omega o = -\frac{2\alpha}{3}$.

Par conséquent, l'orthocentre *h* et le centre *o* du cercle circonscrit d'un triangle *abc*, circonscrit à $\mathfrak{D}$ et semblable à ABC, se trouvent sur le même cercle de diamètre HO.

Parce que les angles $H\omega h = \frac{4\alpha}{3}$, $O\omega o = \frac{-2\alpha}{3}$, la droite *ho* se déplace dans le cercle HO, de manière que les vitesses angulaires des points *h* et *o* sont $\frac{4\alpha}{3}$, $\frac{-2\alpha}{3}$, [illegible] donc la droite d'Euler *ho* enveloppe [illegible] $\mathfrak{D}$ [illegible] au cercle de diamètre HO.

[illegible] $\mathfrak{D}$ [illegible] N de *h* par [illegible]

[illegible] $\mathfrak{D}$ [illegible] un triangle [illegible] N [illegible] hypocycloïde le [illegible] —

En particulier, deux points de la droite *ho* décrivent des hypocycloïdes; ces points sont le symétrique N de *h* par rapport à *o*, qui est le point de contact de *ho* avec son enveloppe et le point qui divise *ho* additivement dans le rapport $^1/_2$; or, ce point n'est autre que le centre de gravité de *abc*; donc ce centre de gravité décrit une ℙ, qui est une développante de l'hypocycloïde lieu de N. Donc *ho* reste normale à cette hypocycloïde ℙ

Les droites M*h* et M*o*, qui ont des inclinaisons constantes sur *ho*, enveloppent des hypocycloïdes.

Ces développements reproduisent à peu près ceux que l'auteur de la question a donnés dans sa note *Sur l'hypocycloïde*. (ABRAMESCU)

×Question 1585.

(Voir *Mathesis* (3), VI, p. 200 et VII, p. 53).

Si a et b sont des nombres rationnels, tels que $(a - b^3)b$ *soit positif, le nombre*

$$\sqrt[3]{a + \frac{8b^3 + a}{3b}\sqrt{\frac{a - b^3}{3b}}} + \sqrt[3]{a - \frac{8b^3 + a}{3b}\sqrt{\frac{a - b^3}{3b}}}$$

est rationnel. (J. TANNERY)

Solution par M. ABRAMESCU. Posons, en général,

$$\sqrt[3]{A + B\sqrt{C}} = x + y\sqrt{C}, \qquad (1)$$

x, y, C étant rationnels; on a, en élévant au cube,

$$A + B\sqrt{C} = x^3 + 3xy^2C + \sqrt{C}(y^3C + 3x^2y).$$

D'où $A = x^3 + 3x^2yC, \quad B = y^3C + 3x^2y;$

on a donc à résoudre le système :

$$x^3 + 3xy^2C = A, \quad (2); \qquad y^3C + 3x^2y = B. \qquad (3)$$

Ecrivons-le ainsi, après avoir multiplié (2) par y;

$$y^3C = -3x^2y + B, \quad 3xy^2C = -x^3y + Ay;$$

en divisant ces égalités membre à membre, on obtient

$$\frac{1}{3x} = \frac{3x^2y - B}{x^3y - Ay}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{3Bx}{8x^3 + A}.$$

Portons cette valeur de y dans l'équation (2), nous aurons l'équation qui donne x,

$$64x^9 - 48Ax^6 - 15A^2x^3 + 27B^2Cx^3 - A^3 = 0,$$
$$(4x^3 - A)^3 = (3x)^3 (A^2 - B^2C). \qquad (4)$$

Donc, la condition nécessaire pour que l'expression (1) puisse être transformée, est que le nombre $A^2 - B^2C$ soit cube parfait Cette condition étant remplie, l'équation (4) devient,

$$4x^3 - 3x\sqrt[3]{A^2 - B^2C} - A = 0. \qquad (5)$$

Pour trouver y, reprenons le système (2) (3) après avoir multiplié (3) par x, c'est-à-dire

$$x^3 = -3xy^2C + A, \quad 3x^3y = -Cy^3x + Bx;$$

divisant, on trouve

$$\frac{1}{3y} = \frac{3xy^2C - A}{xy^3C - Bx}, \quad x = \frac{3Ay}{8y^3C + B}.$$

Remplaçant x par cette valeur dans l'équation (3), on trouve

$$(B - 4Cy^3)^3 = 27y^3(A^2 - B^2C).$$

Supposons $A^2 - B^2C$ cube parfait; l'équation qui donne y sera

$$4Cy^3 + 3y\sqrt[3]{A^2 - B^2C} - B = 0. \qquad (6)$$

Soient r et s des racines des équations (5) et (6), telles que

$$\sqrt[3]{A + B\sqrt{C}} = r + s\sqrt{C}, \quad \sqrt[3]{A - B\sqrt{C}} = r - s\sqrt{C};$$

alors

$$\sqrt[3]{A + B\sqrt{C}} + \sqrt[3]{A - B\sqrt{C}} = 2r.$$

Dans le cas proposé (*Mathesis*, (3), VI, p. 200),

$$A = a \quad B = \frac{2b^3 + a}{3b}, \quad C = \frac{a - b^3}{3b},$$

et $A^2 - B^2C$ n'est pas cube parfait; mais si l'on pose $B = \frac{8b^3 + a}{3b}$, on a

$$A^2 - B^2C = \frac{(4b^3 - a)^3}{27b^3}.$$

Les équation (5) et (6) deviennent

$$4x^3 - \frac{4b^3 - a}{b}x - a = 0, \quad 4(a - b^3)y^3 + 3(4b^3 - a)y - (8b^3 + a) = 0,$$

et ont pour racines rationnelles $x = b$, $y = 1$. Donc

$$\sqrt[3]{a \pm \frac{8b^3 + a}{3b}\sqrt{\frac{a - b^3}{3b}}} = b \pm \sqrt{\frac{a - b^3}{3b}},$$

et l'expression donnée a pour valeur $2b$.

Question 1590.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 232).

La tangente en un point M *d'une courbe plane* (C) *rencontre l'axe* OY *en* T, *la perpendiculaire abaissée de* T *sur le rayon* OM *coupe l'axe* OX *en* R. *Déterminer la courbe* (C) *par la condition que la distance* OR *soit à la sous-normale ou à la sous-tangente en* M *dans un rapport constant.*

(J. Rose)

Solution par M. Abramescu. (x, y) étant les coordonnées de M, celles de T seront $(0, y - xy')$. La perpendiculaire abaissée de T sur OM $\left(Y = \frac{y}{x} X\right)$, coupant OX en R, on a

$$OR = \frac{y}{x}(y - xy'), \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right).$$

La sous-normale et la sous-tangente en M ayant pour valeurs

$$\pm \frac{y}{y'}, \quad yy',$$

nous aurons à intégrer les équations différentielles :

$$\frac{y}{x}(y - xy') = a\frac{y}{y'}, \quad \frac{y}{x}(y - xy') = ayy',$$

ou $$y - xy' = axy', \quad y'(y - xy') = ax,$$

a désignant une constante positive ou négative.

1° $$y = (a + 1)x\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{y}(a + 1) = \frac{dx}{x};$$

d'où la courbe (C),

$$y^{a+1} = Cx;$$

l'hypothèse $a = 1$ donne une parabole, et $a = -2$, une hyperbole.

2° L'équation $y'(y - xy') = ax$ donne, d'après la transformation de *Legendre*, $xy' - y = u$, $y' = v$, $\frac{du}{dv} = x$,

$$uv + a\frac{du}{dv} = 0, \quad \text{d'où} \quad vdv + a\frac{du}{u} = 0.$$

Intégrant, on trouve

$$\frac{v^2}{2} + alu = C_1, \quad u = Ce^{-\frac{v^2}{2a}},$$

C étant la constante d'intégration. Or,

$$x = \frac{du}{dv} = -\frac{C}{a}e^{-\frac{v^2}{2a}}v,$$

$$dy = vdx = v\left(-\frac{C}{a}\right)e^{-\frac{v^2}{2a}}\left(1 - \frac{v^2}{a}\right)dv.$$

Intégrons et nous aurons :

$$y + C' = -\frac{C}{a}\int\left(1 - \frac{v^2}{a}\right)e^{-\frac{v^2}{2a}}vdv;$$

posons $\frac{v^2}{2a} = z$; alors $vdv = adz$,

$$y + C' = -C\int(1 - 2z)e^{-z}dz = -Ce^{-z}(1 + 2z),$$

$$y + C' = -Ce^{-\frac{v^2}{2a}}\left(1 + \frac{v^2}{a}\right).$$

Donc les coordonnées d'un point de la courbe (C) sont, en fonction d'un paramètre variable,

$$x = -\frac{C}{a}e^{-\frac{v^2}{2a}}v, \qquad y + C' = -Ce^{-\frac{v^2}{2a}}\left(1 + \frac{v^2}{a}\right).$$

Solution par M. Dupont. 1° Comme ci-dessus.

2° Passons aux coordonnées polaires (r, φ) et désignons par V l'angle OMT. Nous aurons successivement dans les triangles ORT et OMT :

$$OR = OT\,tg\,\varphi \text{ et } \frac{OT}{\sin V} = \frac{r}{-\cos(V + \varphi)}; \text{ d'où } OR = -r\frac{\sin V\,tg\,\varphi}{\cos(V + \varphi)}.$$

D'autre part, la projection du segment de la tangente compris entre le

point M et l'axe Ox est égal à $-\frac{r\sin\varphi}{\sin(V+\varphi)}$. L'équation est donc

$$\frac{r\sin V\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos(V+\varphi)}=K\frac{r\sin\varphi}{\sin(V+\varphi)}.$$

En remplaçant tg V par $\frac{r}{r'}$, r' étant égal à $\frac{dr}{d\varphi}$, on met la relation précédente sous la forme :

$$r'^2K\cos^2\varphi-r'r(2K\cos^2\varphi+1)\,\mathrm{tg}\,\varphi+r^2(K\sin^2\varphi-1)=0.$$

On tire de là :

$$\frac{r'}{r}=\frac{(2K\cos^2\varphi+1)\,\mathrm{tg}\,\varphi\pm\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi+4K}}{2K\cos^2\varphi},$$

$$\frac{dr}{r}=\mathrm{tg}\,\varphi d\varphi+\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{2K\cos^2\varphi}d\varphi\pm\frac{\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi+4K}}{2K\cos^2\varphi}d\varphi,$$

$$lr=lC-l\cos\varphi+\frac{1}{4K}\mathrm{tg}^2\varphi\pm\frac{1}{2K}\int\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi+4K}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

La dernière intégrale est de la forme $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$, expression qui a pour valeur $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a}+\frac{1}{2}al(x+\sqrt{x^2+a})$.

Les équations cherchées sont donc :

$$lr=lC-l\cos\varphi+\frac{1}{4K}\mathrm{tg}^2\varphi\pm\frac{1}{4K}\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi+4K}\pm l(\mathrm{tg}\,\varphi+\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi+4K}),$$

d'où les systèmes de courbes

$$r=\frac{C}{\cos\varphi}\,\frac{e^{\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{4K}(\mathrm{tg}\,\varphi-\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi+4K})}}{\mathrm{tg}\,\varphi+\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi+4K}},$$

$$r=\frac{C}{\cos\varphi}e^{\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{4K}(\mathrm{tg}\,\varphi+\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi+4K})}\times(\mathrm{tg}\,\varphi+\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi+4K}).$$

×Question 1603.

(Voir *Mathesis*, (S), VII, p. 32).

Une transversale rencontre les côtés BA, BC, DA, DC *d'un carré* ABCD *ou leurs prolongements aux points* P, Q, R, S. *Soient* r_a, r_b, r_c, r_d *les rayons des cercles inscrits aux triangles* ARP, BPQ, CQS, DRS. *Trois de*

ces rayons étant donnés, trouver le quatrième rayon et construire le carré avec la transversale PQ. (D. BIDDLE)

Solution par MM. L. HACKEN et ROSE. Au lieu d'un carré, on peut prendre un rectangle. Les triangles rectangles APR BPQ, CQS, DRS étant semblables, on a

$$\frac{r_a}{PR} = \frac{r_b}{PQ} = \frac{r_c}{QS} = \frac{r_d}{RS}.$$

Si la transversale rencontre deux côtés opposés AD, BC et les prolongements des deux autres côtés, on écrit :

$$\frac{r_a}{PR} = \frac{r_b + r_c - r_d}{PQ + QS - RS} \quad \text{d'où} \quad r_a = r_b + r_c - r_d.$$

Si la transversale rencontre deux côtés adjacents BC. CD et les prolongements des deux autres côtés, on écrit :

$$\frac{r_a}{PR} = \frac{r_b + r_c + r_d}{PQ + QS + RS} \quad \text{d'où} \quad r_a = r_b + r_c + r_d.$$

On peut demander de construire un rectangle semblable à un rectangle donné A'B'C'D', les points d'intersection des côtés du rectangle cherché avec la transversale étant donnés, par exemple dans l'ordre P, Q, R, S. On déterminera sur le prolongement de A'B' un point P' tel que $\frac{A'P'}{B'P'} = \frac{PR}{PQ} = \frac{r_a}{r_b}$ et sur le prolongement du côté D'C' un point S' tel que $\frac{C'S'}{D'S'} = \frac{QS}{RS} = \frac{r_c}{r_d}$. P'S' est la droite homologue à PS dans le rectangle cherché. On fera donc l'angle SPA = l'angle S'P'A', l'angle PSC = l'angle P'S'C'. Ensuite de Q et de R, on abaissera des perpendiculaires sur AP.

MM. Delahaye et Baidaff (Passy) ont résolu la même question en remarquant la multiplicité des solutions suivant la position de la transversale et en étendant la question à un rectangle ou à un parallélogramme et à quatre droites homologues quelconques des triangles semblables ARP, etc.

M. Doutrewe (Athénée de Liége), considère une transversale qui coupe les côtés AB, CD et les prolongements des deux autres côtés. Après avoir établi la relation $r_b + r_a = r_d + r_c$, il cherche le côté x du carré ABCD au moyen des égalités

$$PB + BQ - PQ = 2r_b, \quad \overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{PQ}^2,$$

$$\frac{BP}{x - BP} = \frac{r_b}{r_a}, \quad \frac{BQ}{BQ - x} = \frac{r_b}{r_c},$$

entre lesquelles il élimine BP, BQ, PQ. Il trouve

$$x^2 - 2x[(r_b - r_c) + (r_a + r_b)] + 2(r_a + r_b)(r_b - r_c) = 0,$$

ou $$x = (r_a - r_c) + (r_a + r_b) \pm \sqrt{(r_b - r_c)^2 + (r_a + r_b)^2}.$$

Question 1604.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 32).

D'un point P *on mène à une parabole les trois normales* PA, PB, PC; *les tangentes en* A, B, C *forment le triangle* A'B'C'. *Démontrer que le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle est égal à la distance de* P *au foyer* F *de la parabole.* (R. F. Scott)

Solution par A. Listray. Représentons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) les coordonnées des points A, B, C, A', B', C', et par α, β celles du point P; on a

$$X_1 = \frac{y_2 y_3}{2p} \qquad Y_1 = \frac{y_2 + y_3}{2p}, \quad \text{etc.}$$

Le quadrilatère FB'C'A' étant inscriptible, si θ représente l'angle A'FB' et 2R le diamètre du cercle circonscrit, on a

$$2R = \frac{A'B'}{\sin\theta}. \tag{1}$$

Les coefficients angulaires m', m'' de FA' et FB' ont pour valeurs

$$m = \frac{Y_1}{X_1 - \frac{1}{2}p} = \frac{p(y_2 + y_3)}{y_2 y_3 - p^2}, \quad \text{etc.}$$

et $$\sin^2\theta = \frac{(m - m')^2}{(1 + m^2)(1 + m'^2)};$$

d'où, après quelques transformations simples

$$\sin^2\theta = \frac{p^2(y_1 - y_2)^2}{(y_1^2 + p^2)(y_2^2 + p^2)}.$$

Comme d'autre part,

$$\overline{A'B'}^2 = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 = \frac{(y_1^2 + p^2)(y_1 - y_2)^2}{4p^2},$$

la relation (1) donne successivement :

$$4R^2 = \frac{(y_1^2 + p^2)(y_2^2 + p^2)(y_3^2 + p^2)}{4p^4}$$

$$= \frac{y_1^2 y_2^2 y_3^2 + p^2 \Sigma y_1^2 y_2^2 + p^4 \Sigma y_1^2 + p^6}{4p^4}. \tag{2}$$

L'équation de l'hyperbole des pieds des normales issues de P combinée avec celle de la parabole donnera :

$$y^3 + 2p(p-\alpha)\,y - 2p^2\beta = 0;$$

on en déduit

$$\Sigma y_1 = 0, \quad \Sigma y_1 y_2 = 2p(p-\alpha), \quad y_1 y_2 y_3 = 2p^2\beta,$$

d'où l'on tire :

$$\Sigma y_1^2 = 4p(x-p); \quad \Sigma y_1^2 y_2^2 = p^2(\alpha - p)^2;$$

substituant ces valeurs dans (2) on trouve finalement

$$4R^2 = \beta^2 + (\alpha - \tfrac{1}{2}p)^2 = \overline{FP}^2.$$

Solution par M. V. Retali. Les ordonnées y_1, y_2, y_3 des pieds des normales menées par le point $P(a, b)$ à la parabole $y^2 = 2px$ satisfont aussi à l'équation

$$y^3 + 2p(p-a)\,y - 2p^2 b = 0, \qquad (1)$$

d'où les relations

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad \Sigma y_1 y_2 = 2(p-a), \quad y_1 y_2 y_3 = 2p^2 b. \qquad (2)$$

Les coordonnées des sommets A', B', C' étant

$$x_1' = \frac{y_2 y_3}{2p} = \frac{pb}{y_1}, \quad y_1' = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3) = -\tfrac{1}{2}y_1, \quad \text{etc.}$$

on obtient pour l'équation du cercle circonscrit au triangle A'B'C', qui passe aussi par le foyer $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{3p}{2} - a\right)x + by + \tfrac{1}{2}p(p-a) = 0;$$

d'où, en appelant r son rayon,

$$r^2 = \left(\frac{3p}{4} - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} - \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}pa,$$

ou bien

$$4r^2 = \frac{p^2}{4} - pa + a^2 + b^2 = (a - \tfrac{1}{2}p)^2 + b^2 = \overline{FP}^2.$$

Solution par M. L. Hacken. Si les côtés du triangle A'B'C' font les angles θ', θ'', θ''' avec les axes de la parabole $y^2 = 2px$, le diamètre du

cercle circonscrit, d'après une formule connue (SALMON, *sections coniques*, 2e éd. française, p. 357) a pour valeur

$$2R = \frac{p}{2 \sin\theta' \sin\theta'' \sin\theta'''}. \qquad (1)$$

Les coefficients angulaires m', m'', m''' des normales issues du point (a, b) satisfont à l'équation

$$pm^3 + 2(p-a)m + 2b = 0. \qquad (2)$$

Or, $\operatorname{tg}\theta' = -\frac{1}{m'}$, d'où $\sin\theta' = \frac{1}{\sqrt{1+m'^2}}$, etc. Par suite,

$$2R = \frac{p}{2}\sqrt{(1+m'^2)(1+m''^2)(1+m'''^2)}.$$

La quantité sous le radical peut s'écrire

$$1 + \Sigma m'^2 + \Sigma m'^2 m''^2 + m'^2 m''^2 m'^2.$$

L'équation (2) donne

$$\Sigma m' = 0, \quad \Sigma m'm'' = \frac{2(p-a)}{p}, \quad m'm''m'' = -\frac{2b}{p};$$

en élevant ces trois relations au carré, on trouve :

$$\Sigma m'^2 + 2\Sigma m'm'' = 0, \quad \text{d'où} \quad \Sigma m'^2 = -2\Sigma m'm'' = -\frac{4(p-a)}{p},$$

$$\Sigma m'^2 m''^2 + 2m'm''m'''(m' + m'' + m''') = \frac{4(p-a)}{p^2},$$

$$\text{d'où} \quad \Sigma m'^2 m''^2 = \frac{4(p-a)^2}{p^2},$$

$$m'^2 m''^2 m''^2 = \frac{4b^2}{p^2}.$$

On en déduit

$$2R = \frac{p}{2}\sqrt{1 - \frac{4(p-a)}{p} + \frac{4(p-a)^2}{p^2} + \frac{4b^2}{p^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{p}{2} - a\right)^2 + b^2} = FP.$$

Solution par M. DROZ FARNY. Soient A'', B'', C'' les symétriques des points A', B', C' par rapport à F. On sait que la droite FA' est la bissectrice de l'angle BFC et que $FB.FC = \overline{FA'}^2 = FA'.FA''$; on en déduit

que le quadrilatère A'BCA'' est inscriptible. Les angles PBA', PCA' étant droits, PA' est un diamètre de la circonférence circonscrite à ce qualilatère ; donc l'angle PA''F est droit. Il résulte de là que la circonférence de diamètre PF passe par A'', B'', C'', et comme les triangles A'B'C', A''B''C'' sont symétriques par rapport à F, un diamètre de la circonférence ABC est symétrique de PF par rapport à F.

M. M. H. Lez et Liang Tu partent de la même formule (1), remplacent $\sin\theta'$, etc., par $\frac{p^2}{p^2+y_1^2}$, etc., ce qui les conduit à la valeur (2) de R rencontrée par M. Listray, enfin achèvent le calcul de la même manière.

M. Barisien a résolu la même question en partant de la formule (1) de M. Listray. Nous regrettons de ne pouvoir reproduire, faute d'espace, que quelques remarques accompagnant cette solution.

1. Le lieu des points P tels que le diamètre du cercle circonscrit au triangle A'B'C' soit constant, est une circonférence de centre F.

2. Le cercle ABC a pour équation (résultat connu)

$$x^2+y^2-(a+p)x-\frac{bp}{2}=0.$$

3. Le rayon du cercle A'B'C' pourrait se déduire de l'égalité

$$R=\frac{A'B'.B'C'.C'A'}{4A'B'C'}.$$

On sait que

$$A'B'C'=\frac{1}{2}ABC=\frac{1}{8p}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1);$$

d'autre part,

$$A'B'=\frac{y_1-y_2}{2p}\sqrt{y_3^2+p^2},\quad \text{etc.},$$

de sorte qu'on retombe sur la formule (2) de M. Listray.

4. Remarquons encore la formule déjà signalée dans le JMS, 1890, p. 275; 1891, p. 45 :

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{p[8(a-p)^3-27pb^2]}.$$

Donc le lieu d'un point P tel que l'aire ABC est constante, est une cubique parabolique.

5. On trouve pour le lieu de P une conique lorsque le rayon du cercle ABC est constant ou que le rapport des rayons des cercles ABC, A'B'C' a une valeur donnée.

M. Terracini (Turin) a résolu la question 1604 en partant de l'expression de R donnée dans la troisième remarque de M. Barisien et en transformant la formule ainsi obtenue :

$$R=\frac{1}{8p}\sqrt{p[64x_1x_2x_3+16p\Sigma x'x''+4p^2\Sigma x'+p^3]},$$

x_1, x_2, x_3 étant les racines de l'équation

$$4x^3 - 4(3a - p)x^2 + (4a^2 - 4ap + p^2)x - pb^2 = 0.$$

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES. I. Ainsi que je m'y attendais, au seul examen de l'énoncé, j'ai soupçonné que la proposition n'était pas nouvelle. Et en effet, elle coïncide avec la question 316 du JMS où G. de Longchamps a énoncé que $2.O'F = FP$, O' étant le centre de la circonférence $A'B'C'$, qui, on le sait, passe par le foyer F de la parabole.

M. J. Greenstreet en a donné (1892, p. 211-212) une solution très simple, et de mon côté, à l'occasion de la même question et d'une autre de M. Chauliac, j'ai indiqué (*ibid.* p. 212-215 et NAM, 1892, p 4ˣ-10ˣ et 1905, p. 227), des formules qui permettent d'obtenir rapidement plusieurs propriétés nouvelles de la configuration de trois normales PA, PB, PC à la parabole, issues d'un point P.

Je me bornerai à en rappeler le principe : c'est de supposer que B, C ont pour ordonnées $-b$, $-c$; l'ordonnée du point A est alors $(b+c)$, et le point P a pour coordonnées

$$x = p + \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}, \quad y = \frac{bc(b+c)}{2p^2}.$$

(H. BROCARD)

II. L'*Educational Times* auquel nous avions emprunté la question 1601 sans nous rappeler que le théorème avait déjà été énoncé par G. de Longchamps, a publié, dans son n° de février 1907, la solution suivante, due à M. Naraniengar :

Soient r_1, r_2, r_3 les rayons vecteurs FA, FB, FC, et FD la perpendiculaire abaissée de F sur la tangente A'B'. Comme la circonférence A'B'C' passe par F, on a

$$2R = \frac{FA' \cdot FC'}{FD}.$$

Or, $\overline{FA'}^2 = r_2 r_3$, $\overline{FC'}^2 = r_1 r_2$, $\overline{FD}^2 = pr$; par conséquent.

$$2R = \sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{2p}}.$$

Mais, lorsque les normales en A, B, C concourent en un même point P, on a (voir *Mathesis*, 1906, p. 52).

$$r_1 r_2 r_3 = \tfrac{1}{2} p . \overline{FP}^2;$$

il en résulte $2R = FP$. (J. N.)

III. Voici quelques propositions sur la même figure auxquelles fait allusion la note de M. Brocard ; elles peuvent intéresser nos lecteurs.

1. La droite PF passe par le centre O' du cercle A'B'C' (de Longchamps), et 2O'F = FP (Brocard).

2 Lorsque P se déplace sur un diamètre de la parabole, les points A', B', C' se meuvent sur une même hyperbole équilatère ; l'orthocentre du triangle A'B'C' reste fixe ; les cercles d'Euler des triangles A'B'C passent par le sommet de la parabole et leurs centres se transportent sur un même diamètre. (CHAULIAC)

3. L'orthocentre du triangle de trois normales quelconques et celui du triangle formé par les tangentes correspondantes sont sur un même diamètre. (CHAULIAC).

4. Lorsque les normales concourent en P, le premier orthocentre est situé sur la directrice à l'intersection avec le diamètre passant par P (NAM, 1905. p. 227 et *Mathesis*, 1903, p. 236 où M. Emmerich a énoncé ce théorème dans sa solution de la question 1033 due à Tucker et se rattachant à la figure de la question 1604).

5. Les centres de gravité G, G' des triangles ABC, A'B'C' sont situés sur l'axe de la parabole, et l'on a GS = 2G'S. S désignant le sommet de la parabole (BROCARD)

QUESTIONS D'EXAMEN.

×**1843.** Si $abc = 1$,

$$1 = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$$
$$= \frac{ab}{ab+a+1} + \frac{bc}{bc+b+1} + \frac{ac}{ac+c+1}.$$

(*J. de Vutbert*)

×**1844.** Construire un triangle ABC, connaissant l'angle A, le produit AB.AC = m^2 et la longueur AD = n de la droite qui divise en D la base BC dans le rapport donné $p : q$. (PAMPUCH)

Première solution. Si la parallèle à AC par B coupe AD en E, on connaîtra dans le triangle ABE l'angle ABE, le produit BA.BE = $\frac{m^2 q}{p}$ et AE = $\frac{n(p+q)}{q}$.

Deuxième solution. Si la parallèle à AD par B coupe AC en F, le triangle ABF pourra se construire comme le triangle ABE de la première solution. *Troisième*

solution. La parallèle à AB par D rencontrant AC en H, et la parallèle à AC par D rencontrant AB en K, on pourra, en plaçant la droite AD $= n$, construire sur AD deux segments capables de l'angle $180° - A$, de part et d'autre de AD; H et K appartiennent aux arcs de ces segments. Remarquons maintenant que $AH.AK = m^2 \frac{pq}{(p+q)^2}$; par conséquent si l'on prend sur AC la longueur AK' = AK, le point K' appartient à la droite transformée de la circonférence AHD par inversion, le pôle étant en A et la puissance égale à $m^2 \frac{pq}{(p+q,^2}$. Il reste à faire tourner cette droite autour du point A de l'angle A pour obtenir le point K.... *Quatrième solution,* etc. L'angle A et le produit AB.AC font connaître la surface du triangle ABC, et par suite la somme des perpendiculaires BB', CC' abaissées de B et C sur AD; le rapport de ces perpendiculaires est égal à $p : q$. Par suite, après avoir tracé une droite AD $= n$, on peut déterminer deux parallèles BB'', CC'' à AD sur lesquelles se trouvent les sommets B et C. Il sera facile de construire le point E de la première solution et un segment capable de l'angle A construit sur AE fera connaître le point B, etc.

(*Journal de Hoffmann.*)

×**1345.** Construire un triangle ABC dont on donne le sommet A, la projection A' de A sur BC et le centre N du cercle des neuf points.

Le rayon du cercle N est égal à NA'; construisons ce cercle qui coupera AA' au milieu A'' du segment AH. L'orthocentre H peut donc être déterminé; on en déduit le centre O du cercle ABC. Traçons le cercle O, et par O menons à AA' une parallèle qui coupera le cercle N au milieu M de la base BC, etc.

Si l'on donnait les points B, A', N, on décrirait encore le cercle N qui couperait BC en M; le point O s'obtiendrait facilement en construisant le triangle rectangle BMO dans lequel BO = 2NA'.

1346. La tangente en un point M d'une parabole de sommet O rencontre l'axe de la parabole en T. La perpendiculaire abaissée de T sur OM rencontre la tangente au sommet en R; la normale en M rencontre cette tangente au sommet en P; le point M se projette en Q sur la tangente au sommet. Montrer que PQ = 2OR.

(E. N. Barisien)

×**1347.** Un angle droit DPD' pivote autour de son sommet P, point fixe dans le plan des deux droites rectangulaires OX et OY. Le côté PD rencontre OY en A, le côté PD' rencontre OX en B. Trouver le lieu du milieu M de la droite AB, d'abord par la géométrie pure, ensuite en déterminant l'équation de ce lieu.

(*Ecole de physique et de chimie industrielles* de Paris)

On a MO $= \frac{1}{2}$ AB, MP $= \frac{1}{2}$ AB; le lieu est la perpendiculaire au milieu de la droite OP.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1691. Trouver la limite de

$$\left(\frac{n^m}{n^m-1}\right)^{\cot\left(\frac{a}{n}\right)^m}$$

pour $n=\infty$. On suppose m positif. (ABRAMESCU).

×**1692.** Démontrer ou interpréter géométriquement la formule

$$(p-a)\sin\frac{A}{2}=a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

relative à un triangle quelconque ABC (DOBROBESCU)

1693. Soient MP l'ordonnée d'un point M d'une courbe (O), N le point de rencontre de la normale en M avec Ox, R le point de rencontre de la tangente en M avec la perpendiculaire en N à Ox. Déterminer la courbe (C) par l'une des conditions :

$$1^\circ\ \rho\ NP=MP\,.\,NR;\qquad 2^\circ\ \rho\,.\,MN=m\,.\,MP\,.\,NR,$$

ρ désignant le rayon de courbure en M et m étant une constante. (ROSE)

1694. Etant donnés quatre points A, B, C, D, on construit les triangles antipodaires de chacun de ces points par rapport au triangle formé par les trois autres.

Démontrer que les cercles circonscrits à ces triangles antipodaires sont vus respectivement des points A, B, C, D sous le même angle. (A. GOB)

1695. La normale en un point M quelconque d'une ellipse rencontre le grand axe en N. 1° La droite Δ élevée en N perpendiculairement à NM enveloppe une sextique unicursale ayant pour aire $\frac{\pi b(a^2-b^2)^2}{8a^3}$, $2a$ et $2b$ étant les axes de l'ellipse ; 2° Le lieu de la projection P du centre de l'ellipse sur Δ est une sextique ayant pour aire $\frac{\pi(a-b)^2(2a+b)}{2b}$.

Voir ce que devient la courbe (1°), si l'ellipse est remplacée par une parabole. (E. N. BARISIEN)

L'ellipse étant remplacée par une courbe quelconque, construire le point de contact de Δ avec son enveloppe ou la tangente en P au lieu de P. (J. N.)

UNE PAGE OUBLIÉE D'HERMITE(*).

L'observation comme méthode d'invention en mathématiques.

Il sera toujours difficile, dans toute branche de nos connaissances, de rendre compte, avec quelque fidélité de la méthode suivie par les inventeurs; *il faut même croire que l'auteur d'une découverte pourrait seul apprendre comment, avec les moyens toujours faibles de notre esprit, une vérité nouvelle a été obtenue.* Mais c'est peut-être à l'égard des mathématiques que le fait intellectuel de l'invention semble plus mystérieux; car la série de ces transitions, où l'on reconnaîtrait la voie réellement suivie dans la recherche, le plus souvent n'apparaît pas d'une manière sensible dans la démonstration. Cette facilité d'isoler ainsi la preuve et d'ajouter à la concision du raisonnement, sans rien lui ôter de sa rigueur et de sa clarté, explique toute la difficulté de l'analyse des méthodes en mathématiques. On peut néanmoins, à l'égard des procédés intellectuels propres aux géomètres, faire cette remarque fort simple, que justifiera l'histoire même de la science, *c'est que l'observation y tient une place importante et y joue un grand rôle.*

Toutes les branches des mathématiques fournissent des preuves à l'appui de cette assertion, mais je les choisirai de préférence dans l'une de celles que l'on regarde comme des plus abstraites, je veux parler de la théorie des nombres.

Je citerai ainsi pour exemples :

La périodicité du développement en fraction continue des racines d'une équation du second degré à coefficients commensurables;

La loi de réciprocité pour les résidus quadratiques;

La loi de réciprocité pour les résidus cubiques, qu'on voit dans les œuvres posthumes d'Euler, déduite par l'observation dans les termes où elle a été découverte et démontrée par Jacobi (Euler avait à un tel degré le sentiment de l'importance et de la vérité de cette loi, qu'il l'a placée dans le recueil de ses mémoires, destiné à être publié cent ans après sa mort);

(*) Note extraite de E. Chevreul, *Histoire des connaissances chimiques*. Paris, Morgand, 1866. Tome Premier, pp. 215-217. Nous devons la communication de cette note à l'obligeance de M. H. Schuermans, le savant traducteur des *Probabilités et moyennes géométriques* de Czuber.

L'expression approchée du nombre des nombres premiers jusqu'à une limite donnée;

Enfin et plus récemment, Jacobi a demandé à l'observation de révéler la loi de la représentation des nombres par une somme de cubes, en faisant construire, par un calculateur habile, les tables qui ont été publiées sur cette question dans le *Journal de Crelle*.

Mais les résultats qui précèdent, si remarquables et si importants qu'ils soient, ne suffisent point à donner l'idée complète du rôle qu'on peut attribuer à l'observation; en analysant les procédés de démonstration d'un certain nombre de théorèmes, on s'en rendra mieux compte, comme je vais essayer de le faire par un seul exemple. La proposition que je choisis est celle-ci : la suite des nombres premiers est illimitée. et on commence la démonstration en supposant qu'il n'en existe qu'un nombre fini et limité. Or, en formant leur produit et y ajoutant une unité, on obtient un nouveau nombre, premier dans l'hypothèse admise. et supérieur aux précédents, d'où résulte que l'hypothèse doit être rejetée puisqu'elle amène une contradiction. Le point essentiel ici consiste évidemment dans la considération de ce produit de tous les nombres premiers admis, auquel on ajoute l'unité, et on accordera sans peine que cette considération ne résulte pas du seul raisonnement, mais qu'on y doit reconnaître le fruit de l'observation d'un fait très simple. relatif à la divisibilité, fait déjà acquis et utilisé par le raisonnement, auquel il sert de point d'appui pour arriver à la démonstration.

NOTES ANALYTIQUES ET HISTORIQUES,

par M. A. Aubry.

(*Suite*, voir p. 62).

×6. *Sur les identités algébriques.* La notion d'identité, ou comme dit Descartes, l'art d'« exprimer une quantité en deux façons, » est la base de toute l'analyse algébrique et même de toute l'analyse. Aussi, il semble qu'on ne saurait trop tôt habituer à cette théorie l'esprit du débutant.

Les identités les plus simples tirent leur origine de simples multiplications algébriques : telles sont celles provenant du développement des produits $(a+b)(c+d)$, $(a+b)(a-b)$, $(a\pm b)^2$, $(a\pm b)^3$, ...

Des identités connues ou évidentes peuvent en faire naître une foule d'autres par de simples substitutions : c'est la méthode la plus élémentaire et la plus fructueuse.

1° Dans la relation suivante, dont la généralisation a été le point de départ de Leibniz, dans sa découverte du calcul infinitésimal,

$$a - d = (a - b) + (b - c) + (c - d), \qquad (1)$$

changeons a, b, c, d en $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$; il viendra la suivante :

$$bc(a - d) = ab(c - d) + ad(b - c) + cd(a - b), \qquad (2)$$

qui devient, en faisant $d = c$ et mettant ensuite $a - b$, $a - c$, $a - d$ à la place de a, b, c,

$$(a - c)(b - d) = (a - d)(b - c) + (a - b)(c - d), \qquad (3)$$

d'où, en changeant a, b, c, d en $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}, \frac{d}{\delta}$, cette importante identité

$$(a\gamma - c\alpha)(b\delta - d\beta) = (a\delta - d\alpha)(b\gamma - c\beta) + (a\beta - b\alpha)(c\delta - d\gamma), \qquad (4)$$

remarquée par Fontaine (1770) et, au fond, identique à la relation de Pappus entre quatre points donnés soit par leurs abscisses (3), soit par leurs rapports de section (4). C'est une généralisation d'une autre, de Fibonacci, dont il sera parlé plus loin, et qui a lieu pour $\alpha = -c$, $\beta = -d$, $\gamma = a$, $\delta = b$.

On trouvera d'autres relations plus ou moins intéressantes en changeant, dans (1), a, b, c, d, en $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{a}$, ou en $\frac{a^2}{b}, \cdots$ ou en $\frac{abc}{d}, \cdots$ etc.

2° Cette identité d'Euler, donnée antérieurement par Nicole, d'une manière moins simple,

$$(1+a)(1+b)(1+c)\cdots = 1 + a + b(1+a) + c(1+a)(1+b) + \cdots \qquad (5)$$

en généralise plusieurs de Sterne, Eudoxe, Ed. Lucas, Jacques Bernoulli, Brouncker, Laurent, Pascal, Stirling, etc., qu'on retrouvera en faisant :

$$a = \frac{\alpha}{1}, \quad b = \frac{\beta}{1+\alpha}, \quad c = \frac{\gamma}{1+\alpha+\beta}, \cdots;$$

$$a = b = \cdots = x - 1;$$

$$a=1,\quad b=2,\quad c=3,\ldots;$$

$$a=-\frac{1}{2},\quad b=-\frac{2}{3},\quad c=-\frac{3}{4},\ldots;$$

$$a=-\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{3},\quad c=-\frac{1}{4},\ldots;$$

$$a=\frac{\alpha}{1-\alpha},\quad b=\frac{\beta}{1-\beta},\ldots;$$

$$a=\frac{n}{1},\quad b=\frac{n}{2},\quad c=\frac{n}{3},\ldots;$$

$$a=-\frac{n-1}{n},\quad b=-\frac{n-1}{n+1},\quad c=-\frac{n-1}{n+2},\ldots;$$

$$a=\frac{n-1}{1},\quad b=\frac{n-2}{2},\ldots;$$

$$a=\frac{1}{n-1},\quad b=\frac{2}{n-2},\ldots$$

3° Remarquons qu'on a

$$\frac{1-x^a}{x^\alpha(1-x)}\,\frac{1-x^{ab}}{x^\beta(1-x^a)}\,\frac{1-x^{abc}}{x^\gamma(1-x^{ab})}\cdots\frac{1-x^{a\cdots kl}}{x^\lambda(1-x^{a\cdots k})}=\frac{1-x^{a\cdots l}}{x^{\alpha+\cdots+\lambda}(1-x)};\quad(6)$$

d'où, si $a=1$, $b=2$, $c=3$, $\cdots l=n$, $\alpha=\beta=\cdots=0$, que le développement du produit

$$(1+x)(1+x^2+x^4)(1+x^6+x^{12}+x^{18})(1+x^{24}+x^{48}+x^{72}+x^{96})$$
$$(1+x^{120}+x^{240}+\cdots)\cdots$$

est égal à $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots$ On peut ainsi, avec des poids de 1 g., 2 g., 4 g., 6 g., 12 g., ... $n(n!)$ g., peser un nombre quelconque de grammes jusqu'à $1+6+36+240+1800+\cdots+\frac{n(n+1)!}{2}$ g.

Faisons $a=b=c=\cdots=n$ et $\alpha=\beta=\cdots=0$: on verra, qu'en prenant

$$F(x)=(1\pm x^{n^{k-1}})(1\pm x^{n^{k-2}})\cdots(1\pm x^{n^0}),\quad f(x)=\frac{1\pm x^{n^k}}{1\pm x},$$

on a

$$F(x)/(x)=F(x^n),$$

d'où l'expression du produit

$$(x)f(x^n)f(x^{n^2})\cdots$$

En attribuant diverses valeurs aux lettres n, k, on arrive aux identités désignées par ces relations

$$\begin{aligned}
&F(x)=1-x, && f(x)=1+x;\\
&F(x)=1-x, && f(x)=1+x+x^2;\\
&F(x)=1+x+x^2, && f(x)=1-x+x^2;\\
&F(x)=1-x-x^2+x^3, && f(x)=1+x+x^2+x^3;\\
&F(x)=1-x-x^3+x^4, && f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5.
\end{aligned}$$

Les séries provenant des deux premières applications sont d'Euler(*), celle provenant de la troisième est de Catalan.

4° Posant $kF(x^2)-F(x)=f(x)$, on obtiendra aisément une identité donnant la somme de la suite finie ou infinie

$$F(x)+f(x)+kf(x^2)+k^2f(x^4)+k^4f(x^8)+\cdots$$

Soit $F(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$; suivant qu'on a $k=1$ ou $k=2$, il vient :

$$f(x)=-\frac{(a+b)x}{x^2-1} \quad \text{ou} \quad f(x)=\frac{ax-b}{x+1}.$$

Le cas de $a=0$, $b=1$ donne deux séries sommées par Catalan. On a la sommation d'autres séries en posant $a=b=1$; $a=1$, $b=0$; $a=2$, $b=1$; ....

On pourra étudier les relations suivantes :

$$kF(x+1)-F(x)=f(x), \quad kF(ax)-F(x)=f(x), \ \ldots$$

7. Le théorème suivant, énoncé pour la première fois explicitement par Lagrange, est plutôt propre à vérifier une identité proposée : *si la fonction entière* $F(x)$ *s'annule pour* $x=a$, *elle est divisible par* $x-a$ *et réciproquement.*

(*) Euler tire de là la propriété des nombres entiers d'être représentables par l'une des formules

$$\alpha+2\beta+4\gamma+8\delta+16\varepsilon+\cdots, \qquad \alpha+3\beta+9\gamma+27\delta+81\varepsilon+\cdots,$$

les nombres α, β, ... désignant l'un des nombres 0, 1 ; et les coefficients α, β, ... l'un de ceux-ci : -1, 0, 1, etc.

Par exemple, $x^n - a^n$ est divisible par $x - a$: de là, en divisant, l'identité

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots). \qquad (7)$$

De même, la fonction entière $(ax - 1)^2 - x(a - 1)^2$ s'annulant pour $x = 1$, est donc par $x - 1$; et par suite, a et x étant entiers, le nombre représenté par cette forme n'est jamais premier pour $x > 2$.

8. *Si une fonction entière du degré n prend la même valeur pour plus de n valeurs de la variable, elle est constante* (Lagrange).

Ainsi la fonction suivante, donnée sous une autre forme par Leibniz,

$$\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x+a)(x+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}$$

étant du degré 2 et gardant la même valeur 1, pour les trois valeurs $-a$, $-b$, $-c$, de x, sa valeur est constamment égale à 1.

9. *Si une fonction change de signe, en gardant la même valeur absolue, quand on permute deux quelconques a, b des lettres qui y entrent, elle est divisible par* $a - b$ (Cauchy). Ainsi la fonction $a^2(b - c) + b^2(a - c) + c^2(a - b)$ est divisible par $a - b$, par $b - c$ et par $c - a$; on a de cette manière l'identité suivante

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a) \qquad (8)$$

donnée géométriquement par Stewart (1763).

Les fonctions $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ et $-3bc(b-c) - 3ac(c-a) - 3ab(a-b)$ sont dans le même cas et ont même somme. Quant à $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$, qui est dans le cas du théorème, elle est également divisible par $-(a - b)(b - c)(c - a)$, mais elle a en outre un autre diviseur P, sans quoi, elle ne serait pas du quatrième degré. P est évidemment symétrique en a, b, c et ne peut être que $a + b + c$.

10. L'exemple suivant enseignera encore un moyen de déduire de nouvelles identités d'autres déjà connues. Dans (8), changeons successivement, par permutation tournante, a, b, c en b, c, d, en c, d, a et d, a, b; puis multiplions respectivement par d^2, $-a^2$, b^2 et $-c^2$, les quatre relations résultantes : il viendra en ajoutant, une identité trouvée par Chasles et donnée plus généralement par Euler (voir n° 13, 1°).

11. 1° On arrive à la sommation de certaines suites par la formule (1) généralisée, ou en opérant sur d'autres suites par addition successives de leurs termes, ou en les additionnant par groupes, ou en les décomposant en plusieurs séries connues, ou en les retranchant d'autres séries. Ces méthodes sont celles de Brouncker, Mouton, Leibniz et Jacques Bernoulli. Ainsi on a :

$$\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\right)+\left(\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}\right)+\cdots$$
$$=\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{3}{2.3.4.5}+\cdots=\frac{1}{1.2.3}.$$

$$\Sigma_1^n kx^{k-1}=\Sigma_0^n x^k+\Sigma_1^n x^k+\Sigma_2^n x^k+\cdots$$

$$\Sigma_1^n \frac{k(k+1)}{2}x^{k-1}=\Sigma_0^n x^k+2\Sigma_1^n x^k+3\Sigma_2^n x^k+\cdots$$

$$\Sigma k^2x^k=2\Sigma\frac{k(k+1)}{2}x^k-\Sigma kx^k.$$

2° Dans certains cas, on obtient des résultats intéressants en retranchant certains termes d'une suite donnée, de la suite elle-même. Par exemple, en retranchant de la suite $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{2n}$, le double de la somme des termes de rang pair, on obtient une identité remarquable due à Catalan.

3° La méthode de proche en proche est fréquemment utilisée. En voici un bel exemple, celui de la *série singulière*, de Gauss. Posons

$$(n,k)=\frac{1-x^{n-1}}{1-x}\,\frac{1-x^{n-2}}{1-x^2}\cdots\frac{1-x^{n-k}}{1-x^k},$$
$$f(n)=1-(n,1)+(n,2)-(n,3)+\cdots\pm 1;$$

on aura :

$$(n-1,h)(1-x^{n-h-2})=(n-2,h)(1-x^{n-2}),$$
$$f(n)=(1-x^{n-1})f(n-2);$$

d'où, si n est impair,

$$f(n)=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots(1-x^{n-2}). \qquad (9)$$

On arrive de même à cette autre identité de Jacobi,

$$\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{1+x^3}{1-x^3}\cdots=1+2x+2x^4+2x^9+2x^{16}+\cdots \qquad (10)$$

(*A continuer*).

NOTES MATHÉMATIQUES.

14. *Question.* On a fait remarquer que les caractères de divisibilité par 37, 41, 73 et 101 s'expriment simplement. A-t-on fait remarquer qu'il en est de même pour le diviseur composé 91 et pour les diviseurs premiers 137, 239, 271, 9091 et 9901? (E. LEBON)

15. *Sur la parabole.* Voici deux résultats analogues qui montrent la concordance de deux lieux géométriques remarquables, et valent la peine d'être mentionnés.

1° La courbe lieu du point du plan d'une parabole $y^2 - 2px = 0$, à égale distance de la parabole et de son sommet est la cubique

$$27py^2 = 4(x - p)^3$$

qui est la développée de la parabole

$$y^2 - 4px - 4p^2 = 0.$$

Cette cubique est aussi le lieu du point tel que les trois normales issues de ce point à la parabole et la parallèle à l'axe menée par ce point forment un faisceau harmonique.

2° La courbe lieu du point du plan d'une parabole $y^2 - 2px = 0$, à égale distance de la parabole et de son foyer est la cubique

$$108py^2 = (4x - p)(2x - 5p)^2.$$

Cette cubique est aussi le lieu du point tel que l'une des normales abaissées de ce point sur la parabole soit bissectrice de l'angle des deux autres. (E. N. BARISIEN)

16. *Sur le triangle quasirectangle.* J'appelle ainsi un triangle ABC dans lequel $C - B = 90°$. *Mathesis* en a donné récemment quelques propriétés; je réunis ici quelques propositions et formules qui peuvent intéresser le lecteur.

1° Le cercle des neuf points a son centre sur BC.

2° $$\sin A = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2}, \quad \cos A = \frac{2bc}{c^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{c - b}{c + b},$$

$$h_a = R \cos A = R \sin 2B = \frac{c^2 - b^2}{2a} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

3° L'angle de Brocard est donné par la formule

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{b^4 + c^4}{bc(c^2 - b^2)}.$$

4° L'angle de Boutin défini par $\operatorname{tg}\varphi = \Sigma \operatorname{tg} A$ est le supplément de A.

5° Soient A' et A'' les pieds des bissectrices de l'angle A; ces droites sont inclinées de 45° sur BC, et

$$AA' = AA'' = \frac{bc\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+c^2}}, \quad A'A'' = 2h_a,$$

$$\overline{BA'}^2 + \overline{CA'}^2 = (c-b)^2.$$

6° Soient I, I', I'', I''' les centres des cercles tritangents; on a

$$II' = (c-b)\sqrt{2}, \quad I''I''' = (c+b)\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\overline{II'}^2} + \frac{1}{\overline{I''I'''}^2} = \frac{1}{a^2}.$$

(Droz Farny)

BIBLIOGRAPHIE.

PUBLICATIONS HISTORIQUES.

1. **Vorlesungen über Geschichte der Mathematik** von Moritz Cantor. Erster Band von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Dritte Auflage Leipzig, Teubner, 1907 (Gr. in-8°, de VI-941 pp. avec 114 fig. dans le texte et une planche). Prix : 24 marcs.

Troisième édition du tome I du beau livre de Cantor, le *Standard-Book* sur l'histoire des mathématiques. La seconde édition a paru en 1894 et contient 60 pages environ de moins que la troisième; l'auteur annonce qu'il a introduit dans celle-ci de nombreuses améliorations de détail en utilisant les recherches des nombreux savants qui s'occupent aujourd'hui de cette branche de la science. La plupart de ceux-ci, pensons-nous, y ont été initiés par les écrits de Cantor lui-même et c'est le plus bel éloge que l'on puisse faire de l'éminent historien.

---

2. **Histoire des mathématiques**, par W. W. Rouse Ball, Fellow and Tutor of Trinity College (Cambridge). Édition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise, par L. Freund, lieutenant de vaisseau. Tome premier. Paris, A. Hermann, 1906 (In-8° de VII-422 pp.). Prix : 12 francs.

Ce premier volume contient l'histoire des mathématiques, dans l'antiquité, au moyen âge, à la renaissance, et dans la période moderne, jusque 1675 environ, sans toucher à Leibniz ni à Newton. Le volume se termine par cinq notes 1° Viète comme géomètre, d'après Chasles. 2° L'analyse des ouvrages de Neper sur les logarithmes, par Biot. 3° Kepler, d'après Chasles et Bertrand. 4° Travaux de Galilée et Huygens, par Mach. 5° Préface des *Origines de la statique*, de P. Duhem.

L'histoire des mathématiques de Ball contient beaucoup d'erreurs, tant dans les trois éditions anglaises (1888, 1893, 1901) que dans la traduction française et même dans l'édition italienne de D. Gambioli et G. Puliti, avec des corrections de G. Loria, comme on peut le voir dans les comptes-rendus d'Enestrŏm

(*Bibliotheca mathematica*, (3), V, pp. 313-316) et de D. E. Smith (*Bulletin of the American Mathematical Society*, XII, pp. 309-314). La note 5 est excellente, la note 4 doit être corrigée d'après un mémoire de Duhem au congrès de philosophie de Genève; les autres ont vieilli. Ce tome I de la traduction du livre de Ball devrait être refondu complètement, comme le sera, nous assure-t-on, le tome second.

---

3. **Les Origines de la Statique**, par P. Duhem, correspondant de l'Institut de France, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Paris, A. Hermann, 1905, 1906 (Deux vol. in-8° de IV-360 pp. et VIII-364 pp.). Prix : 20 fr.

4. **Études sur Léonard de Vinci.** Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu, par P. Duhem. Première série. Paris, A. Hermann, 1906. (In-8° de VII-355 pp.). Prix : 12 francs.

Ces deux ouvrages renouvellent complètement l'histoire de la statique dont elle font connaître le développement *continu* depuis Aristote et Archimède jusqu'à Stevin, Galilée, Roberval et Descartes, en passant par l'auteur d'un vieil écrit grec sur les poids que l'on n'a plus qu'en latin, et où l'on utilise la notion de moment; par Jordanus de Nemore; par Albert de Saxe; par L. de Vinci qui connaît la condition d'équilibre d'un corps placé sur un plan incliné déjà trouvée antérieurement et dont les manuscrits pillés par maints auteurs italiens sont la vraie source des découvertes de Tartaglia et de plusieurs autres.

La conclusion des pénétrantes études de M. Duhem sur l'histoire des sciences, dans les deux ouvrages annoncés plus haut et dans divers mémoires sur Galilée, Mersenne, Pascal, est à peu près la suivante : La science mécanique et physique moderne découle par une suite de perfectionnements à peine sensibles de doctrines empruntées à l'antiquité, professées au sein des écoles du moyen âge, transformées et dégagées des erreurs qui y étaient mêlées à la renaissance et dans la première moitié du dix-septième siècle. *Le respect de la tradition est donc une condition essentielle du progrès scientifique.*

Espérons que M. Duhem fera quelque jour un exposé synthétique de l'ensemble de ses travaux historiques sur la Mécanique et les mettra ainsi à la portée de tous les lecteurs.

---

5. **Leibnizens nachgelassene Schriften** physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts, herausgegeben und mit erläuternden Anmerkungen versehen von Dr. E. Gerland, Professor der Physik und Electrotechnik an der k. Bergakademie zu Chausthal. Leipzig, 1906 (In-8° de VI-256 pp.). Prix : 10 marcs.

Notes en latin, en allemand, en français, sur la physique (surtout sur l'optique), la mécanique, la mécanique appliquée (surtout sur les pompes). Dans ces notes, tantôt Leibniz est tout à fait sous l'empire des idées plus ou moins justes de son époque; tantôt il a des vues tout à fait modernes. Le volume publié par M. Gerland devra être étudié de près par ceux qui s'occupent d'histoire des sciences physiques.

6. **Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi**, herausgegeben von W. Ahrens. Leipzig, Teubner, 1907 (In-8° de XX-282 pp. et deux portraits). Prix : 6 marcs 90.

7. **C. G. J. Jacobi als Politiker**, von W. Ahrens. Leipzig, Teubner, 1907 (In-8° de 45 pp.). Prix : 1 marc 20.

La brochure et le livre de M. Ahrens peuvent être regardés comme le complément de la belle biographie de Jacobi par Königsberger, plus pour faire connaître comme hommes que comme savants ces deux illustres frères : Moritz Hermann (1801, Postdam; 1874, S. Pétersbourg), l'inventeur de la galvanoplastie, et Carl Gustav Jacob (1804, Postdam; 1851, Berlin), l'illustre mathématicien, qui, en 1848, s'égara dans la politique et en souffrit cruellement. D'innombrables notes biographiques et bibliographiques de l'éditeur sur une foule de savants dont il est question dans la correspondance des deux frères seront très utiles à tous ceux qui s'occupent de l'histoire scientifique du 19e siècle.

---

8. **Karl Schellbach.** Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben, nebst zwei Schriften aus seinem Nachlass und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstrass, herausgegeben von F. Müller. Leipzig, Teubner, 1905 (In-8° de 86 pp. avec portrait). Prix : 2 marcs.

Karl Schellbach (1804-1892), professeur dans divers gymnases, puis à l'École de guerre de Berlin, a publié un grand nombre de travaux sur l'Analyse, la Mécanique rationnelle et l'Optique, dont le plus connu à l'étranger est *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen. Berlin, Reimer, 1864.* Il a eu une influence considérable sur l'enseignement en Prusse, en fondant à Berlin un séminaire de Pédagogie mathématique, d'où sont sortis maints géomètres célèbres, Clebsch entre autres. Il y a beaucoup de vues justes dans le plan d'un Institut mathématique que M. F. Müller a tiré du *Nachlass* de Schellbach, et publié à la fin de sa notice. Ajoutons que ces vues sont en grande parties réalisées dans les Universités belges où la Faculté des sciences mathématiques est étroitement unie aux hautes Écoles techniques.

---

9. **Das 200-jährige Jubiläum der Dampfmaschine**, 1706-1906 von K. Hering, Ingenieur. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1907 (In 8 de IV-58 pp. avec 13 figures dans le texte). Prix : 1 marc 60.

Sommaire. Introduction (p. 1). I. La vapeur avant Papin : Archimède, Heron, Vitruve, Anthemius, Salomon de Caus, Branca, le marquis de Worcester (pp. 2-6). II. Découverte de la machine à vapeur par Papin (1647-1712). Biographie de Papin. La première machine à vapeur. Travaux de Savery. La seconde machine à vapeur de Papin. Son bateau à roues (et non à vapeur) (pp. 7-36). III. Le développement de la machine à vapeur : Newcomen, Cawley, Watt, Alban, Corliss, Hirn (pp. 37-43). IV. La machine à vapeur dans la vie économique (pp. 44-57). Bibliographie (p. 58).

La brochure de M. Hering, comme on le voit, est surtout consacrée à Papin. Elle devrait être corrigée, au moins pour le paragraphe consacré à Héron, au moyen de livres plus modernes que ceux qui sont cités dans la bibliographie.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1579.

(Voir *Mathesis* (3), VI, p. 168).

(**Énoncé rectifié**). *Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque* M *d'une circonférence* O *sur les côtés d'un triangle inscrit* ABC *rencontrent les côtés correspondants en* A_1, B_1, C_1 *et la circonférence* O *en* A_2, B_2, C_2. *Si l'on porte sur* A_1M, B_1M, C_1M *respectivement les longueurs* $A_1A_3 = A_2M$, $B_1B_3 = B_2M$, $C_1C_3 = C_2M$, *les points* A_3, B_3, C_3 *sont situés sur une même perpendiculaire à la droite de Simson de* M. *La figure place le point* M *sur l'arc* BC. (Ed. Collignon)

Nous montrerons que les points B_3, C_3 se projettent en un même point de B_1C_1, ou ce qui revient au même, que la somme des projections de C_1C_3 et B_1B_3 sur C_1B_1 est égale à C_1B_1; ou encore, à cause de $C_1C_3 = C_2M$, $B_1B_3 = B_2M$, que la projection de la corde C_2B_2 sur C_1B_1 est égale à C_1B_1, ou enfin, puisque AA_2, BB_2, CC_2, B_1C_1 sont perpendiculaires à un même diamètre du cercle O, que la projection de BC sur B_1C_1 est égale à B_1C_1. Construisons le parallélogramme BCB_1N et traçons la droite C_1N. Les triangles MC_1B, MCB_1 étant semblables, on a

$$\frac{BC_1}{CB_1} = \frac{BC_1}{BN} = \frac{MB}{MC}.$$

L'angle NBC_1 étant égal à CMB, les triangles MBC, BC_1N sont également semblables, et comme ils ont deux couples de côtés homologues perpendiculaires, les côtés restants BC_1 et C_1N le sont aussi: donc BC_1, équipollent à B_1N, se projette sur BC_1 suivant une droite égale à BC_1.

Donc les points A_3, B_3, C_3 se projettent en un même point W de la droite AB_1C_1 et par conséquent ils sont collinéaires et la droite $A_3B_3C_3$ est perpendiculaire à la droite de Simson de M.

Remarques. I. Le point W, intersection des droites AB_1C_1, $A_3B_3C_3$ est le point de contact de la droite de Simson AB_1C_1 avec son enveloppe la podaire de à trois rebroussements.

II. Ce théorème de M. Collignon conduit à d'autres constructions de

point W. Ainsi, si l'on projette les points A_2, B_2, C_2 sur la parallèle p' à $p \equiv A_1B_1C_1$, menée par M, en A_4, B_4, C_4, on a $WA_1 = MA_4$, $WB_1 = MB_4$, $WC_1 = MC_4$. Donc A_1A_4, B_1B_4, C_1C_4 sont équipollentes à WM.

III. Pour d'autres renseignements, consulter : *Notes sur l'Hypocycloïde à trois rebroussements, par J. Neuberg* (1906); la démonstration donnée ci-dessus est empruntée en très grande partie à ces Notes.

(Abramescu)

M. Droz-Farny a également remarqué que l'énoncé primitif de la question est fautif.

Question 1584.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 200).

On donne deux droites Ox *et* Oy *et un point* A. *Une droite qui se meut parallèlement à elle-même rencontre* Ox *en* B, Oy *en* C. *Trouver l'enveloppe de la perpendiculaire* BD *abaissée de* B *sur la droite* AC.

Cette enveloppe est une parabole dont on demande de construire la directrice et le foyer.

Trouver le point de contact de BD *avec son enveloppe.*

La projection D *de* B *sur* AC *décrit une cubique circulaire. Cette courbe peut elle être une cissoïde, une strophoïde, une trisectrice de Maclaurin?*

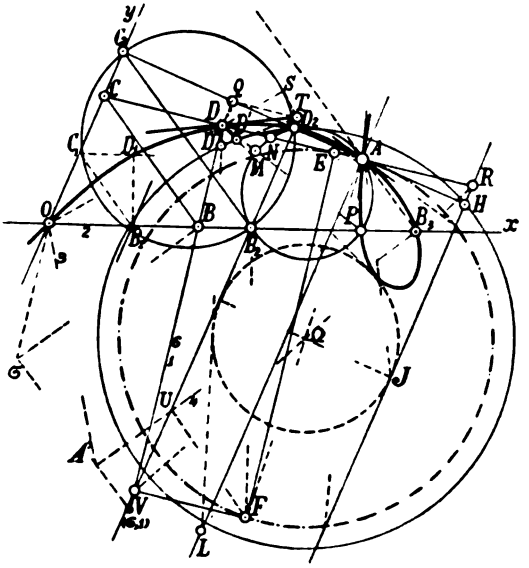
(J. Neuberg)

Solution par M. Jeřábek (Brünn). 1. Lorsque le rayon AC tourne autour de A, il engendre un faisceau qui est projectif avec les deux ponctuelles décrites par B et C sur Oy et Ox, et aussi avec la ponctuelle marquée sur la droite de l'infini par la droite BD perpendiculaire à AC. Donc la droite BD joignant les éléments homologues de deux ponctuelles projectives qui ont pour supports Ox et la droite de l'infini, enveloppe une parabole π touchant Ox.

Le point de contact de Ox est la position de B lorsque BD se confond avec Ox. Donc il suffira de mener par A une perpendiculaire à Ox, et par le point où elle rencontre Oy une parallèle à BC, qui coupera Ox au point cherché.

2. Pour trouver la directrice, il suffit de construire deux couples de tangentes rectangulaires. En traçant AC_1 parallèle à Ox, C_1B_1 parallèle à CB, enfin B_1D_1 perpendiculaire à Ox, nous aurons deux tangentes

rectangulaires B_1x et B_1D_1. Pour obtenir un autre couple, on peut mener par A les droites B_2C_2 parallèle et AC_4 (*) perpendiculaire à BC.



puis C_4B_4 parallèle à BC la perpendiculaire B_4A à AB_2 et C_4B_4 se coupent en un point G de la directrice. Les triangles C_1AC_4, B_1B_2G ayant deux couples de côtés égaux et parallèles, la directrice GB_1 est parallèle à Oy.

Remarquons en passant que la perpendiculaire OA′ à la droite OA est une tangente.

3. Lorsque la droite AC tend à devenir parallèle à Oy, la droite BD tend à devenir parallèle à Oy, mais en s'éloignant de plus en plus; on en conclut que les diamètres de π sont perpendiculaires à Oy. Par suite, si l'on mène AC_2 perpendiculaire à Oy et C_2B_2 parallèle à CB, la parallèle B_2D_2 à Oy par B_2 est la tangente au sommet de π.

4. Pour obtenir le point de contact de la tangente BD, nous le considérons comme la limite du point de rencontre de deux tangentes infiniment voisines 1, 6 et nous appliquons le théorème de Brianchon à l'hexagone ayant pour côtés les tangentes Ox, OA′, BA′, désignées par 2, 3, 4, la droite de l'infini désignée par 5 et enfin les tangentes 6 et 1. Les diagonales de ce polygone concourent en un même point σ; ce sont les droites $(12, 45) = B\sigma$ parallèle à B_1A', $(23, 56) \equiv O\sigma$ parallèle à BD et $(34, 61) \equiv A'\sigma$. Par suite, la droite $A'\sigma$ rencontre BD au point cherché.

5. On trouve facilement plusieurs lignes passant par le foyer F.

La symétrique de la directrice par rapport à la tangente au sommet B_2D_2 passe par F. Ce point est également situé sur les perpendicu-

(*) La figure ne porte pas toutes les lignes dont il est question.

laires élevées sur les tangentes Ox et $A'B_1$ en leurs points de rencontre B_2, U avec la tangente au sommet. Enfin, il appartient également à la circonférence circonscrite au triangle $OA'B_1$ formé par trois tangentes; AA' est un diamètre de cette courbe.

6. Le lieu du point D est évidemment la podaire du point A par rapport à la parabole π. On peut montrer facilement que cette podaire est une cissoïdale. En effet, du milieu Ω de la distance AF comme centre décrivons deux circonférences $(\Omega, \Omega A)$, $(\Omega, \Omega J)$ dont la seconde touche la droite AD et une parallèle HJ à B_2D_2 au point J. Soient R, V les points de rencontre des droites (AD, HJ), (BD, B_2D_2). Les droites AR et FV étant perpendiculaires à BD sont parallèles et comme A et F sont symétriques par rapport à Ω, R et V le sont également. Par suite, si E est le point de rencontre de AD avec le cercle $(\Omega, \Omega A)$, on a $DE = VE = AR$.

La courbe (D) est donc une cubique singulière, ayant un point double en A, un foyer singulier en Ω, et une asymptote symétrique de HJ par rapport à A. Les tangentes en A passent par les points d'intersection de HJ avec le cercle $(\Omega, \Omega A)$.

7. Examinons quelques cas particuliers.

a) Si le point A est situé sur la bissectrice de l'angle xOy et si BC est perpendiculaire à OA, la courbe (D) est une *strophoïde oblique* dont le foyer singulier coïncide avec la projection P du point double A sur Ox. Le cercle $(\Omega, \Omega J)$ se réduit au point P, de sorte que la courbe (D) est une cissoïdale du point A par rapport au cercle (P, PA) et le diamètre de ce cercle parallèle à Oy.

b) Si le point A est pris sur Ox et si BC est perpendiculaire à Oy, le point A appartient à la tangente au sommet de la parabole π et l'asymptote est perpendiculaire sur l'une des tangentes au point double A; la courbe (D) est maintenant une *ophiuride*.

c) Prenons encore A sur Ox et supposons BC perpendiculaire à Ox. La cissoïdale a alors un point de rebroussement en A. Projetons A en C_2 sur Oy et C_2 en B_2 sur Ox; la perpendiculaire B_2D_2 à AC_2 sera la tangente au sommet de π et le symétrique de D_2 par rapport à Ox en est le foyer(*).

d) Considérons encore le cas où Oy est remplacée par une paral-

(*) Voir *Mathesis* (2), I, p. 129, la question 684, résolue géométriquement par V. Jeřábek.

lèle m à Ox et où BC est perpendiculaire à Ox. La cissoïdale du point A sera symétrique par rapport à la perpendiculaire AP à Ox; B_2 coïncidera avec P, Ox sera la tangente au sommet. Le foyer F sera situé sur AP, et si A se projette en C_2 sur m, on aura $PF = C_2A$.

Si de plus A est situé sur Ox, le lieu (D) est une cissoïde de Dioclès.

e) On obtient une trisectrice de Maclaurin si $AB_2 : AC_2 = -3$, et une strophoïde droite si A est le milieu de B_2C_2.

M. Jeřábek montre aussi que la courbe (D) peut être considérée comme la projection de la courbe d'intersection de deux quadriques réglées. Nous ajournons pour le moment la publication de cette partie qui est assez longue.

M. Fr. Dupont a donné une bonne solution synthétique, qui se rapproche en quelques points de celle de M. Jeřábek.

MM. Abramescu et H. Lez ont traité l'enveloppe de la droite BD et le lieu du point D par le calcul; la question 1584 se prête mieux à une solution synthétique.

Les podaires remarquables de la parabole sont : la cissoïde de Dioclès, la strophoïde, la trisectrice de Maclaurin, l'ophiuride et la conchoïde de Sluze, qu'on obtient en prenant pour pôle respectivement le sommet, un point de la directrice (strophoïde droite, lorsque le pôle est le pied de la directrice), le symétrique du sommet par rapport au pied de la directrice, un point de la tangente au sommet, un point de l'axe positif de la parabole.

×Question 1593 (*).

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 256).

I *étant le centre du cercle inscrit au triangle* ABC, *on décrit des sommets* A, B, C *comme centres trois circonférences passant par* I; *la première coupera* AB *en* A_c *et* AC *en* A_b; *la seconde*, BC *en* B_a *et* BA *en* B_c; *la troisième*, CA *en* C_b *et* CB *en* C_a. *Les cordes* A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b *en se coupant deux à deux déterminent un triangle* $A_1B_1C_1$. *Cela posé* ·

1° *Les droites* IA_1, IB_1, IC_1 *sont respectivement perpendiculaires sur* BC, CA, AB.

2° I *est le centre du cercle circonscrit au triangle* $A_1B_1C_1$.

3° $A_bB_1 = C_1A_c$, $B_aA_1 = C_1B_c$, $C_aA_1 = B_1C_a$.

(*) Les n°s 1 et 2 de la question manquent de généralité ou sont mal énoncés. MM. Majorin et Plakhovo nous ont adressé une solution partielle. M. Malaise a corrigé en partie l'énoncé en se proposant de généraliser la question. (J.N.)

4° *Le triangle* $A_1B_1C_1$ *est semblable à chacun des triangles* $A_1C_aB_a$, $C_aB_1A_b$, $B_aA_aC_1$ *et égal à leur somme.*

Des propriétés analogues ont lieu pour les cercles exinscrits.

(VERKAART)

Généralisation par M. DELAHAYE. Substituons au centre I du cercle inscrit un point quelconque L pris à l'intérieur du triangle ABC, et appelons A'_c, A'_b les intersections de la circonférence (A, AL) avec les prolongements des côtés BA, CA; les cercles (B, BL), (C, CL) déterminent de même sur les prolongements des côtés de nouveaux points B'_a, B'_c, C'_b, C'_a. Nous désignerons par α et α' les cordes A_cA_b et $A'_cA'_b$ du cercle (A, AL), par β et β', γ et γ' les cordes B_cB_a, $B'_cB'_a$, C_aC_b, $C'_aC'_b$ des cercles (B, BL), (C, CL). Ces droites sont respectivement parallèles aux bissectrices extérieures du triangle ABC ou aux côtés du triangle $I_aI_bI_c$ qui a pour sommets les centres des cercles exinscrits. Les droites α, β, γ en se coupant déterminent un triangle $A_1B_1C_1$ et les droites α', β', γ' un triangle $A'_1B'_1C'_1$. Les surfaces des triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ seront représentées par S, S_1, S'_1. Nous considérerons encore d'autres triangles que nous désignerons par les lettres affectées à leurs côtés; par exemple, le triangle AA_bA_c sera désigné par *abc* et son aire soumise à la règle des signes des aires par (abc).

1. *Les trois triangles* $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$. $I_aI_bI_c$ *ont un centre d'homothétie commun* D. En effet, la droite I_aI_b par exemple étant équidistante des parallèles γ, γ' passe par les milieux des distances $A_1A'_1$, $B_1B'_1$; d'où l'on conclut aisément que les points I_a, I_b, I_c sont les milieux des distances $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$, et que

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S'_1} = 2\sqrt{I_aI_bI_c}.$$

Une propriété analogue s'applique aux couples de triangles $(\alpha'\beta\gamma,\ \alpha\beta'\gamma')$, $(\alpha\beta'\gamma,\ \alpha'\beta\gamma')$, $(\alpha\beta\gamma',\ \alpha'\beta'\gamma)$ remplaçant le couple $(A_1B_1C_1,\ A'_1B'_1C'_1)$; on pourrait même remplacer les cercles A, B, C par des cercles qui n'ont pas de point commun L.

Remarquons encore les relations suivantes qui ont lieu dans la même hypothèse générale :

$$\begin{aligned} S_1 - (a\beta\gamma) - (b\gamma\alpha) - (c\alpha\beta) &= S'_1 - (a'\beta'\gamma') - (b\gamma'\alpha') - (c\alpha'\beta') \\ &= S - (abc) - (\beta ca) - (\gamma ab). \end{aligned}$$

2. *Si le point* L *coïncide avec* I, *on a*

$$(abc) + (\beta ca) + (\gamma ab) - S = 0 \qquad (1)$$

et réciproquement.

En effet, soient λ, μ, ν, les distances AL, BL, CL; on a

$$\frac{(\alpha bc)}{S} = \frac{\lambda^2}{bc}, \quad \frac{(\beta ca)}{S} = \frac{\mu^2}{ca}, \quad \frac{(\gamma ab)}{S} = \frac{\nu^2}{ab}.$$

Par conséquent, le premier membre de (1) revient à

$$\frac{S}{abc}(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 - abc). \tag{2}$$

Lorsque L est en I, on a

$$p - a = AI \cos \tfrac{1}{2}A, \quad \text{d'où} \quad \overline{AI}^2 = \frac{bc(p-a)}{p}, \quad \text{etc.}$$

et la quantité (2) se réduit à zéro.

Plus généralement, d'après un théorème connu, le lieu d'un point L tel que l'on ait

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 = k,$$

est une circonférence qui a pour centre le barycentre des points A, B, C chargés des poids a, b, c, c'est-à-dire le point I. Lorsque L est en I, cette circonférence se réduit à son centre et l'on a nécessairement l'égalité (1).

3. *Les perpendiculaires abaissées de* A_1, B_1, C_1 *ou de* A'_1, B'_1, C'_1 *respectivement sur* BC, CA, AB *concourent au centre* ω *du cercle circonscrit au triangle* $A_1B_1C_1$ *ou au centre* ω' *du cercle* $A'_1B_1C'_1$.

En effet, les perpendiculaires abaissées de A_1 et B_1 par exemple forment avec A_1B_1 des angles égaux à BCI, ACI (côtés correspondants perpendiculaires), donc elles se coupent sur la perpendiculaire élevée au milieu de A_1B_1, etc.

Les points ω, ω' sont en ligne droite avec D et le milieu de la distance $\omega\omega'$ est le centre du cercle $I_aI_bI_c$.

Lorsque L est en I, ω coïncide également avec I.

4. *Le lieu d'un point* L *tel que la droite* LA_1 *soit perpendiculaire à* BC *est une hyperbole.*

En effet, la droite LA_1 étant alors la corde commune aux cercles (B, BL), (C, CL), on a : $A_1C_a.A_1C_b = A_1B_a.A_1B_c$; d'où l'on conclut : *angle* $C_bB_cA_1 = C_bC_aB_a = A_1C_1B_1$. Par conséquent, la droite B_aC_b est parallèle à B_1C_1 ou perpendiculaire à AI, et l'on a : $AB_c = AC_b$ ou $(c - \mu) = (b - \nu)$, ou encore $\nu - \mu = b - c$. Il résulte de là que le lieu de L est une hyperbole passant par A et ayant pour foyers les sommets B et C.

Si la droite LA'_1 doit être perpendiculaire à BC, on trouve la condi-

tion $c+\mu=b+\nu$ ou $\mu-\nu=b-c$. Concluons que l'une des branches de l'hyperbole se rapporte au point A_1, l'autre au point A_1'.

Le lieu du point A_1 se trouve encore facilement. Car les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ se meuvent parallèlement à eux-mêmes; donc le point A_1 décrit une droite passant par A et par le point de contact du côté BC avec le cercle inscrit.

REMARQUE. Pour que les deux droites LA_1, LB_1 soient perpendiculaires à BC, CA, on doit avoir

$$a+\lambda=b+\mu=c+\nu.$$

Supposons $a>b>c$; alors $\mu-\lambda=a-b$, $\nu-\mu=b-c$ et le point L est à l'intersection de deux hyperboles dont l'une a pour foyers B, C et touche AI en A, et dont l'autre a pour sommets C, A et touche BI en B; mais il ne faut combiner que les branches qui entourent respectivement les foyers A et B, de sorte qu'un seul point intérieur au triangle ABC répond à la question.

Ce point ne peut coïncider avec I, intersection des tangentes en A et B que si le triangle ABC est équilatéral; les deux hyperboles considérées sont alors remplacées par les hauteurs issues de A et B.

5. *Si le triangle* $A_1B_1C_1$ *est homologique avec* ABC, *il en est de même du triangle formé par les droites* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, *et réciproquement.*

En effet, soient X, Y, Z et X', Y', Z' les points de rencontre des côtés de ABC avec les côtés correspondants des deux autres triangles. Un théorème connu donne

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}}\cdot\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1A}}=1,\qquad \frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1B}}\cdot\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}=1;$$

d'où

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=\frac{c-\lambda}{b-\lambda},\qquad \frac{\overline{X'B}}{\overline{X'C}}=\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{c-\mu}{b-\nu}.$$

En déterminant de même les rapport de section des points Y, Y', Z, Z', on voit que

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=\frac{(c-\lambda)(a-\mu)(b-\nu)}{(b-\lambda)(c-\mu)(a-\lambda)}=\frac{\overline{X'B}}{\overline{Y'C}}\cdot\frac{\overline{X'C}}{\overline{Y'A}}\cdot\frac{\overline{Z'A}}{\overline{Z'B}}.$$

Donc le triangle ABC est homologique avec les deux autres lorsque

$$(c-\lambda)(a-\mu)(b-\nu)=(b-\lambda)(c-\mu)(a-\lambda)$$

ou que

$$\Sigma\lambda\mu(a-b)+\Sigma ab(\lambda-\mu)=0. \qquad (3)$$

Le même théorème est applicable au triangle $A_1B_1C_1$ comparé à celui qui est formé par les droites $B_2'C_3'$, $C_2'A_3'$, $A_2'B_3'$; on obtient la même condition d'homologie sauf le changement de λ, μ, ν en $-\lambda, -\mu, -\nu$.

La condition (2) est remplie lorsque $\lambda = \mu = \nu$, ce qui place le point L au centre du cercle ABC.

On peut se demander la condition pour que la droite IA_1 soit perpendiculaire à BC. Soient D et E les projections des points I et A_1 sur BC. Les angles A_1C_2C, A_1B_2B étant égaux à $1^{dr} - \frac{C}{2}$, $1^{dr} - \frac{B}{2}$, on a

$$C_2E = A_1E \operatorname{tg}\frac{C}{2}, \quad B_2E = A_1E \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{C_2E}{B_2E} = \frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

D'autre part

$$C_2D = C_2C - DC = \nu - (p - c), \quad DB_2 = \mu - (p - b);$$

par suite, les points D et E coïncident si

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}} = \frac{\nu - (p-c)}{\mu - (p-b)} = \frac{\nu - r\cot\frac{C}{2}}{\mu - r\cot\frac{B}{2}}.$$

Cette égalité étant de la forme $m\mu + n\nu = p$, le lieu du point L est généralement un ovale de Descartes. Si AB = AC, ce lieu est la hauteur issue de A.

(J. N.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours d'admission en 1907 (114e promotion).

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

I. Soient $f(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ deux fonctions de la variable indépendante θ et soient $f'(\theta)$ et $\varphi'(\theta)$ leurs dérivées. On pose

$$x = f(\theta) - \varphi'(\theta), \quad y = \varphi(\theta) + f'(\theta),$$

$$X = f'(\theta)\sin\theta - \varphi'(\theta)\cos\theta, \quad Y = f'(\theta)\cos\theta + \varphi'(\theta)\sin\theta.$$

Démontrer que l'on a identiquement

$$dx^2 + dy^2 = dX^2 + dY^2.$$

II. Former l'équation du 3e degré qui admet pour racines les longueurs des côtés d'un triangle, connaissant le périmètre $2p$, la somme des trois hauteurs $2h$ et l'aire S du triangle.

Application numérique. Calculer les trois côtés en supposant $2p = 16^m$, $2h = 18^m.60$, $S = 12^{m^2}$.

III. On donne quatre quantités a, b, c, d, réelles et différentes entre elles. Soit

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

1° Déterminer une fonction $\varphi_1(x)$, polynome du 3° degré, tel qu'on ait

$$\varphi_1(a) = b, \quad \varphi_1(b) = c, \quad \varphi_1(c) = d, \quad \varphi_1(d) = a.$$

2° Si l'on permute dans $\varphi_1(x)$, a, b, c, d de toutes les manières possibles, on trouve six fonctions différentes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$.

Soient $F(x)$ la somme de ces six fonctions et

$$G(x) = f(x) + \tfrac{1}{2}x^3 F(x).$$

Former la fonction $G(x)$ et étudier la variation de cette fonction.

3° Déterminer les deux intégrales indéfinies.

$$\int G(x)dx, \quad \int \frac{dx}{G(x)}.$$

CALCUL.

Soit $\omega = \dfrac{3\pi}{11} = \dfrac{400^g}{11}$.

1° Calculer les valeurs numériques de chacune des quantités

$$\sin\omega, \quad \sin 3\omega, \quad \sin 4\omega, \quad \sin 5\omega, \quad \sin 9\omega.$$

2° Calculer, en se servant des valeurs précédentes, l'expression

$$4(\sin\omega + \sin 3\omega + \sin 4\omega + \sin 5\omega + \sin 9\omega)^2.$$

N. B. Les calculs seront faits avec des tables centésimales à 5 décimales.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

On considère trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. A tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, on fait correspondre le point Q de coordonnées $\dfrac{a^2x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{a^2y}{x^2+y^2}$, 0, a étant une constante. Le point M, dont on suppose la masse égale à l'unité, est sollicité par une force MF, dirigée suivant MQ (et dans le sens MQ), et dont la grandeur absolue est égale au produit de MQ par un coefficient donnée K^2.

1° Evaluer les projections de la force MF sur les axes Ox, Oy, Oz.

2° Dans le champ de la force ainsi défini, déterminer les surfaces de niveau et les lignes de force.

3° Le point M se mouvant sous l'action de la force MF, chercher le mouvement de sa projection M′ sur Oz..

4° On fera voir que l'on peut disposer des conditions initiales du mouvement du point M de façon que la trajectoire de ce point se projette sur le plan des xy suivant un cercle donné, de centre O et de rayon R supérieur à a. Exprimer dans ce cas les coordonnées du point M en fonction du temps. Tâcher d'interpréter cinématiquement ce mouvement.

5° En supposant toujours remplies les conditions initiales sans il s'agit au 4°, démontrer que la trajectoire du point M est une courbe algébrique, si le rapport $\frac{R^2 - a^2}{R^2}$ est le carré d'un nombre rationnel.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1348. Les deux équations

$$x^3 - 5x - 2y = 0, \quad y^3 - 2x - 5y = 0$$

ont pour solutions

$$(0, 0),\ (\sqrt{7}, \sqrt{7}),\ (-\sqrt{7}, -\sqrt{7}),\ (\sqrt{3}, -\sqrt{3}),\ (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$
$$(2, -1),\ (-2, 1),\ (1, -2),\ (-1, 2).$$

(E. N. Barisien)

En combinant les équations proposées par addition ou par soustraction, on trouve

$$(x+y)(x^2+y^2-xy-7) = 0, \quad (x-y)(x^2+y^2+xy-3) = 0,$$

et l'on est conduit à résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2-xy-7=0, \\ x-y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2+xy-3=0, \\ x+y=0; \end{cases} \quad \text{etc.}$$

1349. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}.$$

(E. N. Barisien)

Solution $x = \frac{129}{40}$. A vérifier.

1350. Résoudre l'équation

$$(x^2 + x - 2)^2 - x(x+1) = 0.$$

(E. N. Barisien)

Poser $x^2 + x = y$.

1851. Résoudre l'équation

$$\sqrt[7]{x^2-3x+2}+\sqrt[7]{x^2-7x+12}=\sqrt[7]{2(x^2-5x+7)}.$$

(E. N. Barisien)

L'équation est de la forme

$$\sqrt[7]{A}+\sqrt[7]{B}-\sqrt[7]{A+B}=0;$$

elle admet les solutions $A=0$, $B=0$, $A+B=0$. En admet-elle d'autres?

1852. L'hyperbole d'Apollonius relative à un point de la développée d'une conique est tangente à cette conique.

En effet, deux des pieds des normales issues d'un point de la développée étant confondus, c'est en ce point que la conique est tangente à l'hyperbole d'Apollonius. D'ailleurs, cette hyperbole, pour le point $\alpha=\frac{c^2}{a}\cos^3\varphi$, $\beta=-\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi$ de la développée d'une ellipse a pour équation $xy-bx\sin^3\varphi-ay\cos^3\varphi=0$; en dérivant cette équation par rapport à φ, on trouve $\operatorname{tg}\varphi=ay:bx$ d'où des valeurs de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, qui réduisent l'équation de l'hyperbole à $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$.

1853. La courbe

$$2x^2-5xy-3y^2+4x-3y+7=0$$

étant rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy, on demande de faire tourner ces axes autour de l'origine d'un angle α tel que la nouvelle équation de la courbe soit privée du terme en y^2.

(*Gazeta Matematica*, de Bucharest)

1854. Trouver, pour $x=\infty$, la limite de l'expression

$$y=x\left[(4x^2-3)^{\frac{5}{2}}-x(8x^2-9)\right].$$

On écrit

$$y=x\frac{(4x^2-3)^5-x^2(8x^2-9)^2}{(4x^2-3)^{\frac{5}{2}}+x(8x^2-9)}$$

$$=\frac{27x(x^2-1)}{x^5\left(4-\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}+x^5\left(8-\frac{9}{x^2}\right)}.$$

Divisons numérateur et dénominateur par x^5, puis faisons $x=\infty$; il viendra $\lim y=\frac{27}{16}$.

(*Gazeta Matematica*, de Bucharest)

1855. Dans tout triangle ABC, les distances du centre I du cercle inscrit aux médianes AA′, BB′, CC′ ont pour expression

$$\frac{(b-c)r}{2m_a}, \quad \frac{(c-a)r}{2m_b}, \quad \frac{(a-b)r}{2m_c}. \qquad \text{(ABRAMESCU)}$$

On exprime que ABA′ est la somme des triangle IAB, IBA′, IAA′.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1896. Si on projette un point M d'une ellipse en P et Q sur les diamètres conjugués égaux, le milieu I de PQ est situé sur la normale en M. Le point de Frégier correspondant à M est le symétrique de M par rapport à I. Trouver le lieu de I lorsque M parcourt l'ellipse.

(E. N. BARISIEN)

×**1897.** Calculer les angles d'un triangle ABC, sachant que l'angle B est double de l'angle C et que le rapport du côté BC à la hauteur correspondante a une valeur donnée m. — Discussion.

1898. On donne deux plans α, β et une droite m. D'un point quelconque M de m on abaisse sur α et β les perpendiculaires MA, MB. Démontrer que la droite $AB \equiv g$ engendre un paraboloïde hyperbolique.

Réciproquement, tout paraboloïde réglé peut être engendré ainsi d'une infinité de manières. (J. NEUBERG)

1899. Trouver l'équation qui donne les arêtes OA, OB, OC d'un trièdre trirectangle en O, connaissant la somme s des arêtes OA, OB, OC, la surface totale S et le volume V du tétraèdre OABC.

Discuter l'équation obtenue en supposant $s = \alpha + \beta$, $S = \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2)$, $V = \frac{1}{12}\beta(\alpha^2 - \beta^2)$ et la résoudre complètement dans l'hypothèse

$$\beta = \frac{23 \pm 3\sqrt{33}}{58}\alpha.$$

(ABRAMESCU)

×**1900.** Les perpendiculaires élevées aux sommets B, C d'un triangle quelconque ABC sur le côté BC rencontrent les côtés opposés AC, AB respectivement en B′, C′. Démontrer que les droites BB′, CC′ sont vues du centre d'un cercle tritangent sous des angles égaux ou supplémentaires. (O PUND)

SUR LES DERNIERS CHIFFRES DES CARRÉS,

par M. VERKAART (Haaksbergen, Hollande).

Les propositions suivantes sont, en partie, connues.

1. Le chiffre des dizaines d'un carré impair est pair. Le chiffre des dizaines d'un carré terminé par 0 ou 4 est pair. Le chiffre des dizaines d'un carré terminé par 6 est impair, et réciproquement.

2. Il y a 22 *désinences* de deux chiffres possibles : 01, 21, 41, 61, 81; 04, 24, 44, 64, 84; 16, 36, 56, 76, 96; 09, 29, 49, 69, 89; 00; 25.

Les seuls carrés se terminant par deux chiffres égaux sont donc ceux en 00 et en 44.

3. $(50m \pm p)^2$ se termine par les mêmes 2 chiffres que p^2. Donc, à côté de toute désinence de 2 chiffres d'une racine, il y en a au moins 3 autres dont le carré se termine par les mêmes 2 chiffres.

Si p est 0 ou 5, les deux derniers chiffres de $(10n \pm p)^2$ sont indépendants de n.

Il suit de là que les 20 premières désinences du n° 2 correspondent chacune à 4 désinences de racines; les désinences 00 et 25 correspondent chacune à 10 désinences de racines.

Comme $20.4 + 2.10 = 100$, on a bien épuisé les 100 désinences des racines.

4. Si les deux derniers chiffres d'un carré forment un nombre qui est $M.8 + 5$ (ou sont 21, 29, 61, 69), le chiffre des centaines est impair. Si ce nombre est $M.8 + 1$ (ou 41, 81, 49, 89, 25), le chiffre des centaines est pair.

5. Le chiffre des centaines d'un carré en 25 est 0, 2 ou 6; jamais 4 ou 8.

6. Le chiffre des centaines d'un carré pair peut être pair ou impair.

7. Les seuls carrés se terminant par 3 chiffres égaux sont ceux en 000 et en 444.

8. $(500m \pm p)^2$ se termine par les mêmes 3 chiffres que p^2. Donc à côté de toute désinence de 3 chiffres d'une racine il y a au moins 3 autres désinences, dont le carré se termine par les mêmes chiffres.

$(250l \pm p)^2$ se termine par les mêmes 3 chiffres que p^2 : 1° si p et l sont pairs tous deux; 2° si p est impair.

9. Si p se termine par 0 ou 5 les trois derniers chiffres de $(100n \pm p)^2$ sont indépendants de n.

10. Il suit des n^os^ 4, 5, 6 que les désinences paires des carrés du n° 2 (excepté 00) donnent $10 \times 10 = 100$ désinences de 3 chiffres ; les désinences impaires (excepté 25) donnent $10 \times 5 = 50$ désinences de 3 chiffres.

La désinence 00 est précédée de 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 ; la désinence 25 est précédée de 0, 2 ou 6.

En somme, 159 désinences de 3 chiffres.

11. Il suit des n^os^ 8 et 9 que les désinences paires de 3 chiffres (excepté celles en 0) correspondent chacune à 4 désinences de racines ; les désinences impaires de 3 chiffres (excepté celles en 5) correspondent chacune à 8 désinences de racines ; les 6 désinences en 0 correspondent à 100 désinences en 0 de racines ; les 3 désinences en 5 correspondent à 100 désinences en 5 de racines.

12. Quant aux désinences des 4 derniers chiffres des carrés, nous les diviserons en deux groupes de 2 chiffres chacun. Le premier groupe, celui formé par le chiffre des unités et celui des dizaines, doit être une des désinences du n° 2.

Il suit du n° 4 que, pour un carré impair, le 2^me^ groupe, celui formé par le chiffre des centaines et le chiffre des mille, est impair, c'est-à-dire de la forme $4k + 1$ ou $4k + 3$, si le premier groupe est $M.8 + 5$; et pair, c'est-à-dire de la forme $4k$ ou $4k + 2$, si le premier groupe est $M.8 + 1$.

13. Dans les carrés pairs, le premier groupe peut être $M.16$, $M.16 + 4$, $M.16 + 8$ ou $M.16 + 12$; alors le second groupe est respectivement de la forme $4k$ ou $4k + 1$, $4k$ ou $4k + 3$, $4k + 2$ ou $4k + 3$, $4k + 1$ ou $4k + 3$.

14. Quand le premier groupe est 00, le second ne peut être qu'un des 22 groupes du n° 2. Quand le premier groupe est 25, le second peut être tout nombre pair qui ne se termine pas par 4 ou 8.

15. Il suit du n° 13 que les seuls carrés qui se terminent par 4 chiffres égaux sont ceux en 0000. Si un carré se termine par 444, le quatrième chiffre est nécessairement impair.

16. Excepté dans les carrés divisibles par 5, on a pour chaque premier groupe de 2 chiffres 50 seconds groupes possibles. En somme $20 \times 50 = 1000$ désinences de 4 chiffres. Pour le groupe final 00 on a 22 désinences de 4 chiffres. Pour le groupe final 25 on a $3 \times 10 = 30$ désinences de 4 chiffres possibles.

Donc il y a, en tout, $1000 + 22 + 30 = 1052$ désinencee de 4 chiffres possibles.

17. $(5000m \pm p)^2$ se termine par les mêmes 4 chiffres que p^2. Donc à côté d'une désinence de racine de 4 chiffres, il y en a au moins 3 autres, dont les carrés se terminent par les mêmes 4 chiffres.

$(2500l \pm p)^2$ se termine par les mêmes 4 chiffres que p^2 : 1° si p est impair et l pair ; 2° si p est pair.

$(1250k + p)^2$ se termine par les mêmes 4 chiffres que p^2 : 1° si $k = \text{M}.4$; 2° si $k = \text{M}.4 + 2$, $p = \text{M}.2$; 3° si $k = \text{M}.4 + 1$, $p = \text{M}.4 - 1$; 4° si $k = \text{M}.4 - 1$, $p = \text{M}.4 + 1$.

$(1250k - p)^2$ se termine par les mêmes 4 chiffres que p^2 : 1° si $k = \text{M}.4$; 2° si $k = \text{M}.4 + 2$, $p = \text{M}.2$; 3° si $k = \text{M}.4 + 1$, $p = \text{M}.4 + 1$; 4° si $k = \text{M}.4 - 1$, $p = \text{M}.4 - 1$.

$(1000n \pm p)^2$ se termine par les mêmes 4 chiffres que p^2, si p est 0 ou 5.

18. Pour les carrés non divisibles par 4, on a 500 désinences paires et à chacune de ces désinences correspondent 8 désinences de racines. A chacune des désinences impaires correspondent aussi 8 désinences de racines. Les carrés en 0 correspondent aux 1000 désinences en 0 de racines. Les carrés en 5 correspondent aux 1000 désinences en 5 de racines.

19. Les nombres qui ont les mêmes désinences que leurs carrés, se terminent par

0,	1,	5,	6,
00,	01,	25,	76,
000,	001,	625,	376,
0000,	0001,	0625,	9376,
00000,	00001,	90625,	09376,

etc.

MÉTHODOLOGIE MATHÉMATIQUE.

Sur la théorie de la division en arithmétique élémentaire (*).

Plusieurs manuels d'arithmétiques employés en Belgique contiennent un exposé défectueux de la démonstration de la règle de la division pour la recherche du premier chiffre du quotient d'un nombre de plusieurs

(*) Reproduction partielle d'un article publié en 1886, dans la *Revue de l'Instruction publique en Belgique*, t. XXIX, pp. 285-288.

chiffres par un nombre de plusieurs chiffres, quand le quotient a lui-même plusieurs chiffres.

Nous croyons donc utile de reproduire dans *Mathesis* la critique que nous avons faite du passage de l'arithmétique de Cirodde qui contient cette fausse démonstration (*).

Soit proposé, dit notre auteur, de diviser 79461 par 327... Le quotient contiendra des centaines, des dizaines et des unités... Le produit du diviseur par les centaines du quotient... ne pourra se trouver que dans les 794 centaines du dividende. Mais 794 peut contenir, en outre, quelques centaines qui auraient reflué de la multiplication du diviseur par les dizaines et unités du quotient, plus du reste, s'il y en a un; donc, en divisant 794 par 327, on n'obtiendra pas un nombre moindre que celui des centaines du quotient (**).

Jusqu'ici le raisonnement est irréprochable, mais il n'en est pas de même pour la suite : « on ne pourra pas non plus en trouver un plus grand, *sans quoi ce nombre surpasserait le quotient total, ce qui est absurde : car il est clair qu'en divisant une partie du dividende par le diviseur, on ne doit pas trouver un nombre plus grand qu'en divisant le dividende tout entier par ce même diviseur.* »

Le raisonnement souligné est insuffisant, car il ne s'applique pas au cas où le dividende est 79400, au lieu d'être 79461. Pour rendre la démonstration complète, il faut donc établir directement que la division de 79400 par 327 conduit à un chiffre de centaines au plus égal au quotient 2 de 794 par 327. Mais quand on fait cette démonstration directe pour 79400, on voit qu'elle s'étend d'elle-même à 79461; il suffit, en effet, de dire avec beaucoup d'autres auteurs :(***)

(*) [illegible] se trouve [illegible] nombre; [illegible] sur le point le plus [illegible]

(**) [illegible] seul [illegible] à peu près comme [illegible] est supérieur à [illegible] et par [illegible]

(***) [illegible], il [illegible] pas trop [illegible]

Si 794 divisé par 327 donne le quotient 2, le nombre 794 est inférieur d'une unité, au moins, à 3 fois 327; 79400 est inférieur de cent unités au moins à 300 fois 327, 79461 est aussi inférieur à 300 fois 327.

Ainsi, lorsque l'on complète la démonstration de Cirodde, un raisonnement par réduction à l'absurde devient inutile. Autrement dit, ce raisonnement est à la fois insuffisant et trop compliqué. Il nous semble donc devoir être banni de l'enseignement. (P. M)

BIBLIOGRAPHIE.

Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Ubungen über analytische Geometrie, von Otto Staude, Professor an der Universität Rostock. Leipzig, Teubner, 1905 (In-8, cartonné de viii-488 pp., avec 387 fig.). Prix : 14 marcs.

C'est à M. Staude que l'on doit le remarquable article *Sur les surfaces du second ordre et leurs courbes d'intersection*, qui a paru dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Invité par la maison Teubner à publier un Traité sur les quadriques développant le résumé synoptique contenu dans l'article que nous venons de rappeler, l'auteur a été amené à écrire comme introduction une monographie sur la théorie analytique des formes fondamentales. Telle est l'origine de l'ouvrage que nous annonçons, un peu tardivement, aux lecteurs de *Mathesis*.

Dans ce livre, le seizième de l'excellente *Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften*, l'auteur expose successivement les différents systèmes de coordonnées employés pour fixer les éléments d'une ponctuelle, d'un faisceau de rayons, d'un système plan, des points et des plans de l'espace, du faisceau de plans ou de la gerbe. La rédaction est très claire et permet au lecteur de s'orienter facilement dans les développements progressifs de la théorie; les notions et les méthodes essentielles sont bien mises en lumière; chaque paragraphe est précédé d'une indication sommaire de son contenu et accompagné, s'il y a lieu, d'une figure. On trouvera peut être que l'ouvrage est trop étendu pour une monographie consacrée au point, à la droite et au plan; mais il faut remarquer que l'auteur a voulu composer un manuel pour des leçons et exercices à l'Université; ce que le professeur, faute de temps, ne peut traiter avec détails au cours, l'étudiant le trouvera dans le livre; par exemple, la règle des signes dans tous les cas, la comparaison des faits qui se correspondent par voie de dualité sont établies avec grand soin.

Pour caractériser brièvement ce livre, pour en indiquer l'idée *directrice*, il suffit de dire avec l'auteur qu'il a pour objet *les équations linéaires* et *les transformations linéaires* dans leur interprétation géométrique.

Un abrégé de la table des matières suffit pour donner une idée de la mar[illegible] suivie par l'auteur.

Section I. Ponctuelle et faisceau de rayons, pp. 1-47 (Coordonnées d'un élément, rapport de section, rapport anharmonique). *Section II.* Le pl[illegible] 1. Coordonnées ordinaires, pp. 48-68 (Coord. d'un point, cos. directeurs d'une droite, angle de deux droites, transformation des coord., aire du tria[illegible]. 2. Équations de la droite, pp. 69-91. 3. Coordonnées tangentielles, pp. 82-[illegible] 4. Coordonnées cartésiennes homogènes, pp. 90-104 (Transformation de coord.; coïncidences et incidences). 5. Triangle et quadrangle, pp. 105-1[illegible] (Transversales, pôle et polaire trilinéaires, quadrangle et quadrilatère complets. 6. Coordonnées trilatères, pp. 122-150. *Section III.* L'espace. 1. Coordonnées ordinaires, p. 151-187 (Coord. d'un point, d'un segment rectiligne, d'un triangle. Angles. Transformation des coordonnées. Volume du tétraèdre). 2. Équations du plan et de la droite, pp. 187-219. 3. Coordonnées d'un pl[illegible] pp. 220-227. 4. Coordonnées cartésiennes homogènes, pp. 228-259. 5. Coïncidences et incidences, pp. 260-291 (Formes perspectives, plans transversaux [illegible] trièdre et du tétraèdre. 6. Coordonnées tetraédriques, pp. 292-358 (Coord. d[illegible] point, du plan, de la droite; quadruples hyperboloïdiques; transformation des coord.). 7. Représentation analytique des transformations projectives, pp. [illegible]. 8. Équations entre les coordonnées, pp. 385-407. *Notes*, pp. 408-41[illegible] 1. Déterminants du 2e, 3e, 4e ordre. 2. Systèmes linéaires de 2, 3, 4 équations [illegible]. Renseignements bibliographiques. (J. Neuberg)

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, der Punktes und des Kreises in der Ebene, von [illegible] Vierte Auflage [illegible] Leipzig, Teubner, 1906 (In-8°, [illegible] Prix : [illegible] marcs.

[illegible] se borne pas à la [illegible] mais il va au delà en [illegible] dans ses derniers [illegible] à exercer sa propre [illegible] dans le [illegible] et secondes [illegible] portant [illegible]

[illegible] à engage [illegible] une nouvelle [illegible] nombre d[illegible] [illegible] plus [illegible]

[illegible]

[illegible] Distance [illegible]

deux points. Aire du triangle. Angle de deux droites. II. Ligne droite. Equation générale; équation normale; distance d'un point à une droite; bissectrices d'un angle; propositions sur le triangle. III. Faisceau harmonique. Involution. IV. Le point. Coordonnées tangentielles. Point à l'infini d'une droite. V. Division harmonique; Involution de couples de points. Rapport anharmonique. Involution de trois couples. VI. Involution (suite). Les sept formes de la condition de trois couples involutifs. VII. Résolution de l'équation du 4e degré, avec interprétation géométrique. VIII. Couples de points ou de droites représentés par des équations du second degré. IX. Transformation des coordonnées (cartésiennes et elliptiques) et substitutions orthogonales. X. Substitutions orthogonales ramenant une fonction du second degré à deux variables à une somme de deux carrés. XI. Coordonnées homogènes; coordonnées trilatères. XII. Hexagones de Pascal et de Brianchon (les 60 pascales, les 60 points de Brianchon) des hexagones simples ayant les mêmes six sommets ou les mêmes côtés. XIII. Cercle. Equation ponctuelle, intersection avec une droite, pôle et polaire, équation tangentielle. XIV. Faisceau linéaire de cercles. XV. Réseau orthogonal de cercles.

Hesse a publié sous le titre *Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte* une continuation de l'ouvrage que nous annonçons ici. Cette suite, qui a d'abord paru dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik* et ensuite en brochure séparée de 52 pages, aurait pu être utilement réunie aux quinze Leçons sur le point, la droite et le cercle. (J. NEUBERG)

Inleiding tot de nieuwere Meetkunde van het platte Vlack door J. VERSLUYS. In-8e de 131 p. et 73 figures. Amsterdam, A. Versluys, 1907. Prix : 1,50 florin.

L'auteur a écrit de nombreux livres à l'usage de l'enseignement primaire ou secondaire; ces ouvrages, qui se distinguent par une grande clarté et un bon choix des matériaux, jouissent en Hollande d'une vogue bien méritée. Celui que nous annonçons ici est surtout destiné à ceux qui veulent, par eux-mêmes, se mettre au courant des compléments de géométrie plane. Il se recommande par les mêmes qualités que les autres petits traités de M. J. Versluys.

Voici les questions qui y sont traitées :

Comment on fixe un point d'une ligne droite (rapport de section). Transversales. Figures homologiques. Centres de similitude (Homothétie). Figures directement ou inversement égales, directement ou inversement semblables. Puissance, axe radical, faisceau de cercles. Division et faisceau harmonique. Pôle et polaire, problème d'Apollonius. Figures polaires réciproques. Figures inverses. Rapport anharmonique. Involution. Homographie. Problèmes proposés à la suite de chaque chapitre. Origine et caractères de la géométrie moderne. (J. N).

Tablettes des cotes relatives à la base 20580 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à N et non divisible par 2, 3, 5 ou 7, par G. TARRY. Paris, Gauthier-Villars, 1906 (8 pages gr. in 8 : 2 d'explications; 2 de tables fixes; 4 de tables trouées mobiles). Prix : 1 fr. 25.

L'auteur se propose de construire de nouvelles Tables pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers, pour les douze premiers millions, en les réduisant au moindre volume.

Pour atteindre ce but, il a imaginé un nouveau procédé, qui présente l'avantage de substituer aux divisions successives du nombre considéré, par les différents nombres premiers p, des additions *mentales* de nombres inférieurs à la moitié de p. Ainsi, la simplification apportée est équivalente à celle introduite par les logarithmes dans le calcul des divisions.

Comme exemple d'application de la nouvelle méthode, il fait paraître sous le nom de « Tablettes des cotes... » une Table des facteurs premiers des nombres de 1 à $100489 = 317^2$.

L'accueil fait à cette publication lui dira s'il doit poursuivre ou abandonner son projet.

Tableaux logarithmiques A et B équivalant à des tables de logarithmes à 6 et à 9 décimales, avec notice explicative donnant la théorie et le mode d'emploi des tableaux, par le Docteur A. GUILLEMIN, ancien élève de l'Ecole normale, professeur de physique à l'Ecole de médecine d'Alger. Paris, Alcan, 1906 (2 tableaux in plano, et brochure de 32 pp. in 8). Prix : 4 frcs.

Voici comment l'éditeur annonce ces ingénieuses tables de logarithmes, très peu volumineuses, mais au fond d'un usage assez difficile, parce qu'elles sont basées sur des formules trop spéciales.

« Le premier intérêt, intérêt matériel mais incontestable, qu'offre ce travail du Dr Guillemin est la faible dimension et la clarté précise des tableaux dans lesquels, grâce à une ingénieuse disposition, il a fait rentrer tous les éléments de calcul des tables de 6 et de 9 décimales, éléments qui, jusqu'à présent, faisaient l'objet d'études volumineuses et compliquées.

Le second point important de ce petit livre est que son emploi n'entraîne pas aux longues opérations de calcul nécessitées par les tables ordinaires; l'on n'a plus besoin, pour compléter les éléments de logarithmes destinés à être additionnés de se livrer à des multiplications sur leurs différences tabulaires. Les interpolations de nouveaux termes entre deux consécutifs de tables se réduisent à des additions. Il suffit en effet de donner la première triade de la partie décimale d'un logarithme pour permettre, à l'aide de simples additions, de déterminer non seulement la triade suivante, mais encore toutes celles que l'on peut désirer.

Plus de clarté, moins de travail matériel, moins de causes d'erreurs, tels sont les avantages que présentent ces nouveau tableaux logarithmiques que tous ceux qui s'occupent des sciences mathématiques, auront intérêt à posséder. »

Dreistellige logarithmische und trigonometrische Tafeln herausgegeben von Dr. O. Richter, Oberlehrer am Königl. Albert-Gymnasium in Leipzig. Leipzig und Berlin, Teubner, 1907 (In 18 de 10 pages). Prix : 20 pfennig.

Ces petites tables de logarithmes à *trois* décimales pourraient être très utilement mises entre les mains des élèves des collèges et des athénées pour leur apprendre à faire *vite* des calculs approximatifs. On y trouve les logarithmes de 10 à 199, les antilogarithmes de 0 à 99, les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes, cotangentes de degré en degré de 0 à 90°, puis ceux des sinus et des tangentes de dixième en dixième degré, de 0° à 6°, 9; les valeurs des arcs en fonction du rayon de degré en degré de 0° à 90°; les sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de 0° à 90° aussi de degré en degré; les logarithmes de π, de $(\pi : 180)$, de e; la valeur de l'arc égal au rayon. (P. M.)

Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden nach G. Salmon frei bearbeitet von Dr. W. Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. Siebente Auflage. Erster Teil. Leipzig, Teubner, 1907 (In 8, cartonné de xxxvi-444 pp.). Prix : 10 marcs.

Nouvelle édition du célèbre traité des coniques de Salmon-Fiedler (les 13 premiers chapitres). M. Fiedler a mis en tête de l'ouvrage une attachante biographie de son vieil ami, George Salmon, né à Dublin le 25 septembre 1819, y décédé le 22 janvier 1904.

Tables d'intégrales indéfinies par G. Petit-Bois, Ingénieur civil des Mines. Paris, Gauthier-Villars; Liége, Ch. Beranger, 1906 (In 4° de xii-154 pp.). Prix : 10 francs.

Tafeln unbestimmter Integrale von G. Petit-Bois, Bergingenieur in Lüttich. Leipzig, Teubner, 1906. Prix : 8 marcs.

Ces *Tables* renferment près de 2500 intégrales résolues et classées méthodiquement. Elles sont précédées d'un chapitre sur la transformation des expressions des intégrales, chapitre destiné spécialement aux élèves qui suivent les cours de calcul infinitésimal.

QUESTIONS SUR LES CONIQUES(*),

par M. G. Gérard, ingénieur.

I.

1. On sait que deux diamètres conjugués quelconques d'une hyperbole équilatère ont des directions symétriques par rapport à une asymptote; il en est donc de même de deux cordes supplémentaires AM, BM.

(*) Ce travail nous a été remis par l'auteur lorsqu'il était encore élève à l'école des mines. Bien qu'il ne soit pas essentiellement nouveau dans toutes ses parties, il pourra intéresser la plupart des lecteurs de *Mathesis*, tant par les propositions qu'il énonce que par les méthodes employées. (J. N.)

Réciproquement, *étant donnés deux points fixes* A *et* B, *le lieu du point* M *tel que les bissectrices de l'angle* AMB *aient des directions constantes, est une hyperbole équilatère dont le centre est le milieu* O *de la distance* AB.

Nous allons déduire de ce théorème bien connu quelques conséquences intéressantes.

2. Cherchons la tangente au point M. Soit M′ un second point de la courbe et désignons par N et P les intersections des droites AM, BM′ et AM′, BM. On voit facilement que les angles ANB, APB sont égaux : donc le quadrilatère ANPB est inscriptible. La droite MM′ est, par rapport au cercle ANPB, la polaire du point d'intersection Q de AB et NP. Si l'on fait tendre M′ vers M, MM′ devient la tangente en M à l'hyperbole, NP devient la tangente en M au cercle AMB. Donc *la tangente en* M *est symédiane du triangle* AMB.

On arrive plus rapidement à ce résultat en remarquant que le diamètre OM et la tangente en M ont des directions conjugées par rapport à l'hyperbole et, par suite, des directions symétriques par rapport à une asymptote.

3. Soit à trouver le lieu des points de contact M des tangentes menées parallèlement à une direction donnée aux cercles passant par deux points fixes A, B.

Soient C le centre de l'un de ces cercles, D et E les extrémités du diamètre perpendiculaire à la corde AB. La droite MD est la bissectrice de l'angle AMB et sa direction est constante, l'angle MDC étant la moitié de l'angle constant MCE ; par suite, le point M engendre une hyperbole équilatère passant par A et B.

4. Si une conique est coupée par une circonférence aux points A, B, C, D et si E, F, G sont les points d'intersection des droites (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC), les bissectrices des angles en E, F, G sont parallèles aux axes de la conique.

Par suite, si l'on fait passer par A et B un cercle quelconque, et une conique quelconque, mais dont les axes ont des directions fixes, le lieu des points F, G est une hyperbole équilatère.

5. Considérons dans un plan les ellipses E et les hyperboles H de même centre O, de mêmes directions d'axes et de grandeurs d'axes proportionnelles. Par chaque point M du plan passe une ellipse E_m et une hyperbole H_m des courbes considérées.

Abaissons de M les normales à toutes les ellipses E ; le lieu des points d'incidence est une hyperbole équilatère (A) (hyperbole d'Apollonius, passant par M, par O et ayant ses asymptotes parallèles aux axes des courbes E. C'est ce qu'on peut conclure de l'équation de cette hyperbole ou aussi de ce que cette courbe est le lieu de l'intersection d'un diamètre avec la perpendiculaire abaissée de M sur le diamètre conjugué Cela étant, prenons en chaque point d'incidence la symétrique de la normale correspondante par rapport à un axe de E ; *toutes ces droites vont concourir en un même point* M', *diamétralement opposé à* M *sur l'hyperbole* (A). Cette proposition généralise la question 1803 des NAM, (3) XVII, 1898, p. 340, proposée par Mannheim (Voir *Mathesis*, 1894, p. 96).

Pour fixer la position du point M', observons que (A) passant par O, les droites OM, OM' sont symétriques par rapport à un axe de E. Si x, y sont les coordonnées de M et (a, b), $(a'\ b')$ les demi-axes des coniques E_m, H_m, les coefficients angulaires des normales menées en M à ces courbes ont pour expression

$$m = \frac{a^2 y}{b^2 x}, \quad m' = -\frac{a'^2 y}{b'^2 x},$$

d'où l'on conclut $m = -m'$. Donc ces deux normales ont des directions symétriques par rapport à un axe de E, et comme M est un point de (A), la seconde normale passe en M'. On a donc le théorème suivant : M' *est le point de Frégier de* H_m *relatif à* M, *et la droite* MM' *est une normale commune aux deux courbes* H_m *et* E_m, *ou une tangente commune à leurs développées.*

On peut enfin remarquer que le rôle des points M et M' est réciproque. En d'autres termes, les hyperboles d'Apollonius de M par rapport aux ellipses E, et de M' par rapport aux hyperboles H, se correspondent.

II

Une projection cylindrique étend souvent une propriété d'une circonférence à une ellipse ; au moyen du principe de continuité, on l'étend ensuite à l'hyperbole. Comme premier exemple, je citerai la proposition suivante, énoncée déjà par Steiner :

1. *Soient* ABC *un triangle inscrit à une conique de centre* O ; A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés et* AA', BB', CC' *les droites menées par les*

sommets et rencontrant en A', B', C' *les côtés opposés*, 1° *ces droites se coupent en un même point* H'; 2° *les points* A_1, B_1, C_1, A', B', C' *et les milieux* A'', B'', C'' *des segments* AH', BH', CH' *sont neuf points d'une même conique.*

Voici une démonstration directe de ce théorème.

Menons le diamètre AOα. Si H' désigne le point de rencontre des droites BB', CC', le quadrilatère H'BαC est un parallégramme ; car les cordes AB et Bα étant supplémentaires, Bα est parallèle à OC, et par suite à CC', etc. Il résulte de là que H'α passe par A_1 ; par conséquent, AH' est parallèle à A_1O, A_1 et O étant les milieux de αH' et αA. La première partie du théorème est donc démontrée.

Comme AH' = 2OA_1, la figure H'A_1OA'' est un parallélogramme et A''A_1 passe par le milieu ω de H'O ; semblablement, les droites B''B_1, C''C_1 passent par ω. Soit A_2 le second point de rencontre de la droite AH' avec la conique ; les cordes AA_2, $A_2\alpha$ étant supplémentaires, $A_2\alpha$ est parallèle à BC. On déduit de là que les triangles A''A'A_1 et $AA_2\alpha$ sont homothétiques. On peut donc faire passer par A'', A', A_1 une conique homothétique à la première et ayant pour centre ω, etc.

2. *Les projections* α, β, γ *d'un point* M *d'une ellipse sur les côtés d'un triangle inscrit* ABC, *faites parallèlement aux directions conjuguées* OA_1, OB_1, OC_1 *des côtés correspondants, sont trois points en ligne droite.*

Cette proposition se déduit par une projection cylindrique de celle sur la droite de Simson.

3. Le cas particulier où le centre de la conique est le centre de gravité du triangle ABC donne lieu à la proposition suivante :

Soit E *l'ellipse circonscrite au triangle* ABC *et ayant pour centre le centre de gravité* G. *Par un point quelconque* M *de cette courbe on mène des parallèles aux médianes* AA', BB', CC' *qui rencontrent les côtés* BC, CA, AB, *la première en* α, α', α'', *la seconde en* β, β', β'', *la troisième en* γ, γ', γ''. *Les triples de points* $(\alpha\beta'\gamma'')$, $(\alpha'\beta''\gamma)$, $(\alpha''\beta\gamma')$ *sont situés sur trois droites* Δ, Δ', Δ'' ; Δ *passe au milieu de la distance* MG ; Δ' *et* Δ'' *concourent en un point* N *de l'ellipse* E ; *enfin l'ellipse* E' *circonscrite au triangle formé par* Δ, Δ', Δ'' *et ayant son centre au centre de gravité du triangle, passe par* M, *et* N *est le point diamétralement opposé à* M *sur l'ellipse* E'.

Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où ABC est un trian-

gle équilatéral ; M est alors un point du cercle circonscrit et les droites $M\alpha$, $M\alpha'$, $M\alpha'''$ sont perpendiculaires à BC, CA, AB. Soient α''', β''', γ''' les points où les droites $M\alpha$, $M\alpha'$, $M\alpha''$ rencontrent une seconde fois la circonférence. Le quadrilatère $M\alpha\beta'C$ étant inscriptible, *angle* $\alpha'\alpha\beta' = ACM = A\alpha'''M$; par conséquent, $\alpha\beta'$ est parallèle à $A\alpha'''$. Par analogie $\alpha\gamma''$ est parallèle à $A\alpha'''$, donc les points α, β', γ'' sont situés sur une même droite Δ (droite de Simson) et celle-ci, d'après un théorème connu, passe au milieu de GM. Semblablement, le quadrilatère $M\alpha'A\beta''$ étant inscriptible, *angle* $M\alpha'\beta'' = MAB = M\alpha'''B$; par conséquent, $\alpha'\beta''$ et par analogie, $\alpha'\gamma$ sont parallèles à $B\alpha''$, d'où l'on conclut que les points α', β'', γ sont situés sur une même parallèle à $B\alpha''$. Enfin, α'', β, γ' sont sur une même parallèle à $C\alpha''$.

On voit immédiatement que les droites Δ, Δ', Δ'' forment un triangle équilatéral NPQ.

Le quadrilatère $M\alpha P\gamma$ est inscriptible, deux angles opposés sont égaux à 60° ou à 120°; on en déduit que l'angle $MP\gamma = M\alpha\gamma = 90°$. De même l'angle $MQ\gamma' = 90°$; par suite, M et N sont les extrémités d'un diamètre de la circonférence NPQ.

Enfin, si T est le milieu de MN, la droite Δ, qui passe aux milieux des droites MG, MT est parallèle à GT; dont GT est perpendiculaire au milieu de MN, d'où l'on conclut que N appartient à la circonférence NPQ.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**17**. *Sur un théorème de Fermat.* Dans les *Varia opera mathematica* (1670), p. 118, de Fermat on rencontre le théorème suivant :

Sur le diamètre AB *d'une demi-circonférence* AMB, *mais de l'autre côté, on construit un rectangle* ABCD *dont la hauteur* AD *est égale au côté du carré inscrit au cercle. Soient* F, G *les points de rencontre du diamètre* AB *avec les droites* MD, MC. *Alors*

$$\overline{AG}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AB}^2.$$

Cette proposition a été démontrée géométriquement par Euler (*Novae commentationes*, Ac. sc. imp. Petropol, 1, 1750, p. 49), et a été reproduite par R. Simson et par Grunert. Dans l'*Archiv* de Grunert, elle revient plusieurs fois : t. 27, 116; t. 30, pp. 12 et 276, t. 31, p. 66, où A. Krüger l'étend à l'ellipse et considère aussi le rectangle construit du

côté de la demi-circonférence AMB; ibid., p. 295; t. 32, pp. 11, 46, 124; t. 50, p. 111.

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, le théorème a été démontré par Gerono et par Lionnet (1849, pp. 43 et 189). On peut encore citer deux démonstrations publiées par le *Journal de Battaglini*, 1869, pp. 377 et 378, et une démonstration par le calcul due à M. Simon (*Géom. analytique plane*, pp. 112 et 237).

Ces renseignements bibliographiques sont empruntés à l'excellent ouvrage de M. Max Simon : *Ueber die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX^ten Jahrhundert*

Ne pouvant recourir aux sources, nous ignorons si la démonstration suivante diffère sensiblement de celles qui sont énumérées ci-dessus.

Menons MN perpendiculaire à AB et posons

$$AN = \alpha, \quad NB = \beta, \quad AB = a, \quad AD = d, \quad MN = y.$$

Des triangles semblables donnent (Le lecteur est prié de faire la figure en supposant AM > MB) :

$$\frac{AF}{FN} = \frac{AD}{MN}, \text{ d'où } \frac{AF}{AF + FN} = \frac{AD}{AD + MN}, \quad AF = \frac{\alpha d}{y + d};$$

$$\frac{BG}{GN} = \frac{BC}{MN}, \text{ d'où } \frac{BG}{BG + GN} = \frac{BC}{BC + MN}, \quad BG = \frac{\beta d}{y + d}$$

$$\frac{FG}{DC} = \frac{y}{y + d}, \text{ d'où } FG = \frac{\alpha y}{y + d}.$$

Il en résulte

$$AG = AF + FG = \frac{\alpha d + \alpha y}{y + d}, \quad BF = BG + GF = \frac{\beta d + \alpha y}{y + d};$$

par conséquent,

$$\overline{AG}^2 + \overline{BF}^2 = \frac{d^2(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha d y (\alpha + \beta) + 2\alpha^2 y^2}{(y + d)^2}.$$

Remarquons maintenant que

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2y^2;$$

donc

$$\overline{AG}^2 + \overline{BF}^2 = \frac{d^2(a^2 - 2y^2) + 2ad^2 y - 2a^2 y^2}{(y + d)^2}$$

$$= \frac{2y^2(a^2 - d^2) + 2ad^2 y + a^2 d^2}{(y + d)^2}$$

Si l'on remplace $a^2 - d^2$ par $a^2 - \frac{1}{2}a^2$ ou $\frac{1}{2}a^2$, le numérateur de la dernière fraction se réduit à $a^2(y+d)^2$; donc ....

Le théorème a encore lieu lorsque le rectangle ABCD entoure la demi circonférence AMB; la démonstration se fait de la même manière.

Comme la droite DM coupe la circonférence AMB en un deuxième point M', la droite CM' doit rencontrer le diamètre AB en un point G' symétrique de G par rapport à A.

Par conséquent, le faisceau C (GG'A∞) est harmonique, et les droites CD, CA divisent la corde MM' en parties harmoniques; il en résulte que CA est la polaire de D par rapport à la circonférence.

Si la droite MN coupe les diagonales AC, BD et le côté CD en R, I, Q et si P est le milieu de IR, M.A.C. démontre les relations

$$\text{NP.NR} = \tfrac{1}{2}\overline{\text{MN}}^2, \quad \overline{\text{MP}}^2 + \overline{\text{MR}}^2 = \overline{\text{MQ}}^2,$$

d'où il déduit le théorème de Fermat.

Enfin, si l'on projette la figure sur un plan passant par AB, la circonférence se projette suivant une ellipse dont un axe est égal à a. Si b est le second axe, il est facile de voir que la projection de $\text{AD} = \frac{db}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Donc le théorème de Fermat s'étend à l'ellipse, si l'on prend pour hauteur du rectangle construit sur le grand axe la longueur $\frac{b}{\sqrt{2}}$. On pourrait aussi construire sur le petit axe b un rectangle de hauteur $\frac{a}{\sqrt{2}}$. (J. N.)

×18. *Remarques sur les chiffres terminaux des puissances.* 1° n^2 et plus généralement n^{4p+2} ne peuvent être terminés que par l'un des chiffres 0, 1, 4, 5, 6, 9.

2° n^4 et plus généralement n^{4p} ne peuvent être terminés que par l'un des chiffres 0, 1, 5, 6.

3° Le cube d'un nombre entier peut être terminé par un chiffre quelconque.

4° n et n^5 ont le même chiffre terminal.

5° Les nombres n^{3+4p} et n^{5+4p} peuvent être terminés par un chiffre quelconque.

6° Ont le même chiffre terminal :

$$n \text{ et } n^{1+4p},\ n^2 \text{ et } n^{2+4p},\ n^3 \text{ et } n^{3+4p},\ \ldots,\ n^9 \text{ et } n^{9+4p}.$$

(E. N. Barisien)

VARIÉTÉ.

Histoire des triangles pseudo-isoscèles.

La dénomination *pseudo-isoscèle*, d'abord proposée pour les triangles scalènes dont deux bissectrices extérieures sont égales, a été également appliquée aux triangles scalènes qui ont deux autres éléments égaux, de l'espèce de ceux dont l'égalité a lieu dans le triangle isoscèle à cause de l'axe de symétrie.

M. Emmerich vient de publier, dans le programme du Gymnase et de la Realschule de Mülheim s/Ruhr (1907) une grande étude fort intéressante, intitulée : *Pseudogleichschenklige Dreiecke im Bereich der Winkelhalbierenden*. Nous lui empruntons quelques renseignements bibliographiques.

En 1840, le professeur Lehmus demanda à Steiner une solution géométrique de la question suivante : Un triangle est-il isoscèle lorsque deux bissectrices sont égales ? La solution du grand géomètre, communiquée immédiatement à Lehmus, parut quatre ans plus tard dans le *Journal de Crelle*, XXVIII, p. 375 (*Œuvres complètes*, II, p. 321); elle est plus simple que celles qui avaient été publiées entretemps dans le même Journal. Steiner considère successivement les cas de l'égalité de deux bissectrices intérieures, de deux bissectrices extérieures, d'une bissectrice intérieure et d'une bissectrice extérieure; il examine aussi l'hypothèse de l'égalité des droites divisant deux angles du triangle dans un même rapport quelconque et traite les mêmes questions dans le triangle sphérique.

Le cas de deux bissectrices intérieures a été résolu dans les NAM par Terquem trigonométriquement et par Rougevin, géométriquement ; celui-ci se base sur ce qu'un triangle est déterminé quand on donne un côté, l'angle opposé et la bissectrice intérieure de cet angle. M. Barbarin a traité les trois hypothèses de Steiner et résolu le problème par la trigonométrie, et par la géométrie au moyen d'une construction qui lui a été suggérée par M. de Grainville [illegible] XVI, p. 1[illegible]. Une solution algébrique dans laquelle on égale les expressions de deux bissectrices en fonction des côtés a été publiée par [illegible] 1884 et aussi par Even, [illegible] dans la *Revue de l'Instruction publique*, 1889).

M. [illegible] pseudo-isoscèles dans le [illegible] 1891, pp. 129-133. [illegible] remarquable qui, reprise [illegible] et accompagnée par [illegible] encore dus à [illegible] 112). Pour [illegible] Marx qui a paru [illegible]

[illegible] suivante, [illegible] peut-on [illegible] *Mathesis*, [illegible] théorème!

Un triangle sphérique n'est pas nécessairement isoscèle lorsque les arcs bissecteurs de deux angles sont également inclinés sur les côtés opposés.

M. Emmerich traite les cas les plus simples des triangles pseudo-isoscèles dans le sens le plus général, se réservant les autres cas pour un travail ultérieur. Plusieurs cas ont déjà été examinés dans *Mathesis*, par exemple les triangles automédians, ceux dont les côtés sont en progression arithmétique ou géométrique, etc. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1570.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 112).

Une conique touche les trois côtés du triangle ABC *et passe par l'orthocentre* H. *Démontrer que la tangente au point* H′ *de cette courbe qui est diamétralement opposé à* H, *est une droite de Simson du triangle* ABC. *Trouver le lieu du point* H′. (SCHAFLI)

Soit Σ une conique variable inscrite au triangle ABC et passant par H; cherchons l'enveloppe de la tangente à Σ au point H′, diamétralement opposé à H.

Si cette tangente coupe BC, CA, AB en A_1, B_1, C_1, on sait que les couples de droites (HA, HA_1), (HB, HB_1), (HC, HC_1), joignant H aux sommets du quadrilatère complet AB_1A_1B, sont en involution et que le couple de tangentes menées de H à une conique inscrite à ce quadrilatère appartient à cette involution.

Dans la conique Σ, ces deux tangentes sont confondues avec HX, la tangente en H à Σ; donc HX est un rayon double de cette involution. Coupons ce faisceau par $A_1B_1C_1$ et soient A′, B′, C′ les points de rencontre de cette droite avec HA, HB, HC.

Les droites HX et $A_1B_1C_1$ étant parallèles, les points A′, B′, C′ correspondent à A_1, B_1, C_1 dans une involution dont un point double est à l'infini, et les segments A_1A', B_1B', C_1C' ont un milieu commun M.

Soit P le symétrique de H par rapport à M; les droites PA_1, PB_1, PC_1 sont respectivement parallèles à HA, HB, HC; donc PA_1, PB_1, PC_1 sont perpendiculaires à BC, CA, AB et comme A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite, P est sur le cercle ABC; donc la tangente $A_1B_1C_1$ est une droite de Simson du triangle ABC.

Pour trouver le lieu de H′, soient A″, B″, C″ les points de rencontre

de la tangente HX avec BC, CA, AB et (H_a, H_b, H_c), (E_a, E_b, E_c) les milieux des droites HA, HB, HC et B″C″, C″A″, A″B″. D'après un cas particulier du théorème du Newton (le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est la droite qui joint les milieux des diagonales), les coniques qui touchent le quadrilatère réduit (AB″HC″), c'est-à dire AB″, AC″ et B″C″ en H, ont leurs centres sur la droite H_aE_a. La conique Σ étant inscrite dans ce quadrilatère, son centre I est sur H_aE_a; de même, ce point est aussi sur les droites H_bE_b, H_cE_c. Donc, si F_a, F_b, F_c désignent les symétriques de H par rapport à E_a, E_b, E_c, le point H′ sera à l'intersection des droites AF_a, BF_b, CF_c.

Mais, lorsque A″B″C″ tourne autour de H, le lieu de F_a est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes AB et AC. Toute droite menée par A rencontre cette hyperbole en deux points m et m', dont chacun peut être pris pour H_a, et donnera un point H′ correspondant.

Le lieu de H′, étant coupé en deux points par une droite, est une conique Σ′.

Lorsque mm' coïncide avec AC, les points m, m' confondus sont à l'infini; la droite A″C″ est alors parallèle à AC et la droite BF_b coupe AF_a ou AC au point L_b, isotomique sur AC du point de rencontre de BH avec AC. Σ′ touche donc AC en ce point.

Par conséquent, le lieu de H′ est une conique Σ′ qui touche les côtés du triangle ABC aux points isotomiques des pieds des hauteurs du triangle ABC.

De plus, cette conique Σ′ est une ellipse qui touche les côtés de ABC en leurs points de contact avec l'hypocycloïde de Steiner.

Telle est à peu près la démonstration que l'on trouve dans l'écrit : *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, par M. A. Gob (1906).

(Abramescu)

Question 1595.

(Voir *Mathesis*, (3), VI, p. 256).

Chercher les courbes où les droites TN′, T′N *ont une direction constante,* TT′ *et* NN′ *étant la tangente et la normale coupant respectivement les axes de coordonnées supposés rectangulaires, respectivement en* T *et* T′, N *et* N′.

(G. Verheugen)

Même probleme en supposant, entre OT $= t$ *et* ON′ $= n$, *la relation* $at + bn = c$. (J. N)

Solution par MM. J. Rose, Abramescu et Dupont. 1° Les directions TN′ et T′N sont toujours perpendiculaires, car T′N est la troisième hauteur du triangle T′N′T et est, par suite, perpendiculaire à TN′. Il suffit donc de résoudre la question pour T′N. Les points T′ et N ayant respectivement pour coordonnées $(0, y - xy')$ et $(x + yy', 0)$, la droite qui les joint a pour coefficient angulaire $\frac{xy' - y}{x + yy'}$. Donc l'équation différentielle des courbes cherchées est

$$\frac{xy' - y}{x + yy'} = k \quad \text{ou} \quad (x - ky)y' - (y + kx) = 0; \tag{1}$$

en posant $\frac{y}{x} = u$, on obtient

$$(1 - ku)u'x - k(1 + u^2) = 0,$$

ou

$$\frac{(1 - ku)\,du}{1 + u^2} = k\frac{dx}{x}.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\text{arc tg } u = l\left[C(1 + u^2)^{\frac{1}{2}}x^k\right]$$

ou

$$\text{arc tg}\frac{y}{x} = l\left[C(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}k}\right]. \tag{2}$$

2° La relation $at + bn = c$ revient à

$$a(xy' - y) + b(yy' + x) = cy',$$

ou

$$(ax + by - c)\,dy + (bx - ay)\,dx = 0. \tag{3}$$

La substitution $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ la transforme en

$$(aX + bY)\,dY + (bX - aY)\,dX = 0, \tag{4}$$

pourvu que l'on pose

$$a\alpha + b\beta - c = 0, \quad a\beta - b\alpha = 0,$$

ou

$$\beta = \frac{bc}{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \frac{ac}{a^2 + b^2}.$$

Faisons encore $Y = XU$; l'équation (4) deviendra

$$\frac{a + bU}{1 + U^2}\,dU + b\frac{dX}{X} = 0.$$

L'équation cherchée est donc

$$a \operatorname{arc\,tg} U + \frac{b}{2} l(1 + U^2) + b l X + l C = 0,$$

ou

$$a \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X} + \frac{b}{2} l . C(X^2 + Y^2) = 0. \qquad (5)$$

Si l'on revient aux variables primitives, on peut écrire

$$a \operatorname{arc\,tg} \frac{(a^2 + b^2)\, y - bc}{(a^2 + b^2)\, x - ac} + \frac{b}{2} l . C_1 \left[x^2 + y^2 - \frac{c}{a^2 + b^2} (2by + 2ax - c)\right] = 0.$$

MM. Verheugen et E. Seam résolvent de la même manière le problème général et en déduisent la première partie de la question en supposant $c = 0$.

Notes. 1° On intègre plus rapidement l'équation (1) en écrivant

$$x dy - y dx = k (y dy + x dx)$$

ou en divisant le premier membre par $x^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$ et le second par $x^2 + y^2$ (procédé employé par M. Dupont) :

$$\frac{d \frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = k \frac{d(x^2 + y^2)}{2 (x^2 + y^2)}.$$

L'intégrale (2), si l'on passe aux coordonnées polaires, devient

$$C \rho^k = e^{\omega}, \quad \text{ou} \quad \rho = C_1 \left(e^{\frac{1}{k}}\right)^{\omega}.$$

La courbe cherchée est donc une spirale logarithmique.

Ce résultat s'explique facilement : la circonférence de diamètre TN' passant par M et T, l'angle TN'O qui, par hypothèse, est constant, est égal à l'angle OMT.

2° La seconde courbe est également une spirale logarithmique. En effet, la substitution $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ revient à transporter les axes parallèlement à eux-mêmes au point (α, β); or l'équation (5) ne diffère pas essentiellement de l'équation (2). On a donc une spirale dont le point asymptote a pour coordonnées α, β.

La droite TN enveloppe maintenant une parabole tangente aux axes primitifs Ox, Oy. J. N.)

Question 1606.

(Voir *Mathesis* (3), VII. p. 56).

On donne deux plans α, β *et un triangle* PQR. *Une sécante quelconque menée par* P *rencontre* α *en* A, β *en* B. *Par la droite* AQ *on fait passer un plan* α' *perpendiculaire à* α, *et par la droite* RB *un plan* β' *perpendiculaire à* β. *Trouver la surface engendrée par l'intersection des plans* α' *et* β' *lorsque* A *parcourt* 1° *une droite* a; 2° *une conique* γ *données dans le plan* α. (J. NEUBERG)

1. *Solution par* MM. ROSE, TABACOF, LISTRAY. Soient Q′ et R′ les projections de Q et R respectivement sur α et β. Si A parcourt une droite a, B décrit une ponctuelle perspective b. Par suite, les plans $\alpha' \equiv AQQ'$, $\beta' \equiv BRR'$ projettent de deux droites fixes QQ′ et RR′ deux ponctuelles projectives. L'intersection de α' et β' engendre donc en général un hyperboloïde à une nappe.

Si Q et a sont dans un même plan perpendiculaire à α, le lieu cherché est le plan Qa.

Si la droite QR est perpendiculaire à la droite $\alpha\beta$, les axes QQ′ et RR′ des faisceaux sont dans un même plan et alors l'intersection $\alpha'\beta'$ engendre un cône du 2° ordre.

Si α et β sont parallèles, il en est de même de a et b, de QQ′ et RR′; dans ce cas on obtient un cylindre.

Enfin, lorsque le plan PQR est perpendiculaire à la droite $\alpha\beta$, il constitue un élément uni des faisceaux générateurs et le lieu cherché dégénère en un plan.

2. *Solution analytique par* M. LISTRAY. Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires, passant par P. La droite AB décrivant un cône du second ordre, ses cosinus directeurs λ, μ, ν vérifient une équation homogène du second degré

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0. \tag{1}$$

Soient $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ les équations des plans α, β; les coordonnées des points A, B seront $(\lambda\rho_1, \mu\rho_1, \nu\rho_1)$, $(\lambda\rho_2, \mu\rho_2, \nu\rho_2)$ avec les conditions

$$\rho_1 = \frac{d_1}{a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu}, \quad \rho_2 = \frac{d_2}{a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu}. \tag{2}$$

Représentons par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points Q, R. Le plan α' aura une équation de la forme

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0; \tag{3}$$

comme il passe par le point A et est perpendiculaire à α, on a les conditions

$$A(\lambda\rho_1 - x_1) + B(\mu\rho_1 - y_1) + C(\nu\rho_1 - z_1) = 0, \tag{4}$$

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 = 0. \tag{5}$$

En éliminant A, B, C entre les égalités (3), (4) et (5), on trouve

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda\rho_1 - x_1 & \mu\rho_1 - y_1 & \nu\rho_1 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Si l'on remplace ρ_1 par la valeur (2) et qu'on multiplie la 3e ligne du déterminant (6) par $a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu$, les éléments de cette ligne seront des fonctions linéaires homogènes de λ, μ, ν; on voit donc que l'équation du plan α' et, par analogie, celle du plan β' sont de la forme

$$\lambda L_1 + \mu M_1 + \nu N_1 = 0, \quad \lambda L_2 + \mu M_2 + \nu N_2 = 0, \tag{7}$$

où L_1, M_1, ... sont des fonctions linéaires de x, y, z. L'équation de la surface engendrée par la droite $\alpha'\beta'$ s'obtiendra en éliminant λ, μ, ν entre (1) et (7). Or, de (7) on tire

$$\frac{\lambda}{M_1N_2 - M_2N_1} = \frac{\mu}{N_1L_2 - N_2L_1} = \frac{\nu}{L_1M_2 - L_2M_1};$$

par suite, l'équation demandée est

$$\varphi(M_1N_2 - M_2N_1, \quad N_1L_2 - N_2L_1, \quad L_1M_2 - L_2M_1) = 0$$

Elle est du 4e degré. La surface cherchée est donc du 4e ordre; elle passe par la cubique gauche représentée par

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Si le plan PQR est perpendiculaire à la droite $\alpha\beta$, il fait partie du lieu cherché, et la surface demandée s'abaisse au 3e ordre.

Autre solution analytique par M. Tabacof.

Solution synthétique par M. Tabacof. Cherchons le nombre des points où une droite quelconque m rencontre la surface engendrée par la droite $\alpha'\beta'$ lorsque le point A parcourt une conique γ du plan α.

Soient δ, δ' deux plans menés par les droites QQ', RR' et par un même point M de m. Lorsque M parcourt m, ces plans se correspondent dans deux faisceaux projectifs et marquent, respectivement, sur α et β deux faisceaux de rayons f_α, f_β, de centres Q', R' et projectifs entre eux. Projetons ces faisceaux f_α, f_β, à partir de P ; les plans homologues des faisceaux projetants se couperont suivant un cône du second ordre, lequel a quatre génératrices communes avec le cône de sommet P et de base γ. Si ces génératrices coupent γ en A_1, A_2, A_3, A_4, les plans $QQ'A_1$, $QQ'A_2$, $QQ'A_3$, $QQ'A_4$ rencontrent m en quatre points appartenant à la surface considérée ; donc celle-ci est du 4e ordre.

Question 1607.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 56).

Trouver le lieu des sommets et des foyers d'une ellipse dont on donne une directrice et un sommet du petit axe.

Trouver le lieu des sommets du petit axe d'une ellipse dont on donne une directrice et un sommet du grand axe. (E. N. Barisien)

Solution par M. H. Lez. 1° Prenant pour origine des coordonnées le sommet B du petit axe et pour axe des x, une perpendiculaire BM à la directrice, on aura pour les abscisses des sommets A, A' du grand axe, $x = \pm d$, et pour celles des foyers F, F', $x = \pm c$; tous ces points ont même ordonnée, $y = \sqrt{a^2 - c^2}$.

On sait aussi que $BM = \frac{a^2}{c} = m$.

Eliminant a, c, entre $x = \pm a$, $y = \sqrt{a^2 - c^2}$, $a^2 = cm$, on trouve pour le lieu des sommets A, A' la quartique

$$m^2y^2 = x^2(m^2 - x^2)$$

qui est la *lemniscate de Gerono*, tangente aux parallèles $y = \pm \frac{m}{2}$, en des points ayant pour abscisses $x = \pm \frac{m}{\sqrt{2}}$.

De même, éliminant a, c entre $x = c$, $y = \sqrt{a^2 - c^2}$, $a^2 = cm$, on trouve pour le lieu du foyer F, la circonférence $y^2 = mx - x^2$; le foyer F' décrit la circonférence $y^2 = -x(m + x)$.

Ce résultat peut aussi se conclure de ce théorème classique : La por-

tion d'une tangente comprise entre le point de contact et une directrice est vue du foyer correspondant sous un angle droit.

2° Prenons maintenant pour origine des coordonnées le sommet A du grand axe et pour axe des y, une perpendiculaire AN à la directrice D. Si cette directrice correspond au sommet A, on a $AN = \frac{a^2}{c} - a = \frac{a}{c}(a - c) = n$ et les sommets B, B′ du petit axe ont pour coordonnées $x = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$, $y = a$; l'élimination des paramètres entre ces trois égalités donne pour le lieu cherché la quartique

$$x^2(y + n)^2 = ny^2(n + 2y),$$

passant par l'origine et par le milieu de AN. A l'origine A, point double, les tangentes sont les bissectrices des axes coordonnées.

Si, au contraire, la directrice D correspond au sommet A′, opposé à A, on a :

$$AN = \frac{a^2}{c} + a = \frac{a}{c}(a + c) = n;$$

mais, on trouve encore pour le lieu des sommets BB′ une autre quartique

$$x^2(y - n)^2 = ny^2(n - 2y).$$

Solution analogue par MM. Retali, Hacken, Listray, Abramescu et Rose. M. Verheugen part de l'équation focale.

En prenant pour axe des y la directrice, pour axe des x la perpendiculaire AO, abaissée du sommet A sur la directrice, M. Retali trouve, pour le lieu du sommet B,

$$x^2y^2 = m(2x - m)(x - m)^2 \qquad (1)$$

et fait les remarques suivantes.

L'équation (1) représente une courbe unicursale du 4e ordre et de la 6e classe, ayant un point double en A dont les tangentes font l'angle $\pm 45°$ avec l'axe des x. La courbe est formée par deux boucles réunies en A, dont l'une est finie et a son sommet au milieu du segment OA, tandis que l'autre touche la droite de l'infini sur l'axe des x. Sur la droite de l'infini, il y a deux autres points de la courbe réunis au point à l'infini de la directrice, mais ce dernier point n'est pas un point double ordinaire de la quartique; il est un *tacnode* et compte pour deux points doubles; la tangente en ce point est l'axe des y.

La quartique (1) peut s'obtenir en appliquant la transformation quadratique

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{xy}{x - m}$$

à la parabole $\eta^2 = m(2\xi - m)$ ayant A pour foyer et l'axe des y pour directrice. On en conclut les équations paramétriques de la quartique :

$$x = \frac{1}{2m}(\theta^2 + m^2), \quad y = \frac{\theta(\theta^2 - m^2)}{\theta^2 + m^2}.$$

On passe du point $B'(\xi, \eta)$ à son correspondant $B(x, y)$ par la construction suivante : La droite AB parallèle à OB′ va couper la perpendiculaire menée par B′ à la droite OA en B.

M. Listray, dans sa solution, détermine les éléments singuliers ou remarquables des deux quartiques et cherche l'aire de la lemniscate de Gerono.

×Question 1603.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 56).

Éliminer x et y entre les équations :

$$x^4 + y^4 = A, \quad (x^5 - y^5)(x - y) = B, \quad (x^6 + y^6)(x^2 + y^2) = C.$$

(CUNNINGHAM)

Solution par M. G. VERHEUGEN. Posons $xy = t$; on aura en développant les deux dernières équations

$$x^6 + y^6 - At = B, \quad x^8 + y^8 + At^2 = C;$$

donc, le système proposé prend la forme :

$$x^4 + y^4 = A\ (1); \quad x^6 + y^6 = B + At\ (2); \quad x^8 + y^8 = C - At^2\ (3).$$

Elevons (1) au carré, ainsi que (2) ; on trouve :

$$\begin{aligned} x^8 + y^8 = A^2 - 2t^4 &= C - At^2 \qquad (I) \\ x^{12} + y^{12} &= B^2 + 2ABt + A^2t^2 - 2t^6. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs successivement

$$\begin{aligned} (x^4 + y^4)(x^8 + y^8) = x^{12} + y^{12} + At^4 &= A(C - At^2), \\ x^{12} + y^{12} = AC - A^2t^2 - At^4 &= B^2 + 2ABt + A^2t^2 - 2t^6. \qquad (II) \end{aligned}$$

En multipliant (I) par t^2, et éliminant t^6 entre (I) et (II), il vient

$$(C + A^2)t^2 + 2ABt + B^2 - AC = 0. \qquad \text{(III)}$$

L'éliminant de Sylvester de (I) et (III) est

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -A & C-A^2 \\ 2 & 0 & -A & C-A^2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2+C & 2AB & B^2-AC \\ 0 & A^2+C & 2AB & B^2-AC & 0 \\ A^2+C & 2AB & B^2-AC & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Autres solutions. MM. Rose, Delahaye, Plakhovo, Hernandez, déduisent des équations (1) et (3)

$$A^2 - C = 2x^4y^4 - Ax^2y^2$$

$$xy = \pm\frac{\sqrt{A \pm \lambda}}{2}, \quad \text{où} \quad \lambda = \sqrt{9A^2 - 8C};$$

puis, de (1) et (2),

$$x^6 + y^6 = B + Axy = B \pm \frac{A}{2}\sqrt{A \pm \lambda}.$$

Mais

$$x^2 + y^2 = \pm\sqrt{A + 2x^2y^2} = \pm\sqrt{\frac{3A \pm \lambda}{2}}.$$

Portant les valeurs de $x^6 + y^6$, $x^2 + y^2$ dans (3), on a la relation demandée

$$\left(B \pm \frac{A}{2}\sqrt{A \pm \lambda}\right)^2 \left(\frac{3A \pm \lambda}{2}\right) = C^2.$$

M. Terloo (Valparaiso) résout la question à peu près de même sous deux formes différentes. M. Constantinescu remarque que l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(x^2 + y^2)(A - x^2y^2) - Axy = B,$$

ou

$$\sqrt{A^2 + 2x^2y^2}\,(A - x^2y^2) - Axy = B,$$

et c'est dans cette dernière qu'il substitue la valeur de xy pour faire l'élimination.

Solution par M. Barisien. Posons

$$x^2 + y^2 = u, \quad xy = v,$$

d'où l'on déduit

$$x^4 + y^4 = u^2 - 2v^2, \quad x^6 + y^6 = u^3 - 3v^2u.$$

Le système proposé prendra la forme

$$u^2 - 2v^2 = A, \quad u^3 - 3v^2u - Av = B, \quad (u^2 - 3v^2)u^2 = C;$$

la seconde de ces équations, au moyen de la troisième, se réduit à

$$u(Av + B) = C.$$

En égalant les valeurs de v tirées de ces nouvelles équations, on obtient

$$v = \sqrt{\frac{u^2 - A}{2}} = \sqrt{\frac{u^4 - C}{3u^2}} = \frac{C - Bu}{Au},$$

ou, en combinant la première valeur avec les deux autres,

$$3u^2(u^2 - A) = 2(u^4 - C), \quad A^2u^2(u^2 - A) = 2(Bu - C)^2.$$

Il reste à éliminer u entre ces dernières équations.

M. Barisien achève la solution jusqu'à obtenir une relation rationnelle en A, B, C, même sous deux formes également remarquables, mais assez longues. Il observe aussi que les équations proposées sont compatibles lorsque $A = \lambda^4$, $B = \lambda^6$, $C = \lambda^8$, λ étant quelconque; et que si la seconde équation était remplacée par $(x^6 - y^6)(x - y) = B$, la question 1608 aurait pour réponse

$$[C + (A - B)^2]^2 = A^2[C + 3(A - B)^2].$$

MM. Hacken et Doutrewe nous ont adressé des solutions analogues à celle de MM. Rose, Delahaye, etc.; M. Prange, une solution analogue à celle de M. Verheugen.

×Question 1611.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 88).

Résoudre le système

$$y + z = a, \quad z^2 + x^2 + xz = b^2, \quad x^2 + y^2 + xy = c^2.$$

(E. N. Barisien)

Solution par M. J Rose. De la première on déduit $z = a - y$, valeur qui, portée dans la deuxième et à cause de la troisième, donne

$$2xy + 2ay - ax = a^2 + c^2 - b^2.$$

Pour abréger, posons $a^2 + c^2 - b^2 = d^2$; alors

$$y = \frac{d^2 + ax}{2(a + x)}.$$

Cette dernière valeur transforme la troisième équation en

$$4(a+x)^2x^2+(d^2+ax)^2+2x(a+x)(d^2+ax)-4c^2(a+x)^2=0.$$

équation du quatrième degré qui a quatre racines et qui, par suite, donne pour x, y, z quatre valeurs.

Remarque. La résolution de ces trois équations revient à chercher l'intersection d'un plan avec la courbe commune à deux cylindres hyperboliques dont les bases sont dans les plans des xz et xy. Cette intersection étant en général du quatrième ordre est coupée par le plan en quatre points; d'où les quatre valeurs.

On pourrait également résoudre en posant $y=mx$, $z=nx$, ou

$$y=\frac{a}{2}+u,\quad z=\frac{a}{2}-u.$$

M. Abramescu élimine x entre les deux dernières équations, ce qui donne

$$(y^2-z^2-c^2+b^2)^3=(y-z)[yz(y-z)-c^2z+b^2y]; \qquad (1)$$

posant ensuite $y-z=at$, d'où $y=\frac{1}{2}a(1+t)$, $z=\frac{1}{2}a(1-t)$, il transforme l'équation (1) en

$$a^4t^4+a^2(3a^2-2b^2-2c^2)t^2+6a^2(b^2-c^2)t+4(b^2-c^2)^2=0.$$

Connaissant t, y et z se calculent facilement; pour calculer x, il soustrait l'une de l'autre les deux dernières équations du système proposé, ce qui donne

$$at(x+a)=c^2-b^2, \text{ etc.}$$

M. Hacken combine par addition et par soustraction les deux dernières équations de la question, ce qui donne

$$z^2+y^2+x(z+y)+2x^2=b^2+c^2$$
$$z^2-y^2+x(z-y)=b^2-c^2.$$

Introduisant l'inconnue auxiliaire $z-y=t$, il transforme les dernières égalités en

$$\tfrac{1}{2}(z^2+t^2)+ax+2x^2=b^2+c^2,\quad at+xt=b^2-c^2,$$

et en élimine x.

Autre solution par M. Malaise (Liége).

Question 1614.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 88).

(Enoncé rectifié). *Soient* a, b, c, A, B, C *les côtés et les angles d'un triangle sphérique* ABC. ED *étant un diamètre quelconque d'une circonférence, construisons les cordes* EA′, EB′, EC′ *faisant avec* ED *respective-*

ment les angles $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, *et de* E *abaissons sur la corde* C'B' *une perpendiculaire* EF *qui ira recouper la circonférence en* G. *Cela posé :*

1° *Si l'on construit un triangle ayant pour côtés* C'F, FB', A'D *l'angle opposé au dernier côté est égal à l'angle* A *du triangle sphérique.*

2° *Si l'on construit un triangle ayant pour côtés* EF, A'E, FG, *l'angle opposé au dernier côté est égal à la moitié de l'excès sphérique.* (A. C.).

Solution par M. L. Hacken. L'angle B'EF a pour complément $EB'F = C'DE$; ce dernier angle a pour complément $\frac{1}{2}c$, donc $B'EF = \frac{1}{2}c$. On voit facilement que l'angle $FEC' = \frac{1}{2}b$. En posant $ED = 1$ on a $C'F = C'E \sin \frac{1}{2}b = \cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}b$, $FB' = B'E \sin \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$, $A'D = \sin \frac{1}{2}a$.

1° Dans le triangle rectiligne qui a pour côtés A'D, C'F, FB', on a successivement, si θ est l'angle des côtés FB' et C'F :

$$\overline{A'D}^2 = \overline{FB'}^2 + \overline{C'F}^2 - 2FB' \times C'F \cos\theta,$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a = \cos^2\tfrac{1}{2}b \sin^2\tfrac{1}{2}c + \cos^2\tfrac{1}{2}c \sin^2\tfrac{1}{2}b - 2\cos\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c \cos\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}b \cos\theta,$$

$$2(1 - \cos a) = (1 + \cos b)(1 - \cos c) + (1 + \cos c)(1 - \cos b) - 2 \sin b \sin c \cos\theta,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\theta.$$

Cette relation démontre que θ est égal à l'angle A du triangle sphérique.

2° On a : $EF = C'E \cos\frac{1}{2}b = \cos\frac{1}{2}c \cos\frac{1}{2}b$. FG est la distance DK des parallèles B'C' et DG ; or, l'angle KB'D, complément de C'B'E qui lui-même a pour complément $\frac{1}{2}c$, est égal à $\frac{1}{2}c$. Donc $FG = DK = B'D \sin\frac{1}{2}c = \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c$; de plus $A'E = \cos\frac{1}{2}a$. Dans le triangle rectiligne qui a pour côtés EF, A'E, FG, on a successivement, si θ est l'angle des côtés EF, A'E :

$$\overline{FG}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{A'E}^2 - 2EF \times A'E \cos\theta,$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}b \sin^2\tfrac{1}{2}c = \cos^2\tfrac{1}{2}c \cos^2\tfrac{1}{2}b + \cos^2\tfrac{1}{2}a - 2\cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}c \cos\theta,$$

$$(1 - \cos b)(1 - \cos c) = (1 + \cos b)(1 + \cos c) + 2(1 + \cos a) - 8 \cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}c \cos\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}.$$

Cette dernière expression est bien la valeur du cosinus du demi-excès sphérique dans le triangle ABC.

MM. Abramescu et Rose ont résolu la même question ; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de reproduire leurs solutions.

Question 1615.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 88).

La tangente en un point M *d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires* O*x et* O*y rencontre* O*y en* R. *Déterminer la courbe par la condition que le rapport* OR : RM *ait une valeur constante m.* (Rose)

Solution par MM. Abramescu et Lez. Il faut intégrer l'équation

$$(1) \qquad y = x\,(p + m\sqrt{1+p^2}), \quad \text{où} \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Dérivant, on a

$$dy = dx\,[p + m\sqrt{1+p^2}] + x\left[1 + \frac{mp}{\sqrt{1+p^2}}\right]dp;$$

remplaçant dy par pdx, on obtient

$$m\frac{dx}{x} + \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{mpdp}{1+p^2} = 0.$$

Intégrant, on trouve

$$\log\frac{x^m}{c^m} + \log\,(p + \sqrt{1+p^2}) + \log\,(1+p^2)^{\frac{m}{2}} = 0.$$

D'où

$$(2) \qquad x^m(1+p^2)^{\frac{m}{2}}\,(p + \sqrt{1+p^2}) = C^m,$$

$$(3) \qquad x = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}\,(p + \sqrt{1+p^2})^{\frac{1}{m}}}.$$

Portons cette valeur de x dans l'équation (1), il vient

$$(4) \qquad y = \frac{C(p + m\sqrt{1+p^2})}{\sqrt{1+p^2}\,(p + \sqrt{1+p^2})^{\frac{1}{m}}}.$$

Les expressions (3) et (4) sont les coordonnées d'un point de la courbe cherchée en fonction d'un paramètre variable p.

Remarque. Quand OR = RM ($m = 1$), les équations (1) et (4) deviennent

$$y = x(p + \sqrt{1+p^2}), \quad y = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}},$$

et l'élimination de p donne $x^2 + y^2 - 2cx = 0$, équation d'une circonférence touchant Oy en O, ce résultat s'explique facilement (H. Lez).

M. Hacken met l'équation du problème sous la forme

$$ydx - xdy = mx\sqrt{dx^2 + dy^2}, \tag{5}$$

observe qu'elle est homogène et indique, d'après Frenet (Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal, 4e éd., pp. 269 et 354), l'intégrale

$$\frac{[y^2 + (1-m^2)x^2]^{\frac{1}{2}} - my}{1-m^2} = C\left\{\frac{[y^2 + (1-m^2)x^2]^{\frac{1}{2}} - y}{(1-m)x}\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Question 1617.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 112.)

Soit M *un point d'une parabole qui se projette sur l'axe au point de rebroussement* R *de la développée.* 1° *Le centre de courbure* C′ *est situé sur la parabole;* 2° *Les tangentes en* C′ *à la parabole et à la développée rencontrent l'axe en des points* A, B, *tels que* OB = 2OR, OA = 4OR, O *étant le sommet de la parabole.* (Rosz)

Solution par M. E. N. Barisien. Cette question a déjà été en partie résolue, à l'occasion de la question 1581, (3), VII, p. 29. En voici toutefois la démonstration complète.

1° Les coordonnées du point M étant $(x = p,\ y = p\sqrt{2})$, l'équation de la normale en M à la parabole est

$$x\sqrt{2} + y = 2p\sqrt{2}. \tag{1}$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection de cette normale et de la parabole, s'écrit successivement

$$(2p - x)^2 - px = 0, \quad x^2 - 5px + 4p^2 = 0, \quad (x - 4p)(x - p) = 0.$$

L'abscisse du second point de rencontre de la normale en M avec la parabole est donc $x = 4p$, qui est aussi celle d'un point de rencontre de cette courbe et de sa développée.

Donc, ce point est bien le centre de courbure C′ de M.

2° La tangente au point $C'(4p, -2p\sqrt{2})$ à la parabole a pour équation

$$x + 2y\sqrt{2} + 4p = 0. \tag{2}$$

Or, si l'on fait $y = 0$ dans (2) et dans (1), on trouve bien, puisque $OR = p$,

$$OB = 2OR, \quad OA = 4OR.$$

Ont résolu la même question MM. Dalle (Malonne), Abrambescu, Lez, Hacken et Sintzof (Kharkof).

QUESTIONS D'EXAMEN.

1856. Déduire la hauteur x d'un triangle ABC de l'une des équations

$$\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2} = a,$$

$$x(\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2}) = bc \sin A. \qquad \text{(Barisien)}$$

1857. Ramener l'équation

$$x(\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2}) = bc$$

à la forme

$$[x^2(b^2 + c^2) - b^2c^2]^2 = 0. \qquad \text{(Barisien)}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1821. La tangente et la normale en un point M d'une courbe (C) coupent les axes en T, T', N, N'. Déterminer (C) par la condition $OT = ON'$. $\varphi(\overline{OM}^2)$. (J. Rose)

1822. Une droite quelconque menée par le foyer F d'une hyperbole rencontre en P et Q les tangentes menées aux deux sommets de la courbe. Démontrer que la circonférence décrite sur la distance PQ comme diamètre est bitangente à l'hyperbole. (Droz Farny)

×**1823.** Dans un triangle ABC ($a > b > c$), si les droites qui joignent le centre de gravité aux milieux des hauteurs font avec les côtés opposés des angles aigus α, β, γ, on a la relation

$$\cot\beta = \cot\alpha + \cot\gamma. \qquad \text{(E. N. Barisien)}$$

1824. Intégrer l'équation différentielle

$$\left(2x\frac{dy}{dx} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + y\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

(Abramescu)

1825. Soient A'', B'', C'' les points d'intersection des côtés correspondants (BC, B'C'), (CA, C'A'), (AB, A'B') de deux triangles ABC, A'B'C'.

1° Si ces triangles sont inscrits à une même conique U (et par suite circonscrits à une seconde conique V), et si les droites AA'', BB'', CC'' concourent en un même point M, les droites A'A'', B'B'', C'C'' concourront en un second point M'.

2° Réciproquement, si les droites AA'', BB'', CC'' sont concourantes, de même que les droites A'A'', B'B'', C'C'', les deux triangles ABC, A'B'C' sont-ils inscrits à une même conique? (Abramescu)

Cette proposition nous paraît se rattacher à ce qu'on peut appeler *évolutifs* de trois couples de points sur une conique. On peut la transformer par polaires réciproques. (J. N.)

SUR LA STROPHOIDE OBLIQUE,

par M. Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand.

1. Soient ABC un triangle inscrit dans une circonférence de centre O, M et M' deux points diamétralement opposés sur cette courbe. La droite de Simson m du point M relative au triangle ABC rencontre les côtés de ce triangle aux points A_1, B_1, C_1; les droites MA, MB, MC aux points A'', B'', C'', le cercle (O) aux points X_1, X_2. Le théorème de Desargues appliqué au quadrangle inscrit MABC et à la transversale m donne l'involution $(A_1A'', B_1B'', C_1C'', X_1X_2)$. Le point M et la droite m sont respectivement le foyer et la tangente au sommet d'une parabole (P) inscrite au triangle ABC. Les sommets opposés AA_1, BB_1, CC_1 du quadrilatère complet ABCm circonscrit à la parabole (P) sont projetés du point M suivant des couples de rayons en involution; les droites isotropes ME, MF tangentes à cette parabole font partie de cette involution et elles déterminent sur la droite m un couple E_1F_1 de l'involution $(A_1A'', B_1B'', C_1C'', X_1X_2)$. Les tangentes BC et a', AC et b', AB et b', $M'X_1$ et $M'X_2$, ME et MF menées par les couples de points A_1A'', B_1B'', C_1C'', X_1X_2, E_1F_1, à la parabole (P) sont donc en involution et les points (BC, a'), (AC, b'), (AB, c'), M', M sont en ligne droite. On en conclut que les points (BC, a'), (AC, b'), (AB, c') sont les points d'intersection A', B', C' du diamètre MM' avec les côtés du triangle ABC. Ainsi les droites A'A'', B'B'', C'C'' sont respectivement perpendiculaires aux droites MA, MB, MC.

Par suite : *Un rayon* OM *de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, *rencontre les côtés en* A', B', C'; *les projections* A'', B'', C'' *de* A', B', C' *respectivement sur les droites* AM, BM, CM *appartiennent à la droite de Simson du point* M (A. Gob *Mathesis* (3), VII, p 56).

2. Les faisceaux qui projettent des points M et A, les points A, B, C, M, M' du cercle (O) sont projectifs, donc :

$$M(ABCMM') \overline{\wedge} A(ABCMM') \overline{\wedge} (A_2C'B'MM'),$$

A_2 désignant le point commun au diamètre MM' et à la tangente au cercle (O) au point A. Le théorème de Desargues appliqué au quadrangle inscrit AABC et à la transversale MM' donne l'involution $(A'A_2, B'C', MM')$; par conséquent :

$$M(ABCMM') \overline{\wedge} (A'B'C'M'M).$$

Il en résulte que les perpendiculaires A'A'', B'B'', C'C'', M'M, MT abaissées des points A', B', C', M', M sur les rayons correspondants MA, MB, MC, MM, MM' du faisceau M(ABCMM') sont tangentes à une parabole (P_1), tangente au point M' à la droite MM' et dont la directrice passe par le point M. Les points A'', B'', C'' projections du point M sur les tangentes A''A', B''B', C''C' à cette parabole appartiennent à la strophoïde oblique, podaire de (P_1) relative au point M. Le cercle (O) est l'un des cercles osculateurs au point double M de la strophoïde, celui qui correspond à la tangente MT en ce point. En effet, un cercle tangent en M à la droite MT et passant par un point K de la strophoïde a pour diamètre MK_1, le point K_1 étant situé à l'intersection de la droite MM' et de la perpendiculaire élevée au point K sur la droite MK. Les droites K_1M, K_1K sont alors les tangentes menées du point K_1 à la parabole (P_1), et si le point K se rapproche indéfiniment de M sur la branche de la strophoïde tangente en M à la droite MT, la limite du point K_1 est le point de contact M' de la droite MM' avec la parabole (P_1).

Le point double M et le cercle (O) étant donnés, la strophoïde (S) est déterminée par un de ses points A''. Une droite m, issue de A'' rencontre la circonférence décrite sur MA' comme diamètre en un point A_1. Les droites MA'', A'A, coupent le cercle (O) aux points A, B, C; la droite de Simson du point M relative au triangle ABC est la droite A''A, (Théorème de Gob). Les raisonnements précédents établissent que les points $B'' \equiv (MB, m)$, $C'' \equiv (MC, m)$ appartiennent à la strophoïde (S); par suite :

Les droites qui projettent du point double M *d'une strophoïde oblique, trois points* A'', B'', C'' *de la courbe situés en ligne droite, rencontrent l'un quelconque des cercles osculateurs à la courbe au point* M *en trois points* A, B, C *tels que la droite* A''B''C'' *est la droite de Simson du point* M *relative au triangle* ABC.

3. Le numéro précédent donne *une construction des points d'intersection* B'', C'' *de la strophoïde avec une droite* m *menée par un point donné* A'' *de la courbe.* On peut aussi les déterminer comme suit : la droite MA'' coupe le cercle (O) au point A; la circonférence (MA) décrite sur le segment MA comme diamètre rencontre la droite m aux points B_1, C_1.

Les droites AB_1, AC_1 coupent le cercle (O) aux points C, B et les droites MB, MC déterminent sur la droite m les points cherchés B'', C''.

4. Si la droite m est une tangente menée du point donné A'' à la trophoïde, les points B'' et C'' coïncident; la détermination de ces points montre que les points B et C, B_1 et C_1 sont aussi confondus. Ainsi : *Les tangentes menées du point* A'' *à la strophoïde sont tangentes au cercle* (MA).

Soient P_2, Q_2 les points de contact de ces deux tangentes avec le cercle (MA), P, Q les points de rencontre des droites AP_2, AQ_2 avec le cercle (O); les droites MP, MQ déterminent respectivement sur les droites $A''P_2$, $A''Q_2$ leurs points de contact P'', Q'' avec la strophoïde.

5. Les droites A'P, A'Q sont tangentes à la circonférence (O) (2); par suite, le rapport M(TM'PQ) est harmonique. Donc *si on projette du point double* M *les couples de points* P'', Q'' *ayant même tangentiel, on obtient des couples de rayons en involution; les éléments doubles sont les tangentes à la courbe au point* M (Théorème connu).

6. La projection U du point M sur la droite A'P appartient à la droite A''P'' tangente en P'' à la strophoïde (S) (2). De là, *cette détermination de la tangente en un point donné* P'' *de la strophoïde oblique :* au point d'intersection P de la droite MP'' avec le cercle osculateur (O) on mène la tangente à ce cercle et on projette sur cette droite le point M. La droite qui joint cette projection U au point P'' est la tangente cherchée.

La droite UP coupe le diamètre MM' du cercle (O) au point A' et la circonférence décrite sur MA' comme diamètre rencontre la tangente UP'' de la strophoïde *au tangentiel* A'' *du point donné* P''.

7. Le point double M et les cercles osculateurs (O) et (O') en ce point de la strophoïde étant donnés, la courbe est déterminée. En utilisant ces deux cercles dans les constructions précédentes on trouve la propriété suivante :

Les cercles osculateurs (O) *et* (O') *au point double* M *d'une strophoïde oblique sont rencontrés par une sécante s issue de ce point, aux points* P, P_1; *la droite qui joint les projections* U *et* U_1 *du point* M *sur les tangentes p, p_1 aux cercles* (O) *et* (O') *en ces points, enveloppe la strophoïde, quand la sécante s tourne autour de* M. *Le point* $P'' = (PP_2, UU_2)$ *est le point de contact de la droite* UU_2 *avec la strophoïde. Si les droites p, p_1 rencontrent en* A' *et* A'_1 *respectivement les diamètres* MM', MM'' *des cercles* (O) *et* (O'), *les circonférences décrites sur* MA' *et* MA'_1 *comme diamètres se coupent en un point* A'' *de la droite* UU_2. *Ce point* A'' *est le tangentiel du point* P'' *de la strophoïde.*

8. Dans la détermination des tangentes menées du point A'' à la strophoïde (4) on peut utiliser le cercle osculateur (O'). La droite MA' coupe le cercle (O') en un point A''' et les tangentes A''P'', A''Q'' de la strophoïde sont tangentes au cercle (MA''') décrit sur MA''' comme diamètre. Le point A'' centre de similitude des deux cercles (MA) et (MA''') tangents en M, est le conjugué harmonique de M relativement aux centres H et H' de ces deux cercles. Ces points H et H' appartiennent respectivement aux cercles (MO) et (MO') décrits sur les rayons de courbure MO et MO' de la strophoïde au point double M. De là cette propriété :

Si O *et* O' *sont les centres de courbure d'une strophoïde oblique en son point double* M, *une sécante issue de ce point rencontre la courbe en un point* A'', *et les cercles décrits sur* MO *et* MO' *comme diamètre en deux points* H *et* H' *tels que*

$$(MA''HH') = -1.$$

Les tangentes menées du point A'' *à la strophoïde sont deux tangentes communes aux cercles décrits des centres* H *et* H' *respectivement avec les rayons* HM, H'M.

9. La ponctuelle analogue à (MA''HH') pour une sécante voisine est perspective à (MA''HH'); par suite :

La tangente au point A'' *à la strophoïde passe par le point de rencontre des tangentes aux points* H *et* H' *aux deux cercles* (MO) *et* (MO').

10. Les cercles (MO), (MO') se coupent en un point S appartenant à la strophoïde (8). Les tangentes menées de ce point à la courbe sont tangentes au cercle décrit du point S comme centre avec le rayon SH (4). Ces tangentes sont donc isotropes. La détermination des points de contact de ces tangentes (4) montre que ces points sont les points cycliques. Ainsi :

Le point S *est le foyer singulier de la strophoïde; les centres de courbure au point double* M *et ce foyer sont sur une droite normale à* MS. (Dewulf. *Mathesis*, 1886, p. 218).

11. La droite P''Q'' joignant les points correspondants P'', Q'' de la strophoïde rencontre cette courbe en un troisième point R''. Si R est le point d'intersection de la droite MR'' avec le cercle (O), la droite P''Q''R' est la droite de Simson du point M relativement au triangle PQR. Le diamètre MM' est normal au côté PQ au milieu R' de ce côté; la

roite P″Q″R″ passe donc par ce point R′ et est normale à la roite MR″ (1). Ainsi :

La droite joignant deux points correspondants P″, Q″ *de la strophoïde enveloppe la parabole* (P_1) (MALEYX, NAM, 1874, p. 417).

12. Le correspondant Q″ d'un point P″ de la strophoïde s'obtient ar la construction suivante : la droite MP″ coupe le cercle (O) au oint P; la perpendiculaire abaissée de ce point sur le diamètre MM′ encontre ce diamètre en R′ et le cercle (O) en Q. Les droites P″R′, MQ e coupent au point correspondant Q″ cherché.

En utilisant également le cercle (O′) dans cette détermination on a la propriété suivante :

Les cercles osculateurs (O) *et* (O′) *au point double* M *d'une strophoïde oblique sont rencontrés respectivement aux points* P *et* Q, P_2 *et* Q_2 *par deux sécantes* s, s′ *issues du point* M *et également inclinées sur les tangentes à la courbe en ce point. La droite joignant les milieux* R′ *et* R‴ *des cordes* PQ, P_2Q_2 *rencontre les sécantes* s *et* s′ *en deux points correspondants* P″, Q″ *de la strophoïde.*

13. La droite MU perpendiculaire à la tangente au point P du cercle (O) et le diamètre MM′ de ce cercle sont également inclinés sur la droite MP. Il en est de même des droites PR′ et PU et par suite aussi des droites P″U et P″R′. Ainsi :

La tangente à la strophoïde au point P″ *et la droite qui joint ce point à son correspondant* Q″ *sont également inclinées sur la droite* MP″ (MALEYX, loc. cit., p. 473).

14. On considère le triangle A″P″Q″; le point M est le centre d'un des cercles tritangents (13); deux autres centres X, Y appartiennent à la bissectrice issue de A″, différente de A″M; le quatrième situé sur cette droite A″M est désigné par Z. Les droites ZP″, ZQ″ normales respectivement à MP″ et MQ″ sont tangentes à la parabole (P_1). Ces droites ZP″, ZQ″ et les tangentes au point double déterminent sur P″Q″ une ponctuelle harmonique (5). Comme la droite P″Q″ est tangente à la parabole (P_1), on en conclut que les tangentes ZP″, ZQ″, MM′, MM″ de cette parabole sont harmoniques; par suite, le point Z appartient à la polaire du point M relativement à cette courbe. Cette polaire est d'ailleurs la conjuguée m_1 de la droite ZM par rapport au couple ZP″, ZQ″. Il en résulte que les points X et Y sont les homo-

logues de P'' et Q'' dans l'homologie harmonique (M, m_1). Ainsi

Si l'on considère le triangle A''P''Q'' *formé par les tangentes menées à la strophoïde par un point* A'' *mobile sur la courbe, et par la corde de contact, l'un des centres des cercles tritangents à ce triangle est le point double* M *de la courbe; un second centre décrit la polaire* m_1 *du point double par rapport à la parabole* (P_1); *et les deux autres engendrent une cubique, correspondant à la strophoïde dans l'homologie harmonique* (M, m_1).

15. Les droites XY, P''Q'' correspondantes dans l'homologie harmonique (M, m_1) se coupent sur l'axe d'homologie m_1. Donc :

Si d'un point A'' *de la strophoïde on mène les tangentes à la courbe, la corde de contact* P''Q'' *rencontre la perpendiculaire élevée au point* A'' *sur la droite* A''M, *en un point de la polaire de* M *par rapport à la parabole* (P_1).

16. Le centre du cercle circonscrit au triangle MP''Q'' est au milieu du segment MZ; il appartient donc à la droite menée parallèlement à la polaire m_1 et équidistante de cette droite m_1 et du point M. Cette parallèle passe par les milieux O et O' des segments MM' et MM'', car $m_1 \equiv$ M'M''. Donc :

Le centre du cercle circonscrit au triangle formé par le point double M *et deux points correspondants* P'', Q'' *est situé sur la droite qui joint les centres des cercles osculateurs à la courbe au point double* M.

CONCOURS GÉNÉRAL DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN (1907).

I. Trigonométrie sphérique.

Démontrer que dans un triangle sphérique quelconque, on a la relation

$$\cos\frac{\delta}{2} = \frac{\cos r \cos R \sin\frac{a+b+c}{2}}{2\sin p}$$

δ *étant l'arc de grand cercle joignant les pôles des cercles inscrit et circonscrit au triangle,* r *et* R *les rayons polaires de ces cercles.*

Solution par M. Rose. Soient le triangle sphérique ABC, O et I les pôles des cercles circonscrit et inscrit. Dans le triangle OIC, on a

$$\cos\frac{\delta}{2} = \cos R \cos IC + \sin R \sin IC \cos OCI.$$

Mais $\cos IC = \cos r \cos (p - c)$, $\sin IC = \dfrac{\sin r}{\sin \dfrac{C}{2}}$,

$$\textit{angle}\ OCI = ACO - ACI = \frac{A + C - B}{2} - \frac{C}{2} = \frac{A - B}{2}.$$

Donc $$\cos \delta = \cos r \cos R \cos (p - c) + \sin r \sin R \frac{\cos \dfrac{A - B}{2}}{\sin \dfrac{C}{2}}.$$

D'autre part, en vertu d'une analogie de Delambre, on a dans le triangle ABC,

$$\frac{\cos \dfrac{A - B}{2}}{\sin \dfrac{C}{2}} = \frac{\sin \dfrac{a + b}{2}}{\sin \dfrac{c}{2}}.$$

Par suite,

$$\cos \delta = \cos R \cos r \left[\cos (p - c) + \operatorname{tg} R \operatorname{tg} r \frac{\sin \dfrac{a + b}{2}}{\sin \dfrac{c}{2}} \right]$$

ou successivement, puisque

$$\operatorname{tg} R \operatorname{tg} r = \frac{2 \sin \dfrac{a}{2} \sin \dfrac{b}{2} \sin \dfrac{c}{2}}{\sin p},$$

$$\cos \delta = \frac{\cos R \cos r}{\sin p} \left[\sin p \cos (p - c) + 2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{a + b}{2} \right],$$

$$= \frac{\cos r \cos R}{\sin p} \left[\frac{1}{2} \sin (a + b) + \frac{1}{2} \sin c + \left(\cos \frac{a - b}{2} - \cos \frac{a + b}{2} \right) \sin \frac{a + b}{2} \right],$$

$$= \frac{\cos r \cos R}{2 \sin p} \left[2 \sin \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2} + \sin c \right],$$

$$= \frac{\cos r \cos R (\sin a + \sin b + \sin c)}{2 \sin p}.$$

Remarques. I. En appliquant cette formule aux triangles formés en prolongeant les côtés AB, AC du triangle, on trouve

$$\cos \partial_a = \frac{\cos r_a \cos R_a(\sin a + \sin b + \sin c)}{2 \sin (p - a)},$$

et des formules analogues pour ∂_b, ∂_c.

II. Si ∂' désigne la distance polaire de O à I_a, on trouve, par les mêmes transformations,

$$\cos \partial' = \frac{\cos r_a \cos R\,[\sin b + \sin c - \sin a]}{2 \sin (p - a)}$$

et des formules analogues pour OI_b et OI_c.

Solution exacte, un peu moins simple, par M. Lamotte (Chimay).

II. Géométrie analytique.

Etant donnée une ellipse E *avec ses foyers* F *et* F′, *on joint* F′ *aux extrémités d'une corde* PQ *menée par* F. 1° *Trouver l'équation de l'hyperbole* H *passant par* F *et ayant pour asymptotes les droites* F′P *et* F′Q.

2° *Construire le second point de rencontre de l'hyperbole avec la droite* PQ, *et trouver le lieu décrit par ce point lorsque* PQ *tourne autour de* F. *Ce lieu est une ellipse* E′ *concentrique à l'ellipse donnée et passant par les foyers* F, F′. *Faire voir que* E *et* E′ *sont homothétiques et calculer le rapport d'homothétie.*

3° *Démontrer que la droite qui joint les pôles de* PQ *par rapport aux deux coniques* E *et* E′ *est constamment le diamètre conjugué de la corde* PQ.

4° *Construire la tangente en* F *à l'hyperbole* H, *ainsi que les axes de symétrie de cette conique en grandeur et en position. Trouver le lieu décrit par les points de rencontre de cette tangente avec les axes de symétrie lorsque* PQ *tourne autour de* F.

(*L'équation obtenue se décompose en : 1° l'équation de l'axe focal* FF′; 2° *l'équation d'une perpendiculaire à cet axe;* 3° *l'équation d'une ellipse concentrique à l'ellipse donnée et passant également par* F, F′).

Solution par M. Rose. 1° Les axes coordonnés sont l'axe focal FF′ et sa perpendiculaire menée par F′. L'équation de l'ellipse E est

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

et la corde PQ a pour équation

$$y = m(x - 2c). \tag{2}$$

Les droites F'P, F'Q peuvent être représentées par

$$y = kx. \tag{3}$$

En exprimant qu'elles coupent la droite (2) en des points de l'ellipse (1), on obtient une équation du 2e degré en k qui donne les coefficients angulaires de ces droites en fonction de m. On trouve ainsi

$$(4a^2c^2m^2 - b^4)k^2 + 2mb^2(a^2 + c^2)k - b^4m^2 = 0.$$

Donc, si k_1 et k_2 sont ces coefficients, on a

$$k_1 + k_2 = -\frac{2mb^2(a^2 + c^2)}{4a^2c^2m^2 - b^4}, \quad k_1k_2 = -\frac{b^4m^2}{4a^2c^2m^2 - b^4}.$$

D'autre part, l'équation d'une hyperbole passant par F et d'asymptotes F'P, F'Q est

$$(y - k_1x)(y - k_2x) - 4k_1k_2c^2 = 0,$$

ou, en tenant compte des valeurs ci-dessus,

$$(4a^2c^2m^2 - b^4)y^2 - b^4m^2x^2 + 2mb^2(a^2 + c^2)xy + 4b^4c^2m^2 = 0. \tag{4}$$

Le binôme caractéristique, eu égard à la relation $b^2 = a^2 - c^2$, a pour expression $4a^2b^4c^2m^2(1 + m^2)$, de sorte que l'équation (4) représente une droite double FF' si $m = 0$, et deux droites parallèles imaginaires si $m = \pm i$; la dernière hypothèse correspond aux tangentes isotropes menées par le foyer F à E.

2° Les portions d'une sécante comprises entre l'hyperbole H et ses asymptotes étant égales, pour avoir le second point R d'intersection de PQ avec H, il suffit de porter PR = FQ. Le lieu du point R s'obtient en éliminant m entre (2) et (4); on trouve ainsi

$$y^2(a^2y^2 + b^2x^2 - 2b^2cx) = 0.$$

L'axe focal ne fait pas partie du lieu cherché; cependant on pourrait le considérer comme lieu du point R lorsque PQ est le grand axe de l'ellipse ou que $m = 0$. Il reste donc l'ellipse E' concentrique à E et passant par F, F'. L'équation de E' peut encore s'écrire

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b^2c^2}{a^2}\right)} + \frac{(x - c)^2}{c^2} = 1. \tag{5}$$

Sous cette forme on voit que E′ et E sont homothétiques, car les axes coïncident et leurs longueurs sont proportionnelles. Le centre d'homothétie est le centre commun des deux coniques et le rapport d'homothétie est précisément l'excentricité $\frac{c}{a}$ de l'ellipse E. Les foyers F et F′ sont des points de E′ qui correspondent à PQ parallèle au petit et au grand axe de E.

3° Pour trouver les pôles de PQ par rapport à E et E′ on identifie l'équation (2) avec celle de la polaire d'un point quelconque par rapport à ces coniques. Si x, y sont les coordonnées de ces pôles, on trouve ainsi pour E et E′ respectivement les relations

$$\frac{a^2y}{1} = \frac{b^2(x-c)}{-m} = \frac{-b(cx+b^2)}{2mc},$$

$$\frac{a^2y}{1} = \frac{b^2(x-c)}{-m} = \frac{-b^2cx}{2mc};$$

ces points se trouvent donc sur le diamètre conjugué à PQ

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}(x-c).$$

4° Pour construire la tangente en F à l'hyperbole H, il suffit de mener dans l'angle PFQ une droite dont le milieu soit F, problème classique de géométrie. Quant aux axes de symétrie, ce sont les bissectrices des angles de FP et FQ. Pour avoir le petit axe on mène par F une perpendiculaire au grand axe coupant les asymptotes en S et T; le petit axe s'obtient alors par une moyenne géométrique puisque le carré de sa moitié vaut SF.TF, puis le grand axe s'obtient aisément.

[illegible] des axes de E considérés comme bissectrices [illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] minons [illegible] entre [illegible] FF′ [illegible]

[illegible] d'une part les

termes en y^2, d'autre part les termes restants où $x(x-2c)$ est facteur commun

$$2c(2a^2cx+b^4)[(a^2+c^2)y^2+b^4x^2-2b^4cx]=0.$$

Les deux autres parties du lieu sont donc une perpendiculaire à l'axe focal, d'équation $x=-\frac{2a^2c}{b^4}$, et l'ellipse

$$(a^2+c^2)y^2+b^4x^2-2b^4cx=0$$

concentrique à E et passant par F, F'.

Cette équation peut encore s'écrire

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b^4c^2}{a^2+c^2}\right)}+\frac{(x-c)^2}{c^2}=1,$$

ce qui met en évidence les longueurs des axes.

Note. Soit I le milieu de PQ; les droites PQ et OI sont parallèles à un système de cordes supplémentaires AN, A'N de E, A et A' étant les extrémités du grand axe; on en conclut que le lieu de I est une ellipse E'' homothétique à E et ayant pour sommets du grand axe les points F et O.

La question du concours demande le lieu du point R symétrique de F par rapport à I. Ce lieu est une courbe homothétique à E'', les rayons vecteurs de E'' issus de F étant doublés; c'est donc une ellipse E' semblable à E et ayant pour grand axe FF'.

Les tangentes à E en P et Q se coupent sur le diamètre OI; de même les tangentes à E' en F et R se coupent sur ce diamètre. (J. N.)

M. Lamotte (Chimay) a résolu la même question. Il fait observer que la droite du lieu du 4° correspond au point de rencontre de l'axe imaginaire de H avec la tangente en F.

NOTES MATHÉMATIQUES.

19. *Théorèmes sur les transversales.* M. Terracini, dans une note de *Mathesis* (3), VII, p. 127, démontre par la géométrie analytique deux théorèmes sur les transversales. Je vais généraliser ces théorèmes et signaler d'autres théorèmes analogues que je démontre par la géométrie élémentaire.

1. *Soient* AA_1, BB_1, CC_1, *trois droites qui concourent en un point* P_1 *et* AA_1', BB_1', CC_1' *trois droites qui concourent en un point* P_1'. *Les droites* CC_2,

AA_2, BB_2 *joignant* C, A, B *respectivement aux points* (AA_1, BB_1), (BB_1, CC_1'), (CC_1, AA_1') *concourent en un même point* P_2.

En effet,

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1'A}{C_1'B}=-1,\quad \frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A_1'B}{A_1'C}=-1,\quad \frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1'C}{B_1'A}=-1;$$

en multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=-1.$$

Semblablement, les droites CC_2', AA_2', BB_2' joignant C, A, B aux points (AA_1', BB_1), (BB_1', CC_1), ($C'C_1'$, AA_1) concourent en un point P_2'. Dans le cas où AA_1', BB_1', CC_1' sont les isotomiques des droites AA_1, BB_1, CC_1, les droites AA_2, BB_1, CC_1' et AA_2', BB_1', CC_1 étant concourantes et BB_1, CC_1' étant les isotomiques de BB_1', CC_1, nécessairement AA_2, AA_2' sont isotomiques, etc.; donc P_2 et P_2' sont réciproques.

On a une conclusion analogue lorsque les droites AA_1', BB_1', CC_1' sont les isogonales des droites AA_1, BB_1, CC_1.

2. *Soient* A_1, B_1, C_1 *les points où une transversale quelconque* p_1 *rencontre* BC, CA, AB, *et soient* A_1', B_1', C_1' *les points où une autre transversale* p_1' *rencontre les mêmes côtés. Les droites* A_1B_1', B_1C_1', C_1A_1' *rencontrent* AB, BC, CA *en des points* C_2, A_2, B_2 *et les droites* $A'B_1$, $B_1'C_1$, $C_1'A_1$ *rencontrent les mêmes côtes en des points* A_2', B_2, C_2'; *alors les points* A_2, B_2, C_2 *sont situés sur la même droite* p_2 et A_2', B_2', C_2' *sur la même droite* p_2'.

On a :

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1'A}{C_1'B}=1,\quad \frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A_1B}{A_1'C}=1,\quad \frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1'C}{B_1'A}=1.$$

On conclut de là :

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=1,\quad \text{etc.}$$

Lorsque les droites p_1, p_1' sont des transversales réciproques, on démontre comme au premier théorème que les droites p_2, p_2' sont aussi des transversales réciproques.

Voici d'autres théorèmes analogues, qui se démontrent de la même façon :

3. *Soient* AA_1, BB_1, CC_1 *trois droites concourantes et* $A_1'B_1'C_1'$ *une trans-*

versale. Les droites joignant C, A, B *aux points* (AB, A_1B_1'), (BC, B_1C_1'), (CA, C_1A_1') *sont concourantes.*

4. AA_1, BB_1, CC_1 *et* AA_1', BB_1', CC_1' *étant des droites concourantes, les points* (AB, A_1B_1'). (BC, B_1C_1'), (CA, C_1A') *sont collinéaires.*

5. $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ *étant deux transversales, les droites joignant* C, A, B *aux points* (AA_1, BB_1'), (BB_1, CC_1'), (CC_1, AA_1') *sont concourantes.*

6. AA_1, BB_1, CC_1 *étant trois droites concourantes et* $A_1'B_1'C_1'$ *une transversale, les points où les droites joignant* C. A. B *aux points* (AA_1, BB_1'). (BB_1, CC_1'), (CC_1, AA_1') *rencontrent* AB, BC. CA *sont collinéaires.*

[C. D. Constantinescu,
élève au lycée de Ploesti (Roumanie)]

20. *A propos d'une page oubliée d'Hermite* (voir pp. 145-146). M. Brocard nous a fait observer qu'une partie de cette page est citée dans la belle *Notice historique sur Charles Hermite*, par M. G. Darboux (Paris, Gauthier-Villars, 1905, p. 26-27). Celui-ci renvoie au Mémoire de Chevreul : *Sur la distribution des connaissances humaines du ressort de la Philosophie naturelle* (Mémoire de l'Académie des sciences, 2e série, t. XXX, année 1866, p. 528).

Dans le texte que nous avons reproduit, p. 145, ligne 9, en remontant, lire *dans les termes mêmes*, au lieu de *dans les termes*.

A la page 146, ligne 14-17, la phrase commençant par *or*, pour être irréprochable, doit évidemment être modifiée à peu près comme ceci :

« Or, en formant leur produit [des nombres premiers supposés en nombre fini] et y ajoutant une unité, on obtient un nouveau nombre, premier dans l'hypothèse admise et supérieur aux précédents, *ou divisible par un nombre premier supérieur aux précédents* ». Les mots soulignés ont été sans doute oubliés par l'imprimeur de l'ouvrage de Chevreul.

BIBLIOGRAPHIE.

Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung von Karl Bopp. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1907 (In-8° de 227 pages) (*). Prix : 10 marcs.

Grégoire de Saint-Vincent naquit à Bruges le 8 septembre 1584 et mourut à

(*) Ce volume forme le fascicule 2, du tome XX des *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, begründet von Moritz Cantor.

Gand le 27 janvier 1667. Son *Problema austriacum quadraturae circuli* (*) est divisé en dix livres. Malgré le titre, seul le dixième livre traite en réalité de la quadrature du cercle tandis que dans les neuf premiers livres il est question des sujets les plus divers; mais seul, à peu près aussi, ce dixième livre a été étudié. Or, cela va de soi, ce livre est manqué. Comme Grégoire de Saint-Vincent est d'une lecture difficile, rendue encore plus ardue par le format le plus encombrant et le plus incommode qui se puisse imaginer, — 1225 pages grand in-folio! — peu d'auteurs sont en réalité, malgré son mérite, moins connus que lui. Leibniz, bon juge dans la matière, disait cependant que Grégoire devait, à l'égal de Descartes et de Fermat, être regardé comme l'un des créateurs de la géométrie analytique. On s'étonnait de ce jugement, qui semblait même à quelques uns tenir du paradoxe. Grâce à l'étude de M. Bopp, on en reconnaît aujourd'hui la parfaite justesse. Le privat-docent d'Heidelberg ne nous donne cependant pas une analyse complète du *Problema austriacum*, mais seulement celle des livres IV-VI, c'est-à-dire, de la théorie des coniques qu'il parcourt presque proposition par proposition (**). Le style de M. De Bopp est à la fois suffisamment moderne pour permettre une lecture facile des démonstrations originales et suffisamment ancien pour leur conserver un cachet archaïque. Le mérite est assez rare, dans les ouvrages d'histoire des mathématiques : il est bon de le signaler.

Une méthode neuve et absolument caractéristique, chez Grégoire de Saint-Vincent, c'est de déduire systématiquement la nature d'une conique de la forme de son équation. Le fait doit avoir évidemment attiré l'attention de Leibniz et nous explique pourquoi il a songé à associer ces trois noms : Saint-Vincent, Fermat et Descartes.

Les bornes d'un simple compte-rendu ne me permettent pas d'entrer dans le détail des découvertes de Grégoire; mais l'illustre brugeois, on le sait, insiste, dans son ouvrage, d'une manière toute particulière, sur deux d'entre elles, qu'il déclare lui-même admirables : la *symbolisatio spiralis et parabolae* (l'analogie de la spirale d'Archimède et de la parabole (***)) et la *transformatio per subtensas* (transformation par les cordes). Cette dernière appartenant à la théorie des coniques, la voici en langage et en écriture modernes :

(*) Titre de départ : *P. Gregorii a S^ro Vincentio opvs geometricvm qvadraturae circvli et sectionvm coni Decem libris comprehensum.*

Titre gravé : *Problema Avstriacvm Plvs Vltra Qvadratvra Circvli Avctore P. Gregorio a S^ro Vincentio Soc : Iesu.* Antverpiae, apvd Ioannem et Iacobvm Mevrsios, Anno M DC.XLVII. Cum priuilegio Caesareo et Regis Hispaniarum.

(**) Dans le *Problema austriacum*, le liv. VI, contient 203 propositions; le liv. V, 364; et le liv. VI, 249. Ils fournissent une mine inépuisable de jolis théorèmes.

(***) Dans l'*Opus austriacum*, cette théorie fait l'objet d'une annexe spéciale placée entre les livres VI et VII. M. Bopp n'en a pas fait rentrer l'analyse dans le cadre de son travail, mais M. Zeuthen expose très bien le principe de

« On donne une conique et un de ses axes de symétrie. Par un point mobile pris sur la conique, on porte en ordonnée perpendiculaire, à partir de l'axe, la distance de ce point mobile à un point fixe pris sur l'axe. On demande le lieu décrit par l'extrémité de cette ordonnée? »

Ce lieu, dit Grégoire, est en général une nouvelle conique. Et, en effet, soient (x, y) les coordonnées d'un point du lieu, (x, Y) celles du point mobile de même abscisse pris sur la conique, $(d, 0)$ celles du point fixe de l'axe. On a par hypothèse :

$$y^2 = (x - d)^2 + Y^2.$$

D'autre part, l'équation d'une conique rapportée à un de ses axes et à la tangente au sommet est de la forme

$$Y^2 = ax^2 + bx.$$

Éliminant Y^2 entre ces deux équations, il vient :

$$y^2 = (x - d)^2 + ax^2 + bx,$$

ce qui démontre le théorème.

Grégoire de Saint-Vincent discute ce résultat, très en détail, dans le style du temps. Au cours de cette discussion, il fait une découverte des plus remarquables pour l'époque où il vivait. Il observe que, dans ce problème, les foyers de l'ellipse et de l'hyperbole jouissent de propriétés caractéristiques. En effet, quand le point $(d, 0)$ est un foyer, l'expression

$$(x - d)^2 + ax^2 + bx \qquad (1)$$

est un carré parfait et le lieu obtenu se réduit à deux droites.

---

la méthode dans sa *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert*, Leipzig, Teubner 1903 (p. 291 et suiv.) La voici en deux mots :

Soit

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (1)$$

l'équation de la spirale en coordonnées polaires. Posons

$$y = \rho, \quad x = \frac{\rho\omega}{2}. \qquad (2)$$

Il vient, en éliminant ρ et ω entre (1) et (2),

$$\frac{x}{\pi a} = \left(\frac{y}{a}\right)^2 \qquad (3)$$

qui représente une parabole en coordonnées cartésiennes.

L'étroite dépendance qui relie les équations (1) et (3) est au fond le principe des propriétés analogues de l'ellipse et de la parabole découvertes par Saint-Vincent. Rappelons à ce propos que Cantor a fait connaître, dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (3e éd., t. 3, p. 19, en note), le beau théorème que Grégoire nomme « symbolisatio » (analogie) des paraboles parallèles et d'une hyperbole comparée à ses asymptotes.

Mais puisque $ax^2 + bx = Y^2$, reconnaître que (1) est un carré parfait, c'est être bien près d'exprimer que la distance d'un point d'une conique au foyer est une fonction rationnelle entière et du premier degré des coordonnées de ce point. Sous cette forme explicite, le théorème est d'Euler qui l'a donné, un siècle plus tard, en 1748, dans son *Introductio in Analysim infinitorum*. Saint-Vincent ne pouvait pas, dès 1647, avoir l'idée d'une formule de ce genre. Il trouve un théorème équivalent et l'énonce dans le langage de son époque. Même réduit à ces proportions le fait mérite notre admiration.

Il y a plus : Apollonius, dans ses *Coniques*, ne parle pas du foyer de la parabole. Non seulement Grégoire de Saint-Vincent signale l'existence de ce point, mais par sa *transformatio per subtensas*, il lui reconnaît d'emblée des propriétés analytiques analogues à celles des foyers de l'ellipse et de l'hyperbole.

En résumé, le volume de M. Bopp est, croyons-nous, le travail le plus important publié sur l'histoire des mathématiques en Belgique, depuis l'édition de la *Correspondance de Sluse*, par M. Le Paige. Il est des plus intéressants même pour les géomètres étrangers à l'histoire des mathématiques. Nous le recommandons vivement à l'attention du lecteur. H. Bosmans S. J.

Note On peut ajouter à ce qui précède les remarques suivantes : 1° La quadrature de l'hyperbole par les logarithmes, au nom près, appartient à Grégoire de S. Vincent (voir Bopp, p. 264) et a peut-être suggéré à Fermat son ingénieuse méthode de quadrature de toutes les courbes dont l'équation s'écrit aujourd'hui $y = x^m$, m quelconque.

2° Le livre septième de Grégoire de S. Vincent, où il expose pour la première fois des théorèmes *généraux* sur la sommation des infiniment petits géométriques n'a pas été étudié moins que le dixième, comme on peut le voir dans les *Principes* de Newton, là où il donne des théorèmes généraux analogues, et dans les écrits de tous les géomètres qui s'occupent, après Grégoire de Saint Vincent, de quadratures et de cubatures, Fermat, Pascal, Huygens, Leibniz, etc.

Les Carrés magiques, contribution à leur étude par J. Riollot, Ingénieur civil des Mines. Paris, Gauthier-Villars, 1907 (grand in-8 (25 × 16) de IV-119 pages avec 311 figures), 5 fr.

Moschopoulos au moyen-âge, Bachet, Frénicle, Fermat au 17e siècle, Euler au 18e et, depuis lors, une foule d'amateurs et de géomètres se sont occupés avec passion de carrés, de cubes et d'autres figures dites magiques; Lucas en a révélé l'utilité dans la *Géométrie du tissage*. Dans son livre, M. Riollot étudie les propriétés et la construction de beaucoup de ces figures arithmétiques singulières.

Sommaire. Introduction. Ire *partie*. Les figures de nombres sur l'échiquier. I. Considérations générales. II. Définition, notation, classification des carrés magiques. IIe *partie*. Propriétés des carrés magiques. I. Propriétés arithmétiques et algébriques. II. Propriétés géométriques. III. Propriétés particulières aux carrés magiques singuliers. IIIe *partie*. Construction des carrés magiques. I. Procédés divers de construction. II. Méthode du carré guide.

III. Figures magiques diverses. — Tableau indiquant par leur numéro de figure tous les carrés magiques réguliers contenus dans l'Ouvrage.

Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions, par Edmond Maillet, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars, 1906 (grand in-8 de V-275 pages). Prix : 12 fr.

Dans cet Ouvrage d'Arithmétique, M. Maillet expose, sous une forme aussi simple que possible, soit certains résultats connus, soit des résultats nouveaux relatifs à la théorie des nombres transcendants, c'est-à-dire des nombres qui comme e et π ne sont racines d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. Il donne aussi la bibliographie relative aux nombres transcendants.

Comme les matières de cette Introduction se rattachent par plus d'un point à la théorie des fonctions entières, l'auteur a complété son index bibliographique par des renseignements très sommaires suffisants pour permettre au lecteur d'aborder cette dernière ; enfin, il a signalé quelques Mémoires relatifs aux fonctions transcendantes, qui présentent certaines analogies avec les nombres transcendants.

Sommaire Avis au lecteur. I. Quelques propriétés des fractions continues. II. Conditions suffisantes pour qu'un nombre soit transcendant; nombres de Liouville. III. Propriétés arithmétiques des nombres de Liouville. IV. Les nombres transcendants considérés comme racines de séries infinies ou de fractions continues. V. Fonctions génératrices de nombres transcendants. VI. Sur la classification des nombres irrationnels ou transcendants. VII. Les fractions décimales et les fractions continues quasi-périodiques. VIII. Quelques propriétés arithmétiques des racines des équations transcendantes. IX. Transcendance de e et π; impossibilité de la quadrature du cercle. X. Extension aux séries à coefficients rationnels des propriétés des polynomes à coefficients rationnels. XI. Fonctions symétriques. XII. Sur l'extension de la notion de divisibilité et de réductibilité aux fonctions entières. — Notes. I. Sur la classification des fonctions entières. II. Sur l'ordre des nombres de Liouville III. Sur les fonctions hypertranscendantes. IV. Bibliographie.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1600.

(Voir *Mathesis*, (3). VI. p. 280).

Trouver les courbes telles que l'abscisse à l'origine de la normale en un point M *soit une fonction linéaire donnée* $ax + by + c$ *des coordonnées de* M. (J. Rose)

Cette question a été bien résolue par MM. E. Seam, Hacken, Verheugen, Abramescu et Houtekiet. Voici leur solution avec quelques légères retouches.

On trouve facilement pour l'équation différentielle des courbes cherchées

$$yy' + x = ax + by + c.$$

ou

$$ydy = [(a-1)x + by + c]\,dx. \qquad (1)$$

Lorsque $a = 1$, l'intégration est immédiate; car on peut écrire

$$dx = \frac{y}{by + c}\,dy = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{c}{by + c}\right)dy,$$

d'où l'on conclut

$$x = \frac{y}{b} - \frac{c}{b^2}\,l(by + c) + C.$$

Soit $a \gtrless 1$. Si l'on fait $a - 1 = a'$, $b = 2b'$ et qu'on transporte l'origine des coordonnées au point $\left(-\frac{c}{a'}, 0\right)$, l'équation (1) devient

$$ydy = (a'x + 2b'y)\,dx.$$

La substitution $y = xz$ la transforme en

$$z(xdz + zdx) = (a' + 2b'z)\,dx;$$

on sépare les variables en écrivant

$$\frac{dx}{x} + \frac{zdz}{z^2 - 2b'z - a'} = 0. \qquad (2)$$

Nous distinguons trois cas.

1. $b'^2 + a' > 0$. Alors l'équation $z^2 - 2b'z - a' = 0$ a deux racines, α et β, réelles et inégales. L'équation (2) donnera

$$lx + \int \frac{zdz}{(z-\alpha)(z-\beta)} = lC,$$

ou en décomposant la fraction sous le signe en fractions simples,

$$lx + \frac{1}{\alpha - \beta}\, l\,\frac{(z-\alpha)^{\alpha}}{(z-\beta)^{\beta}} = lC.$$

Remplaçons z par $y : x$; il vient après quelques transformations faciles,

$$(y - \alpha x)^{\alpha} = C(y - \beta x)^{\beta}.$$

D'après la remarque [illegible] Si l'on prend pour axes coordonnés les droites $y - \alpha x = 0$, $y - \beta x = 0$ [illegible] les courbes cherchées ont une équation de la forme

$$y^{\alpha} \ldots x^{\beta}$$

2. $b^2 + a' = 0$. L'équation (2) se ramène à

$$\frac{dx}{x} + \frac{z\,dz}{(z-b')^2} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z-b'} + b'\frac{dz}{(z-b')^2} = 0;$$

elle a pour intégrale

$$lx + l(z-b') - \frac{b'}{z-b'} = C,$$

ou

$$l(y - b'x) = C + \frac{b'x}{y-b'x}.$$

3. $b^2 + a' < 0$. L'équation (2) prend la forme

$$\frac{dx}{x} + \frac{z\,dz}{(z-b')^2 + m^2} = 0.$$

Posons $z - b' = mu$; nous aurons

$$\frac{dx}{x} + \frac{(b' + mu)m\,du}{m^2(1+u^2)} = 0.$$

Donc

$$lx + \frac{b'}{m}\operatorname{arc\,tg} u + \frac{1}{2}l(1+u^2) = C,$$

ou

$$\frac{2b'}{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{y-b'x}{mx} + l(y^2 - 2b'xy - a'x^2) = D.$$

Remarque. L'intégrale de l'équation (2) étant de la forme $x = \varphi(z) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, les courbes cherchées sont homothétiques par rapport à la nouvelle origine.

Question 1699.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 56).

On a, avec une erreur inférieure à $\frac{1}{32a}$,

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{2x}{4a+1},$$

si x *est compris entre* 0 *et* $a + \frac{1}{4}$; *et*

$$\sqrt{(a+1)^2 - x} = a + 1 - \frac{2x}{4a+3},$$

si x *est compris entre* 0 *et* $a + \frac{3}{4}$ (énoncé rectifié).

Solution par M. G. VERHEUGEN. 1° Posons

$$y = z - a, \quad z = \sqrt{a^2 + x} - \frac{2x}{4a+1}.$$

Le maximum de y est atteint en même temps que celui de z.

Posons $$\sqrt{a^2 + x} = a + t,$$

d'où $$x = 2at + t^2, \quad z = \frac{4a^2 + a + t - 2t^2}{4a+1};$$

donc z est maximum si $t(1-2t)$ l'est, c.-à-d si $t = \frac{1}{4}$;

donc $$z \leq \frac{4a^2 + a + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}}{4a+1}$$

$$y = z - a \leq \frac{1}{8(4a+1)} < \frac{1}{32a}.$$

2° Posons $y = z - a - 1$; $z = \sqrt{(a+1)^2 - x} + \frac{2x}{4a+3}$.

Soit encore $$\sqrt{(a+1)^2 - x} = a + 1 - t;$$

d'où $$x = 2(a+1)t - t^2,$$

$$z = \frac{4a^2 + 7a + 3 + t - 2t^2}{4a+3}.$$

Le maximum de z a lieu pour $t = \frac{1}{4}$;

donc on a $$z \leq \frac{4a^2 + 7a + 3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}}{4a+3}$$

ou

$$y = z - a - 1 \leq \frac{1}{8(4a+3)} < \frac{1}{32a}.$$

La question peut se résoudre aussi en posant la dérivée première de $y = 0$, etc.

MM. Doutrewe (Athénée de Liége) et Abramescu ont également bien résolu la question. Il nous suffira de résumer leur solution de la première partie.

M. Doutrewe démontre d'abord que les inégalités

$$\sqrt{a^2 + x} > a + \frac{2x}{4a+1}, \quad x < a + 1$$

se ramènent l'une à l'autre. Il observe ensuite que la quantité

$$m \equiv \sqrt{a^2+x} - a - \frac{2x}{4a+1}$$

s'annulant pour $x=0$ et $x=a+\frac{1}{4}$ est susceptible d'un maximum ; il cherche ce maximum en exprimant x en fonction de m.

M. Abramescu pose

$$y = \sqrt{a^2+x} - a - \frac{2x}{4a+1}, \quad z = \sqrt{a^2+x} + a + \frac{2x}{4a+1}$$

et observe que le produit

$$yz = \frac{x}{4a+1} - \frac{4x^2}{(4a+1)^2} = \frac{x[(4a+1)-4x]}{(4a+1)^2}$$

atteint un maximum $\frac{1}{16}$ pour $x=\frac{4a+1}{8}$; mais x variant de 0 à $a+\frac{1}{4}$, z varie de $2a$ à $2a+1$. Par conséquent

$$yz < \frac{1}{16}, \quad y < \frac{1}{16z} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{16.2a}.$$

×Question 1610.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 56).

Un rayon OM *de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC *rencontre les côtés en* A′, B′, C′. *Démontrer que les projections* A″, B″, C″ *de* A′, B′, C′ *respectivement sur les droites* AM, BM, CM *appartiennent à la droite de Simson du point* M. (A. Gob)

Solution par M. V. Retali. Appelons M′ le point diamétralement opposé à M, et P, Q les projections de M respectivement sur BC, CA ; le point M est pris sur l'arc AB et A′ tombe sur le prolongement de BC. Les angles MQP, MCP sont égaux, car les points M, Q, C, P sont concycliques. Or MCP = MA′C + A′MC, et les angles MA′C, MA″P sont égaux, les points M, A″, A′, P étant concycliques ; de plus, les angles A′MC, A″MQ sont égaux comme compléments des angles égaux MNC, MAC, donc

$$\text{angle MQP} = \text{A″MQ} + \text{MA″P}$$

et les points P, Q, A″ sont en ligne droite.

Solution analogue par M. C. D. Constantinescu (Ploesti, Roumanie) et Radev (Botevo, Bulgarie).

Solution par MM. A. Droz-Farny et Doutrewe. La perpendiculaire Mα de M sur BC recoupe en α′ la circonférence. Soit M′ le point diamé-

tralement opposé à M. Comme angle $M\alpha'M' = 90°$, les droites BC et $\alpha'M'$ sont parallèles. On sait que la droite de Simson du point M est la parallèle à $A\alpha'$ menée par α. Supposons que cette droite rencontre MA en A''. Comme BC et $\alpha'M'$ sont parallèles on a

$$M\alpha : \alpha\alpha' = MA' : A'M'. \qquad (1)$$

Comme $\alpha A''$ et $\alpha'A$ sont parallèles on a

$$M\alpha : \alpha\alpha' = MA'' : A''A. \qquad (2)$$

De (1) et (2), on déduit $MA'' : A''A = MA' : A'M'$, donc $A'A''$ est parallèle à AM'. Mais l'angle $M'AM = 90°$, donc $A'A''M = 90°$.

Solution par M. L. Hacken. Soient P la projection de M sur AC et Q la projection de M sur AB. Les triangles rectangles MQB et MPC ont leurs angles égaux, donc $MQ : MB = MP : MC$. De même, les triangles rectangles MQB et MA'A'' sont équiangles entre eux; car, si D est le point d'intersection de MO et de la circonférence O, les angles MBQ et MDA sont égaux ainsi que leurs compléments BMQ et A'MA''. De là résulte que $MQ : MB = MA'' : MA'$. Donc

$$\frac{MQ}{MB} = \frac{MP}{MC} = \frac{MA''}{MA'}.$$

Remarquons que les angles que font entre elles les droites MQ, MP, MA'' sont égaux respectivement aux angles que font entre elles MB, MC, MA' et que les points B, C, A' sont en ligne droite; nous en concluons que Q, P, A'' sont aussi en ligne droite. Or, PQ est la droite de Simson relative au point M.

Solution par M. Delahaye (Roye). Le théorème de M. Gob se déduit de la proposition suivante :

Étant donnés un angle xAy et un point M, *si une circonférence* O *de rayon variable et passant par les points* M *et* A *rencontre* Ax *en* B, Ay *en* C, *le point de rencontre* A' *du rayon* MO *avec la corde* BC *décrit une droite*. En effet, les angles MAB, MAC étant invariables, la figure constituée par les droites BC, MOA' est toujours semblable à elle-même; donc le rapport $MO : MA'$ est constant. Comme le point O décrit la perpendiculaire au milieu de MA, le point A' parcourt une droite perpendiculaire à MA. Supposons que la circonférence de diamètre MA coupe AB en β, AC en γ; alors la droite $\beta\gamma$ est la droite de Simson de

M par rapport au triangle ABC, et le point A′ est remplacé par l'intersection α des droites MA, $\beta\gamma$; donc la droite A″A′ est perpendiculaire à MA.

Semblablement les projections de B′ sur BM et de C′ sur CM appartiennent à la droite de Simson de M.

Bonne solution analytique par M. Lez; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de la reproduire.

M. Abramescu observe que la question 1610 est un cas particulier de la première partie de la question 1612, dont la solution paraîtra prochainement.

Question 1616.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 112).

Trouver les valeurs, réelles ou imaginaires, de x qui rendent réelle l'expression

$$\varphi(x) = (a + a'i)\,x^2 + (b + b'i)\,x + (c + c'i) \quad (i = \sqrt{-1})$$

et déterminer pour chacune de ces valeurs de x le signe de $\varphi(x)$. *Exemple :* $(1 - i)\,x^2 - 2ix + 1 + i$. (Abramescu)

Solution par MM. J. Rose et Hacken. On peut écrire

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c + i\,(a'x^2 + b'x + c').$$

Si $a'x^2 + b'x + c' = 0$ a des racines réelles égales ou inégales, ces valeurs satisfont à la question; le signe de $\varphi(x)$ sera celui du trinôme $ax^2 + bx + c$ pour ces mêmes racines. Si au contraire, ces racines sont imaginaires de la forme $\alpha + \beta i$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ devient pour ces valeurs $a(\alpha^2 - \beta^2) + a\beta + c + i\beta(2a\alpha + b)$. Donc $\varphi(x)$ ne sera réel que si entre ses coefficients existe la relation $2a\alpha + b = 0$ ou que $ax^2 + bx + c$ ne soit de la forme $a(x - \alpha)^2 + c$.

Soit maintenant $x = y + iz$ une des valeurs imaginaires satisfaisantes. On a

$$\varphi(y + iz) = a(y^2 - z^2) - 2a'yz + by - b'z + c + i[a'(y^2 - z^2) + 2ayz + b'y + bz + c'],$$

et les valeurs satisfaisantes sont telles que $x = y + iz$, y et z désignant les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole équilatère

$$a'(y^2 - z^2) + 2ayz + b'y + bz + c' = 0. \qquad (1)$$

Pour ces valeurs, $\varphi(x)$ sera positif, négatif ou nul suivant que le point

choisi sur (1) est extérieur, intérieur ou sur l'autre hyperbole équilatère concentrique à la première

$$a(y^2 - z^2) - 2a'yz + by - b'z + c' = 0. \qquad (2)$$

En particulier, si

$$\varphi(x) = (1 - i)x^2 - 2ix + 1 + i = x^2 + 1 - i(x^2 + 2x - 1),$$

les valeurs réelles satisfaisantes sont les racines de $x^2 + 2x - 1 = 0$, c'est-à-dire $-1 \pm \sqrt{2}$ et pour celles-ci $\varphi(x)$ est positif. Quant aux valeurs imaginaires, elles sont de la forme $x = y + iz$. y et z étant des points de l'hyperbole équilatère

$$y^2 - z^2 + 2yz + 2z + 1 = 0. \qquad (1')$$

$\varphi(x)$ est alors positif, négatif ou nul suivant la position du point considéré de cette hyperbole par rapport à l'autre hyperbole équilatère

$$z^2 - y^2 + 2yz - 2y + 1 = 0. \qquad (2')$$

Remarques. En combinant les équations (1') et (2') par addition et par soustraction, on trouve

$$2yz - y + z + 1 = 0, \quad (y + z)(y - z + 1) = 0;$$

d'où l'on conclut que les courbes (1') et (2') se coupent en deux points réels de coordonnées $y = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} - 1)$, $z = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3})$ et en deux points imaginaires.

Pour achever la discussion, nous allons rapporter les courbes (1') et (2') à leur centre commun, ce qui donne

$$y^2 - z^2 + 2yz + \tfrac{3}{2} = 0 \quad (1''), \qquad z^2 - y^2 - 2yz + \tfrac{3}{2} = 0. \quad (2'')$$

Les points d'intersection réels, M et M', ont maintenant pour coordonnées $(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$, $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ et le centre commun des deux hyperboles (1'') et (2'') se trouve dans la région positive des deux courbes. Nous devrons donc prendre sur les deux branches de l'hyperbole (1'') les arcs à partir de M ou M' qui sont plus rapprochés de l'origine que les arcs correspondants de l'hyperbole (2''). (Hacken)

×Question 1619.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 112.)

Une sphère étant inscrite à un tétraèdre, on joint le point de contact d'une face aux sommets de cette face. Démontrer que les trois angles compris entre les droites ainsi menées sont les mêmes dans les quatre faces. (Bang)

Solution par M. MALAISE (Liège). Si, par une droite, on mène les deux plans tangents à une sphère et si l'on joint aux points de contact α et β, deux points quelconques A et B de la droite, il est clair que les angles AαB et AβB seront égaux, comme appartenant aux triangles égaux AαB et AβB.

Ceci étant, si l'on désigne par a_1, b_1, c_1, les angles compris entre les droites joignant le point de contact de la face ABC du tétraèdre aux sommets de cette face, on pourra désigner les angles analogues des trois autres faces, respectivement par

$$a_1,\ b_2,\ c_2\ ;\quad a_2,\ b_1,\ c_2\ ;\quad a_2,\ b_2,\ c_1.$$

Alors,

$$2\pi = a_1 + b_1 + c_1 = a_1 + b_2 + c_2 = a_2 + b_1 + c_2 = a_2 + b_2 + c_1,$$

d'où $$b_1 + c_1 = b_2 + c_2,\quad b_1 + c_2 = b_2 + c_1\ ;$$

par suite $$b_1 = b_2,\quad c_1 = c_2,\quad a_1 = a_2.$$

Solution analogue par MM. ROSE, LAMOTTE et HAEKEN.

Question 1630.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 142).

Montrer que le système

$$x^2y = (a - x)^2,\quad x(a - y) = y^2,$$

est satisfait pour $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{2}$ *et que les quatre autres solutions sont imaginaires.* (E. N. BARISIEN)

Solution par M. D. SINTSOF. Portons la valeur $y = (a - x)^2x^{-2}$ tirée de la première dans la seconde et posons $a - x = xz$, d'où $a = x(1 + z)$, $y = xz^2$. Nous aurons

$$x^2(1 - z^6 + z - z^2) = 0,$$

ou, en séparant le facteur évident $1 - z^2$,

$$x^2(1 - z^2)(1 + z + z^2 + z^4) = 0,$$

ou enfin

$$ax(1 - z)(1 + z + z^2 + z^4) = 0.$$

Or, l'équation

$$z^4 + z^2 + z + 1 = 0$$

n'a pas de racines réelles positives; elle n'a pas non plus des racines réelles négatives parce que pour $z < 0$ on a, ou $z + 1 > 0$, ou bien $z(z + 1) > 0$.

La seule solution réelle est donc fournie par $1 - z = 0$, $2x = a$, $y = x = \frac{1}{2}a$, la valeur $x = 0$ ne vérifiant pas le système proposé.

Solution par M. H. Lez. Les équations proposées représentent, la première une cubique, la seconde une hyperbole ; en les écrivant ainsi :

$$x^2(x+y) - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0, \quad (1)$$

$$y(x+y) - ax = 0, \quad (2)$$

on voit que la cubique a pour asymptotes l'axe des y et la droite

$$x + y = 3a. \quad (3)$$

Elle se compose de deux branches infinies dont l'une coupe l'axe des x, en $x = a$, point d'inflexion, et, si on élimine y entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à x, on trouve une équation dont les racines sont les abscisses des points qui ont des tangentes horizontales ; cette équation est $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$, ou $(x-a)^2(x+2a) = 0$.

Quant à l'hyperbole, ses asymptotes sont $y = a$, $x + y = -a$ (4) et son centre a pour coordonnées $x = -2a$, $y = a$. Les deux courbes sont donc bien déterminées ; elles ne peuvent se rencontrer que dans l'espace compris entre l'axe des y, la droite $y = a$ et les deux asymptotes parallèles $x + y = 3a$, $x + y = -a$, c'est-à-dire en un seul point réel.

D'ailleurs, de l'équation (2), on tire $x = \dfrac{y^2}{a-y}$; cette valeur portée dans (1) donne après réduction

$$4y^5 - 5a^2y^3 + 3a^4y - a^5 = 0. \quad (5)$$

Faisant $2y = z$, cette équation se transforme en

$$z^5 - 5a^2z^3 + 12a^4z - 8a^5 = 0 \quad (6)$$

la somme des coefficients des termes négatifs étant égale à celle des coefficients des termes positifs, l'équation est vérifiée par $z = a$.

Par suite, l'équation (5) est vérifiée par $x = y = \dfrac{a}{2}$; ce sont les coordonnées du point de rencontre des deux branches infinies contenues dans l'espace défini ci-dessus.

Divisant l'équation (6) par $z - a$, on obtient l'équation

$$z^4 + az^3 - 4a^2z^2 - 4a^3z + 8a^4 = 0 \quad (7)$$

qui n'a pas de racines réelles.

En effet, à l'aide des fonctions de Sturm,

$$\left.\begin{aligned} V &= z^4 + az^3 - 4a^2z^2 - 4a^3z + 8a^4 \\ V_1 &= 4z^3 + 3az^2 - 8a^2z - 4a^3 \\ V_2 &= 35z^2 + 40az - 132a^2 \\ V_3 &= -17z + 19a \\ V_4 &= 12593 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

on peut établir le tableau ci-après :

	V	V_1	V_2	V_3	V_4
$z = -\infty$	+	−	+	+	+
$z = \infty$	+	+	+	−	+

La suite des fonctions (8) donnant le même nombre de variations pour chacune des valeurs de z, l'équation (7) n'a que des racines imaginaires.

M. Rose a également résolu la question en considérant la cubique et l'hyperbole représentées par les équations données. M. Hernandez forme l'équation (5) et, après l'avoir débarrassée du facteur $xy - a$, il discute la réalité des racines en calculant la suite de Sturm.

Solution par M. Delahaye. Le système proposé peut s'écrire

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{a}{x} - 1\right)^3, \quad \frac{a}{y} - 1 = \frac{y}{x}.$$

Si l'on fait $a : x = z$, $a : y = t$, on trouve

$$z^3 = \frac{z+1}{t+1} = t. \qquad (1)$$

On aperçoit immédiatement les deux solutions $z = \pm 1$, $t = \pm 1$; la première donne $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$ et la seconde rend x et y infinis.

En éliminant t entre les deux équations (1), on obtient

$$z^6 + z^3 - z - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad (z^6 - 1) + z(z^2 - 1) = 0.$$

On retrouve les valeurs $t = \pm 1$; mais il resterait encore à résoudre

$$z^4 + z^2 + z + 1 = 0.$$

La discussion s'achève comme dans la solution de M. Sintsof; M. Delahaye emploie un autre procédé plus long.

Autre solution par M. Malaise (Liége).

Question 1625.

(Voir *Mathesis* VII, (3), p. 144)

La normale en un point M *quelconque d'une ellipse rencontre le grand axe en* N. 1° *La droite* Δ *élevée en* N *perpendiculairement à* MN *enveloppe une sextique unicursale ayant pour aire* $\frac{\pi b(a^2+b^2)^2}{8a^2}$, $2a$ *et* $2b$ *étant les axes de l'ellipse;* 2° *le lieu de la projection* P *du centre de l'ellipse sur* Δ *est une sextique ayant pour aire* $\frac{\pi(a-b)^2(2a+b)}{2a}$ (*Expression rectifiée*).

Voir ce que devient la courbe (1°), *si l'ellipse est remplacée par une parabole.* (E. N. Barisien)

L'ellipse étant remplacée par une courbe quelconque, construire le point de contact de Δ *avec son enveloppe ou la tangente en* P *au lieu de* P.

(J. N.)

Solution par M. van Dinter. 1° L'équation de la normale au point M(φ) de l'ellipse étant

$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=a^2e^2,$$

on aura pour $y=0$, $\qquad x=ae^2\cos\varphi.$

L'équation de Δ sera donc

$$y=-\frac{b}{a}\cot\varphi\,(x-ae^2\cos\varphi)$$

ou
$$ay\sin\varphi+bx\cos\varphi-abe^2\cos^2\varphi=0. \qquad (1)$$

Différentiant par rapport à φ, on trouve :

$$ay\cos\varphi-bx\sin\varphi+2abe^2\sin\varphi\cos\varphi=0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent :

$$x=ae^2(2\cos\varphi-\cos^3\varphi),$$
$$y=-be^2\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

Telles sont les formules paramétriques de l'enveloppe cherchée. Pour trouver l'aire de la courbe, il faut calculer $u=2\int_{-ae^2}^{ae^2}ydx$, ou

$$\tfrac{1}{2}u=2abe^4\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi-3abe^4\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos^4\varphi d\varphi.$$

Or, $$\int_0^{\pi} \sin^2\varphi \cos^4\varphi d\varphi = \tfrac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi,$$

c'est ce qu'on voit en remplaçant $\sin^2\varphi\cos^4\varphi$ par

$$\sin^2\varphi\cos^2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \frac{1}{8}\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi.$$

Par conséquent,

$$u = abe^4\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \tfrac{1}{4}abe^4\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi = \tfrac{1}{8}abe^4\pi = \frac{\pi b(a^2-b^2)^2}{8a^2}.$$

2° Pour trouver le lieu P, il faut éliminer (φ) entre les équations :

$$ay\sin\varphi + bx\cos\varphi - abe^2\cos\varphi = 0, \quad \frac{y}{x} = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi,$$

ce qui donne

$$\frac{ab(x^2+y^2)}{(a^2x^2+b^2y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^3be^2x^2}{a^2x^2+b^2y^2} = 0,$$

ou $$(x^2+y^2)^2(a^2x^2+b^2y^2) = a^4e^4x^4,$$

et en coordonnées polaires

$$r^2 = \frac{(a^2-b^2)^2\cos^4\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}.$$

Pour trouver l'aire de la courbe, il faut calculer :

$$u = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^2 d\theta = 2(a^2-b^2)^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^4\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta},$$

$$= 2(a^2-b^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2\theta d\theta - 2b^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta + 2b^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{(a^2-b^2)\cos^2\theta + b^2},$$

$$= \frac{(a^2-b^2)\pi}{2} - \frac{2b^2\pi}{2} + 2b^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{\frac{a^2}{b^2}+\operatorname{tg}^2\theta},$$

$$= \frac{(a^2-b^2)\pi}{2} - \frac{2b^2\pi}{2} + \frac{2b^3\pi}{2a} = \frac{(a^2-3ab^2+2b^3)\pi}{2a},$$

$$= \frac{\pi(a-b)^2(a+2b)}{a}$$

3° Remplaçons l'ellipse par une parabole de sommet A. La tangente en M coupe la tangente au sommet en B; soit F le foyer. Prenons sur l'axe $FA_1 = AF$ et élevons en A_1 une perpendiculaire. On a $BF = \frac{1}{2} MN$; si BF prolongée rencontre en D la perpendiculaire élevée en A_1 on a $BF = FD$ et Δ passera par le point D. Son enveloppe sera par conséquent une parabole égale à la première, de sommet A_1 et de foyer F.

Soient enfin C une courbe quelconque, A_1 le point d'intersection de la normale MN avec une normale voisine M_1N_1, B_1 le point d'intersection des deux positions correspondantes de Δ. Le cercle décrit sur A_1B_1 comme diamètre passe par N et N_1. Si, à la limite, M_1 coïncide avec M, ce cercle touchera l'axe des x en N, et passera par le centre de courbure A. Donc, si l'on construit ce cercle, son intersection avec Δ donnera le point de contact (B) avec l'enveloppe. Puis, parce que le lieu de P est la podaire de l'enveloppe par rapport à l'origine, si l'on décrit le cercle sur OB comme diamètre, la tangente en P à ce cercle sera aussi tangente au lieu de P.

La question de M. Barisien a été également résolue par MM. Lez et Gaedeeke (Berlin). M. Lez donne l'équation cartésienne de la première sextique :

$$a^2(a^2y^2 + b^2x^2)^2 + b^2c^4(8a^4y^4 - b^4x^4 - 20a^2b^2x^2y^2) + 16b^4c^8y^2 = 0.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

1358. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x^2 + ax + b^2} + \sqrt{x^2 + a'x + b'^2} = c.$$

1359. Vérifier les égalités

$$\sqrt{3+\sqrt{7}}\,(\sqrt{13-\sqrt{7}} - \sqrt{5-\sqrt{7}}) = 4,$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{3}}\,(\sqrt{47-2\sqrt{3}} - \sqrt{8-2\sqrt{3}}) = 13,$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{3}}\,(\sqrt{47+2\sqrt{3}} + \sqrt{8+2\sqrt{3}}) = 13.$$

(Barisien)

1360. Dans tout triangle ABC, on a

$$h_a \sin A = b \cos B + c \cos C - a \cos B \cos C,$$

d'où l'on peut déduire $2Rh_a = bc$. (A. C.)

1361. Si l'orthocentre H d'un triangle ABC est au milieu de la hauteur AD, on a les relations

$$\overline{AD}^2 = 2BD.DC,$$

$$\cos A = \cos B \cos C = \tfrac{1}{2} \sin B \sin C, \quad \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2,$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C, \quad \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 B \sin^2 C.$$

(A. C.)

1362. On donne deux plans α, β et une droite d. Un plan quelconque mené par d rencontre α suivant la droite a, β suivant la droite b. Par a on mène un plan α' perpendiculaire à α, par b un plan β' perpendiculaire à β. Quelle est la surface engendrée par l'intersection des plans α' et β'.

La droite $\alpha'\beta'$ s'appuie sur la droite $\alpha\beta$, sur la perpendiculaire à α au point αd, et sur la perpendiculaire à β au point βd, etc. Cas particuliers suivant la situation de d.

1363. Une circonférence de centre O touche les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC respectivement en L, M, N. La tangente parallèle à BC coupe AB en D et AC en F ; soit E son point de contact. Les droites EB et DL se rencontrent en p ; les droites EC et FL, en r ; les droites DL et EC, en s ; les droites EB et FL, en q. Cela posé :

1° Les droites Np et Mr sont parallèles à BC.

2° Les droites MN, pr et EL concourent en un même point I.

3° Les points s, A, q sont situés sur une même parallèle à BC.

4° La droite AE passe par l'isotomique de L sur BC.

La démonstration repose sur les égalités DE = DN, NB = BL, ... et sur la similitude de certains triangles.

1364. Trouver la limite de l'expression

$$\sqrt[p]{a+\sqrt[p]{a+\sqrt[p]{a}\,....}}$$

On écrit

$$x = \sqrt[p]{a+x}, \quad x^p - x = a.$$

La limite cherchée est la racine positive de cette équation. On trouve ainsi

$$\lim. \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots}}} = 2.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

M. Heiberg, le savant éditeur d'Archimède, d'Euclide, d'Apollonius, vient de retrouver, à Constantinople, le texte grec presque complet d'un Mémoire du grand géomètre de Syracuse, intitulé : *Méthode pour les théorèmes mécaniques adressée par Archimède à Eratosthènes.* M. Heiberg en a publié une traduction, avec un commentaire par M. Zeuthen, dans la *Bibliotheca mathematica*, 1907, (3), VII, pp. 321-363, sous le titre : *Eine neue Schrift des Archimedes.* Nous en extrayons les questions 1636 et 1637.

Nous demandons aux lecteurs de *Mathesis* de résoudre ces questions sans recourir au calcul intégral.

1636. Un cylindre droit à base circulaire est inscrit dans un prisme droit de base carrée et de même hauteur qu'il touche suivant quatre droites parallèles à ses arêtes Par l'un des côtés du carré, base supérieure du prisme, et par le diamètre parallèle de la base inférieure du cylindre, on mène un plan sécant. Le volume de l'onglet cylindrique compris entre le plan sécant, la base inférieure du cylindre, et le cylindre est le sixième du volume du prisme. (ARCHIMÈDE)

1637. Le volume compris entre deux cylindres droits à base circulaire inscrits dans un cube qu'ils touchent chacun suivant quatre droites parallèles aux arêtes, les axes des deux cylindres étant perpendiculaires, est égal aux deux tiers du volume du cube. (ARCHIMÈDE)

1638. Par un point P pris sur la bissectrice de l'angle XOY, on mène une sécante quelconque qui rencontre OX en A et OY en B. On rabat les segments AP, BP respectivement autour de A et de B sur OX et OY, l'un vers le point O, l'autre dans la direction opposée à O. Trouver l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités A′, B′ des segments rabattus. (DROZ FARNY)

×**1639.** Trouver la limite de

$$u_n = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$$

pour $n = \infty$. Généraliser. (ABRAMESCU)

1640. Démontrer les identités

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}} = 1,$$

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

(BARISIEN)

Rectification. Page 182, ligne 4, au lieu de 1849, lire 1870.

×SUR LES DERNIERS CHIFFRES DES CUBES ET AUTRES PUISSANCES,

par M. Verkaart.

1. Au moins un des nombres $a^3 + a$ et $a^3 - a$ est divisible par 10.

2. Si a et b ne sont pas M. 10, $a^3 \pm b^3$ n'est divisible par 10 qu'en même temps que $a \pm b$.

3. Si un cube se termine par 0, 4 ou 8, le chiffre des dizaines est pair. S'il se termine par 2 ou 6, le chiffre des dizaines est impair.

4. Si un cube est impair, le chiffre des dizaines est pair ou impair dans le cube en même temps que dans la racine.

5. Quand un cube se termine par 5, le chiffre des dizaines est 2, si le chiffre des dizaines dans la racine est pair; il est 7, si le chiffre des dizaines de la racine est impair.

6. Les *désinences* de 2 chiffres possibles dans les cubes sont résumées dans le tableau suivant :

Chiffre des dizaines	Chiffre des unités. 1,	2,	3,	4,	6,	7,	8,	9
0, $\overline{2}$, 4, 6, 8	×		×	×		×	×	×
1, 3, 5, $\overline{7}$, 9	×	×	×		×	×		×

La croix × indique que les chiffres des dizaines sont possibles.

Les traits au-dessus de 2 et 7 indiquent les chiffres qui peuvent précéder le chiffre 5.

En outre il y a encore la désinence 00.

En somme 63 désinences.

7. Les 20 désinences paires de cubes non divisibles par 5 correspondent chacune à deux désinences de racines, qui ont une différence de 50. Les 40 désinences impaires de cubes non divisibles par 5 correspondent chacune à une désinence de racine. La désinence 00 correspond à 10 désinences en 0 de racines. Les désinences 25 et 75 correspondent chacune à 5 désinences en 5 de racines.

8. Les désinences de deux chiffres égaux sont

00 : les cubes des nombres en 0
44 » » » » » 14 et 64.
88 » » » » » 42 et 92,
11 » » » » » 71
33 » » » » » 77
77 » » » » » 53
99 » » » » » 99

Le chiffre des unités de la racine se déduit directement de celui du cube. Ensuite on peut trouver le chiffre des dizaines.

Exemples : I ..... $77 =$ ..... 3^3,

$$(10p+3)^3 = \text{M}.100 + 270p + 27,$$

$7p+2$ se termine par 7, donc p se termine par 5

II ..... $88 =$ ..... 2^3,

$$(10p+2)^3 = \text{M}.100 + 120p + 8,$$

$2p$ se termine par 8, donc p se termine par 4 ou 9.

9. Si dans un cube pair, le nombre formé par le chiffre des unités et celui des dizaines est M.8, le chiffre des centaines est pair. Si ce nombre est M.8 + 4, le chiffre des centaines est impair.

10. Les seules désinences en 5 de trois chiffres sont 125, 375, 625 et 875.

11. Si k est pair, les nombres $(250p+k)^3$ et k^3 ont la même désinence de trois chiffres.

Donc toute désinence de 3 chiffres d'un cube pair correspond à quatre désinences de 3 chiffres de racines.

Ainsi, 624 correspond à ....124^3, ...374^3, . ..624^3 et ....874^3.

12. Les 400 désinences impaires de 3 chiffres de racines (non divisibles par 5) donnent 400 désinences de cubes. Les 400 désinences paires (non divisibles par 5) donnent 100 désinences de cubes. Les 100 désinences en 5 donnent 4 désinences de cubes. Les 100 désinences en 0 donnent 1 désinence de cubes.

En somme, 505 désinences de cubes.

13 Les désinences de 3 chiffres égaux sont

000 : les cubes des nombres en 0,
888 » » » » » 192, 442, 692 et 942.
111 » » » » » 471,
333 » » » » » 477,
777 » » » » » 753,
999 » » » » » 999.

14. Le nombre de chiffres égaux (0, 8, 1, 3, 7 ou 9) par lesquels un cube peut se terminer, est *illimité*.

15. Les nombres qui ont les mêmes désinences que leurs cubes, se terminent par

0,	1,	4,	5,	6,	9,
00,	01 51	24,	25 75	76,	49 99
000,	001 501 251 751	624,	125 625 375 875	376,	249 749 499 999
0000,	0001 5001 3751 8751	0264,	0625 5625 4375 9375	9376,	1249 6249 4999 9999
00000,	00001 50001 18751 68751	90624,	40625 90625 09375 59375	09376,	31249 81249 49999 99999

etc.

16. Si un nombre se termine par n chiffres 9 son cube se termine par ces mêmes chiffres.

17. Si un nombre se termine par n chiffres 9, précédés de 1, 3, 5, 7 ou 9, la $5^{ième}$ puissance de ce nombre se termine par $n+1$ chiffres 9, précédés de 0, 1, 2, 3 ou 4.

18. Si x^m (m impair) se termine par les mêmes n chiffres que x, alors $(10^n - x)^m$ se termine par les mêmes n chiffres que $10^n - x$.

19. Si $x^m + x = \text{M}.10^n$ (m pair), alors $(10^n - x)^m$ et $10^n - x$ se terminent par les mêmes n chiffres.

20. La $m^{ième}$ puissance d'un nombre pair x se termine par les mêmes $n(>1)$ chiffres que la $m^{ième}$ puissance du nombre $x \pm \frac{10^n}{2}$.

21. La $m^{ième}$ puissance d'un nombre pair x se termine par les mêmes n chiffres que la $m^{ième}$ puissance de $x \pm \frac{10^n}{2^2}$, pourvu que m et n soient > 2.

22. La $m^{ième}$ puissance d'un nombre pair x se termine par les mêmes n chiffres que la $m^{ième}$ puissance de $x \pm \frac{10^n}{2^p}$, pourvu que m et n soient $> p$.

SUR QUELQUES COURBES ASSOCIÉES AU TRIANGLE,

par Lucien Godeaux, étudiant (Liége).

Soient L un point quelconque du plan d'un triangle $A_1A_2A_3$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, ses coordonnées normales absolues et L_1, L_2, L_3 ses projections sur BC, CA, AB.

Supposons que les projetantes LL_1, LL_2, LL_3 après avoir tourné de l'angle $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ autour de L dans le sens $A_1A_2A_3$ rencontrent respectivement BC, CA, AB en M_1, M_2, M_3 et qu'après avoir tourné du même angle autour de L dans le sens $A_3A_2A_1$, elles rencontrent les mêmes côtés en M_1', M_2', M_3'. Prenons sur les droites LM_1, LM_2, ... les points X_1, X_2, ... tels que

$$\frac{LX_1}{LM_1} = \frac{LX_2}{LM_2} = \frac{LX_3}{LM_3} = \frac{LX_1'}{LM_1'} = \frac{LX_2'}{LM_2'} = \frac{LX_3'}{LM_3'} = \frac{1}{k}.$$

1. Cela posé, nous cherchons d'abord le lieu d'un point L tel que les droites A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3 concourent en un même point U ou que les droites A_1X_1', A_2X_2', A_3X_3' concourent en un point U'.

Si l'on projette les contours X_1LL_2, X_1LL_3 sur les perpendiculaires abaissées de X_1 sur A_1A_2 ou sur A_1A_3, on trouve pour les coordonnées du point X_1 (multipliées par $k \sin \alpha$)

$$\mu_{11} = (k-1)\lambda_1 \quad \mu_{12} = k\lambda_2 \sin\alpha + \lambda_1 \sin(\alpha - A_3),$$
$$\mu_{13} = k\lambda_3 \sin\alpha + \lambda_1 \sin(\alpha - A_2);$$

on obtient par analogie celles des points X_2, X_3, ...

Les droites A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3 ont donc pour équations

$$\frac{x_2}{\mu_{12}} = \frac{x_3}{\mu_{13}}, \quad \frac{x_3}{\mu_{23}} = \frac{x_1}{\mu_{21}}, \quad \frac{x_1}{\mu_{31}} = \frac{x_2}{\mu_{32}}; \tag{1}$$

la condition pour qu'elles soient concourantes est

$$\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31} = \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32}.$$

On peut l'écrire ainsi

$$\Sigma[k \sin\alpha \sin(\alpha - A_1) - \sin(\alpha - A_2)\sin(\alpha - A_3)]\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) = 0. \quad (2)$$

Le lieu de L est par conséquent une cubique appartenant au faisceau défini par les courbes

$$\Sigma \sin(\alpha - A_1)\, x_1 (x_2^2 - x_3^2) = 0, \quad (3)$$

$$\Sigma \sin(\alpha - A_2)\sin(\alpha - A_3)\, x_1 (x_2^2 - x_3^2) = 0, \quad (4)$$

x_1, x_2, x_3 étant les coordonnées courantes.

Les points de base de ce faisceau sont les sommets du triangle $A_1A_2A_3$, les centres des cercles tritangents et le point $\left(\frac{1}{\sin(\alpha - A_1)}, \frac{1}{\sin(\alpha - A_2)}, \frac{1}{\sin(\alpha - A_3)}\right)$ appartenant à l'hyperbole de Kiepert. On peut donc dire que, lorsque α varie, le huitième point de base du faisceau décrit cette hyperbole.

Les cubiques (3) et (4) sont des anallagmatiques en coordonnées normales, c'est-à-dire des courbes qui sont leurs propres transformées par points inverses.

Pour passer au lieu de L lorsque les droites A_1X_1', A_2X_2', A_3X_3' sont concourantes, il suffit de changer α en $-\alpha$ dans l'équation (2).

Les deux cubiques ainsi obtenues se confondent lorsque $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, on trouve alors

$$\Sigma(k \cos A_1 - \cos A_2 \cos A_3)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) = 0.$$

Cette cubique a été étudiée par MM. Neuberg et Schoute (A.F.A.S. Marseille, 1891).

Si $\alpha = 0$, on obtient la cubique des 17 points

$$\Sigma a_2 a_3 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) = 0.$$

2. Cherchons maintenant le lieu du point U. A cet effet, écrivons les équations (1) ainsi

$$[x_2 \sin(\alpha - A_2) - x_3 \sin(\alpha - A_3)]\lambda_1 - k\lambda_2 x_3 \sin\alpha + k\lambda_3 x_2 \sin\alpha = 0, \quad (1')$$

et éliminons λ_1, λ_2, λ_3. En posant

$$u_1 = x_2 \sin(\alpha - A_2) - x_3 \sin(\alpha - A_3),$$
$$u_2 = x_3 \sin(\alpha - A_3) - x_1 \sin(\alpha - A_1),$$
$$u_3 = x_1 \sin(\alpha - A_1) - x_2 \sin(\alpha - A_2),$$

il vient

$$\begin{vmatrix} u_1 & -kx_3\sin\alpha & kx_2\sin\alpha \\ kx_3\sin\alpha & u_2 & kx_1\sin\alpha \\ -kx_2\sin\alpha & kx_1\sin\alpha & u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$u_1u_2u_3 + k^2\sin^2\alpha\,\Sigma u_1x_1^2 = 0,$$

ou encore

$$\Sigma x_2x_3^2\sin(\alpha - A_2)\sin^2(\alpha - A_3) - \Sigma x_2^2x_3\sin^2(\alpha - A_2)\sin(\alpha - A_3) + k^2\sin^2\alpha\,[\Sigma x_2^2x_3\sin(\alpha - A_3) - \Sigma x_2x_3^2\sin(\alpha - A_2)] = 0 \quad (6')$$

C'est donc une cubique appartenant à un faisceau défini par les courbes :

$$\Sigma x_2x_3^2\sin(\alpha - A_2)\sin^2(\alpha - A_3) - \Sigma x_2^2x_3\sin^2(\alpha - A_2)\sin(\alpha - A_3) = 0, \quad (7)$$

$$\Sigma x_2^2x_3\sin(\alpha - A_3) - \Sigma x_2x_3^2\sin(\alpha - A_2) = 0. \quad (8)$$

La cubique (7) est une cubique fixe d'un faisceau linéaire, de même que la cubique (8).

Ces cubiques sont circonscrites au triangle $A_1A_2A_3$ et passent par le point $\left(\frac{1}{\sin(\alpha - A_1)}, \cdots\right)$ de l'hyperbole de Kiepert. Quand α varie, ce point décrit cette hyperbole, en entraînant le faisceau.

3 Etant donné le point L, on peut choisir d'une infinité de manières k et α tels que les droites A_1X_1. A_2X_2, A_3X_3 concourent en un même point U. Pour obtenir l'équation du lieu géométrique du point U, lorsque L est fixe et que k et α varient, il suffit d'additionner les équations (1), après les avoir écrites ainsi :

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_3 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}x_2\right)k - (x_2\sin A_2 - x_3\sin A_3)\cot\alpha - (x_2\cos A_2 - x_3\cos A_3) = 0, \quad \text{etc.} \quad (1'')$$

Il vient

$$\Sigma\lambda_2\lambda_3(\lambda_2x_3 - \lambda_3x_2) = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma\lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)x_1 = 0. \quad (u)$$

Donc, pour un même point L, le point U décrit une droite (u) passant par L et par l'inverse de ce point.

Inversement, le lieu géométrique des points L correspondant à un même point U donné, est une cubique passant par les sommets du triangle, par les centres des cercles tritangents et par le point U. Cette cubique est une anallagmatique inverse.

L'équation (u) montre que le lieu des points inverses qui sont colli-

néaires avec un point U fixe est une cubique (résultat connu), il serait sans doute intéressant d'étudier les cas où la droite (u), au lieu d'envelopper un point, enveloppe une courbe de la n° classe.

Si l'on avait éliminé k et α entre les équations (1″) en employant la méthode des déterminants, on aurait trouvé que le lieu de U se compose de l'hyperbole de Kiepert, indépendante du point L donné et de la droite (u). Cette introduction de l'hyperbole de Kiepert dans le lieu du point U provient de ce que un des points de base du faisceau auquel appartient la cubique (G), appartient à cette hyperbole.

4. Prenons maintenant sur les droites LM_1, LM_2, LM_3 (notations du § 1) les points Y_1, Y_2, Y_3 tels que

$$LY_1 = \frac{\rho^2}{LM_1}, \quad LY_2 = \frac{\rho^2}{LM_2}, \quad LY_3 = \frac{\rho^2}{LM_3}.$$

Les coordonnées des points Y_1, Y_2, Y_3 sont respectivement proportionnelles aux quantités

$$y_{11} = \lambda_1^2 - \rho^2 \sin^2\alpha, \quad y_{12} = \lambda_1\lambda_2 + \rho^2 \sin\alpha \sin(\alpha - A_3),$$
$$y_{13} = \lambda_1\lambda_3 + \rho^2 \sin\alpha \sin(\alpha - A_2); \quad \text{etc.}$$

Comme on a

$$y_{12} = y_{21}, \quad y_{13} = y_{31}, \quad y_{23} = y_{32},$$

les équations des droites A_1Y_1, A_2Y_2, A_3Y_3 sont

$$\frac{x_2}{y_{12}} = \frac{x_3}{y_{13}}, \quad \frac{x_2}{y_{22}} = \frac{x_1}{y_{12}}, \quad \frac{x_1}{y_{13}} = \frac{x_2}{y_{23}}.$$

Par suite, elles se coupent en un même point U dont les coordonnées sont définies par

$$\frac{m}{x_1} = \lambda_2\lambda_3 + \rho^2 \sin\alpha \sin(\alpha - A_1), \ldots$$

m étant un facteur de proportionnalité.

L'élimination de m et de ρ^2 entre ces trois équations donne le lieu de U :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{\lambda_1} & \sin(\alpha - A_1) \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{\lambda_2} & \sin(\alpha - A_2) \\ \frac{1}{x_3} & \frac{1}{\lambda_3} & \sin(\alpha - A_3) \end{vmatrix} = 0,$$

Ce lieu est une conique circonscrite au triangle de référence et passant par le point L et le point $\left(\frac{1}{\sin(\alpha - A_1)}, \cdots\right)$ de l'hyperbole de Kiepert.

Les développements de ce § se rapprochent de ceux que M Neuberg a donnés à l'occasion du point de Kariya (*Sur les hyperboles équilatères*, Mathesis (3), I, 1905)

En terminant, nous remercions M. Neuberg des conseils qu'il a bien voulu nous donner pour la rédaction de ce petit travail.

NOTES MATHÉMATIQUES.

81. *Sur la sécante minimum* (Voir *Mathesis*, p. 68). Voici deux autres manières de trouver la sécante minimum AB passant par un point donné M et limitée en A et B aux côtés d'un angle donné xCy.

a. J'appelle p et q les perpendiculaires abaissées de M sur Ox et Oy, et je prends pour variables les angles A et B du triangle ABC. La sécante ayant pour expression $\frac{p}{\sin A} + \frac{q}{\sin B}$, avec la condition $A + B + C = \pi$, la règle connue donne

$$\frac{p \cos A}{\sin^2 A} dA + \frac{q \cos B}{\sin^2 B} dB = 0, \quad dA + dB = 0,$$

de sorte qu'on doit avoir

$$\frac{p}{\sin A} \cot A = \frac{p}{\sin B} \cot B, \quad \text{ou} \quad AM \cot A = BM \cot B.$$

Ce résultat s'interprète facilement : les perpendiculaires élevées en A sur Ox et en B sur Oy interceptent des segments égaux à AM cot A, BM cot B sur la perpendiculaire en M sur AB; donc les trois perpendiculaires concourent en un même point.

b. Soit A'B' une sécante menée par M et infiniment voisine de la sécante minimum AB La variation de la longueur AB étant nulle, on a

$$BB' \cos B - AA' \cos A = 0.$$

Or, BB' : BM = sin M : sin B, AA' : AM = sin M : sin A ; tirant de là les valeurs de BB' et AA' pour les substituer dans l'équation de condition, on trouve

$$BM \cot B = AM \cot A.$$

Le pied C′ de la hauteur CC′ du triangle ABC étant l'isotomique de M est à l'intersection de la circonférence de diamètre CM avec l'hyperbole qui a pour asymptotes les droites CX, CY et passe par M.

(MALAISE, Liége)

×**33**. THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE. *Les points qui divisent dans un même rapport les droites qui joignent les sommets d'un parallélipipède* ABCD... *aux sommets homologues d'un second parallélipipède* A′B′C′D′... *sont les sommets d'un troisième parallélipipède.*

Soient ABCD, A′B′C′D′ deux parallélogrammes et A_1, B_1, C_1, D_1 les points qui divisent dans le rapport $k : 1$, les droites AA′, BB′, CC′, DD′. Je dis que $A_1B_1C_1D_1$ est un parallélogramme.

Prenons les points E, F qui divisent les droites CB′, DA′ dans le rapport $k : 1$. On voit facilement que les droites B_1E, A_1F sont égales et parallèles; par suite, A_1B_1EF est un parallélogramme et il en est de même de D_1C_1EF.

Les droites A_1B_1, D_1C_1 étant égales et parallèles à EF, $A_1B_1C_1D_1$ est un parallélogramme.

Lorsque nous opérons de même sur deux parallélipipèdes, les faces du polyèdre qui en résulte sont des parallélogrammes; donc le nouveau polyèdre est un parallélipipède

(C. D. CONSTANTINESCU, Plevna, Roumanie)

×**34**. *Sur quelques questions traitées dans Mathesis.* 1° Dans la question 1544 (1905, p. 256; 1906. p. 105). la droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ peut être remplacée par la droite joignant les projections de M sur BC, CA, AB sous un angle quelconque x; le triangle $A_1B_1C_1$ sera encore semblable au triangle ABC, le rapport de similitude est égal à $2\cos x$.

La 2ᵈᵉ partie conduit au théorème suivant :

Soient AA′, BB′, CC′ *trois cordes parallèles d'une circonférence,* M *un point quelconque de cette courbe. Les droites* AM, BM, CM *rencontrent respectivement les droites* B′C′, C′A′, A′B′ *en trois points d'une même parallèle à* AA′.

2° La question 1548 (1905, p. 256; 1906, p. 107) se déduit des considérations suivantes où l'on n'emploie que le premier Livre de Géométrie.

Si deux triangles ABC, A′B′C′ ont leurs côtés égaux, parallèlles et de sens contraires, leurs médianes sont égales, parallèles et de sens contraires.

Par suite, les droites joignant les sommets de ABC (A′B′C′) aux

milieux des côtés opposés de A'B'C' (ABC) se coupent en un même point H' (H) situé sur la droite qui joint les centres de gravité G, G' des deux triangles et H'G' = G'G = GH. Les droites AA', BB', CC' se coupent au milieu de GG'; les segments interceptés par l'angle BAC sur B'C' et par l'angle B'A'C' sur BC sont égaux.

3° L'article sur le *Triangle bordé de trois rectangles* (1906, p. 97) m'a suggéré la proposition suivante qui résulte très simplement de propositions connues :

Soit ABCDEF un hexagone tel que les côtés AB, CD, EF sont respectivement parallèles aux côtés opposés DE, FA, BC et doubles de ces côtés. Les diagonales AD, BE, CF se coupent mutuellement en trois parties égales (d'où un moyen de construire un tel hexagone); elles sont parallèles aux côtés opposés de l'hexagone et égales à FE + BC, DC + FA, AB + DE. Les triangles ACE, BDF ont même centre de gravité et même angle de Brocard que le triangle des diagonales principales et une aire sept fois plus grande; la somme des carrés des côtés de chacun de deux premiers triangles vaut sept fois la somme des carrés des côtés du dernier triangle. (A. C.)

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'Arithmétique commerciale à l'usage de l'Enseignement et du haut commerce, par MM. Th. Klompers, inspecteur de l'Enseignement moyen, et E. Fagnart, professeur de Comptabilité et de Science financière commerciales à l'Université de Gand, membre agrégé de l'Association des Actuaires belges. Anvers, V^e^ Van Ishoven, 1906 (In-8° de 458 pp.). Prix : 8 frs.

Aucun traité récent d'arithmétique commerciale n'avait à la fois donné aux *opérations en marchandises*, et aux *opérations de change et de Bourse* un développement en rapport avec leur importance. Cette lacune vient d'être heureusement comblée par l'ouvrage de MM. Klompers et Fagnart. Remarquons le toutefois : le *Traité d'Arithmétique commerciale* n'est pas le résultat de la collaboration des deux auteurs. La première partie est une seconde édition de l'*Arithmétique commerciale* de M. Klompers, tandis que les *Opérations de change et de Bourse* sont tirées du cours autographié de M. Fagnart : *Opérations financières à court terme* (p. 144-357). En réalité nous avons ici deux traités qui sont réunis en un volume sans doute dans l'intérêt et pour la plus grande commodité du lecteur (*).

(*) M. Klompers vient de publier un *Précis d'Arithmétique commerciale* (Anvers, Van Ishoven, 1907; 164 pp. in-8°), extrait des deux parties du Traité, avec le sous-titre : *Opérations en marchandises. Changes. Fonds publics. Actions et obligations.* (*Réd.*)

Dans la première partie, M. KLOMPERS, après avoir indiqué les méthodes abrégées de calcul, applique la théorie aux opérations commerciales : bonifications sur le poids et sur le prix, assurances sur les choses, quittances et effets de commerce, calcul de l'intérêt simple, escompte, échéance moyenne et commune, comptes courants et d'intérêts. Vient ensuite le calcul des nombres complexes et son application aux bordereaux d'escompte, au calcul du fret, à la règle conjointe. Cette partie du *Traité* se termine par des factures du haut commerce, comptes d'achat et de revient, consignations et comptes de vente, comptes simulés et tableaux de parités Peut-être aurait-il été avantageux de faire précéder les factures des données du problème. Certains même auraient voulu trouver dans un tel ouvrage une étude plus développée des tables de parités et des échelles de revient, ainsi que du marché à terme en marchandises.

La seconde partie, *Opérations de change et de Bourse*, est la plus intéressante et la plus instructive du Traité. Après la définition de la monnaie et de sa valeur dans les différents pays, M. FAGNART étudie les opérations de change direct et indirect, le nivellement des cours et les diverses valeurs mobilières. Les pages consacrées aux Bourses de Bruxelles, d'Anvers, de Paris, de Londres, d'Amsterdam, etc sont d'une grande précision et constituent un des plus remarquables chapitres de l'ouvrage. Après les opérations au comptant suit la théorie des opérations à terme. M FAGNART conduit ensuite son lecteur au Stock-Exchange de Londres où il lui explique les opérations à primes. Il revient aux opérations de report et de déport, l'initie aux spéculations à la hausse et à la baisse et lui apprend par le procédé graphique à reconnaître sa position, je veux dire, le gain ou la perte qui serait le résultat du marché conclu. Nous voilà naturellement amenés à l'étude de la liquidation. La spéculation en fonds publics n'est pas la seule possible; aussi, dans le chapitre sixième, l'auteur traite-il des affaires à termes en marchandises, ou de la spéculation en marchandises. Le dernier chapitre se rapporte à l'arbitrage sur les valeurs mobilières et sur lès marchandises

Ce traité de M. FAGNART apparaît, dans son ensemble, comme une sorte d'encyclopédie de science financière commerciale où aucune question vraiment importante n'a été négligée. Il a sa place marquée non seulement entre les mains des étudiants, mais il figurera avec honneur sur le bureau du financier qui le consultera volontiers et avec grand profit.

Ci-après la table des matières, qui permettra de se rendre compte plus en détail de l'utilité et du développement de ce *Traité*.

I. *Opérations en marchandises* 1. Abréviations et simplifications des opérations arithmétiques 2. Bonification sur le poids ou sur le prix. 3. Assurances sur les choses. 4. Encaissement de quittances et d'effets de commerce sur l'intérieur. 5. Calcul de l'intérêt simple. Méthodes commerciales. 6. Escompte d'effets de commerce sur l'intérieur. 7. Traites exactes. Echéances communes. Echéance moyenne 8. Mélanges, alliages et affinages. 9. Comptes courants et d'intérêts. 10. Nombres complexes. Conversion de monnaies et de poids. Bordereaux d'escompte tracés à Londres. Calcul de l'intérêt en Angleterre. 11. Recouvrement de valeurs et escompte d'effets sur l'étranger. 12. Calcul du

fret. 13. Règle conjointe. « Grain tables ». « Freight tables ». Calcul du fret par conjointe. 14 Facture du haut commerce. Compte d'achat et de revient. Consignations et comptes de vente. Comptes simulés et tableaux de parités.

II. *Opérations de change et de bourse.* 1. Matières d'or et d'argent. 2. Opérations de change. 3. Des valeurs mobilières. 4 Opérations de bourse. 5. Opérations de bourse à termes sur valeur mobilière. 6. Affaires à termes en marchandises. 7. Arbitrages. 8. Modification à la cote des changes de Paris, survenue pendant le tirage.

JEAN SCHUL, S J.,
professeur à l'Ecole supérieure de Commerce et de Finance,
annexée à l'Institut St-Ignace à Anvers.

Novaia Geometria treougolnika sostavill D. IÉFREMOF. Odessa, tipografia Chpentser, 1903 (In-8° de 350 pp.).

M. D. Iéfrémof, candidat en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'école des coloristes de l'Institut réal de Ivanovo-Vornesensk, a écrit cette *Géométrie récente du triangle*, pour le *Messager de physique expérimentale et de mathématiques élémentaires* d'Odessa, puis il l'a publiée à part dans l'ouvrage que nous annonçons. Il a consulté, pour le composer, les écrits sur la matière de Vigarié, Neuberg, Lalbalettrier, Poulain, Laisant, Emmerich, Casey, Maclelland, Nixon, Lachlan, Alasia, les *Exercices de Géométrie* de F. J., les articles de Brocard, Lemoine, etc, dans *Mathesis* et dans les autres recueils analogues.

La *Géométrie récente du triangle* de M. D. Iéfremof étant écrite en russe, nous ne pouvons la signaler qu'à ceux de nos lecteurs qui connaissent la langue de Gogol, de Tourguénief et de Tolstoï. Voici les titres des dix chapitres du livre : 1. Transversales et céviennes. 2. Ponctuelles et faisceaux. Polaires et axes radicaux. 4. Figures inverses. 5. Antiparallèles, isogonales et isotomiques. 6. Médianes et symédianes. 7. Figures semblables. 8. Triangles polaires. 9. Métapoles; quelques circonférences remarquables. 10. Quadrangles et polygones harmoniques. Chaque chapitre est suivi d'un certain nombre d'exercices. — Comme dans la *Géométrie récente* de Casey, les coniques n'interviennent pas dans le livre de M. Iéfrémof. — En bien des endroits, grâce aux équations et à la figure, on peut comprendre les démonstrations, sans s'inquiéter du texte russe.

Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques par EDOUARD A. FOUET, Professeur à l'Institut catholique de Paris. Deuxième édition, entièrement refondue. Tome I. Les fonctions en général. Paris, Gauthier-Villars, 1907 (Grand in-8° de XVI-112 pp. avec 6 fig.). Prix : 3 fr 50.

La première Partie de ces *Leçons*, bien qu'épuisée rapidement, a été refondue en entier : aussi cette seconde édition peut-elle être considérée comme un Ouvrage nouveau.

Après quelques considérations sur le nombre et la fonction, ce Volume renferme d'abord un exposé élémentaire, mais assez complet, de la théorie des *Ensembles* dont l'introduction systématique joue désormais un rôle essentiel

dans tant de branches de l'Analyse. La démonstration des théorèmes les plus simples relatifs soit aux fonctions discontinues, soit aux fonctions continues, conduit ensuite à diverses cassifications de ces fonctions : fonctions intégrables, à variation bornée, monotones, lipschitziennes, ponctuellement ou totalement discontinues, etc., fonctions de classe 0, 1, etc. On aborde enfin l'étude des fonctions d'une variable complexe analytiques soit dans le voisinage d'un point, soit dans un domaine. Aussi ce Tome préliminaire est-il devenu comme *une introduction à la Théorie générale des fonctions.*

A cette esquisse d'ensemble, parfois un peu large, succédera dans le reste de l'ouvrage une étude très précise des fonctions analytiques : les théories y seront exposées d une façon plus détaillée et plus élémentaire.

Lecțiuni de Algebrà superioarà pentru clasa VIII realà de N. Abramescu, Lic. în Matematici, Professor. Bucuresti, Ghita i. Nicolaevici, 1907 (In-8° cartonné de VIII-96 pp.).

Ces leçons d'algèbre supérieure, écrites en langue roumaine par l'un des plus zélés collaborateurs de *Mathesis*, contiennent la partie la plus élémentaire de la théorie des équations exposée d'une manière concise en onze chapitres. 1. Racines communes à deux équations. 2. Racines multiples. 3 Résolution d'une équation ayant des racines multiples. 4. Propriétés spéciales des équations à coefficients réels. 5. Séparation des racines. Théorème de Rolle. 6. Théorème de Descartes. 7. Résolution des équations numériques. Transformation des équations. Limite des racines. 8-9. Calcul des racines. 10. Résolution des équations transcendantes. 11. Elimination par les méthodes de Bézout, Sylvester et Cayley. Racines communes à deux équations. Équations à deux inconnues. — Chaque chapitre est suivi d'exercices.

Wilh. Fiedler. **Zum Gedächtnis George Salmons**, geboren 25. September 1819 in Dublin, gestorben ebenda 22 Januar 1904 (In-8° de XXII pp.) Prix : 0,40 marc.

Tiré à part de l'intéressante notice bibliographique que M. Fiedler a publiée en tête de la dernière édition allemande des Coniques de G. Salmon. Les trois ouvrages mathématiques de Salmon, les *Coniques*, les *Courbes planes* et la *Géométrie analytique de l'espace*, publiés dans les trois grandes langues scientifiques du monde, l'anglais, l'allemand et le français, sont universellement connues. On sait moins sur le continent qu'il a écrit divers livres de théologie, dont l'un, une *Introduction historique à l'étude du Nouveau Testament*, était l'ouvrage de prédilection de l'auteur et a eu un tel succès qu'il a été stéréotypé en 1891.

Eine neue Schrift des Archimedes von J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen in Kopenhagen. Leipzig, Teubner, 1907 (In-8° de 15 pp.). Prix : 1,60 marcs.

Traduction par M. Heiberg, commentaire par M. Zeuthen de l'écrit d'Archimède retrouvé par le premier en 1906 et dont nous avons déjà signalé l'importance, p. 232 de *Mathesis*. Archimède y fait connaître sa méthode d'invention

dans la recherche des aires, des volumes et des centres de gravité en faisant remarquer explicitement qu'elle doit être complétée, une fois les théorèmes trouvés, par des démonstrations géométriques. Il y regarde une aire comme une somme de lignes *parallèles*, un volume comme une somme d'aires *parallèles* comme Cavalieri dix-neuf siècles plus tard, et applique à ces sommes la théorie des moments avec beaucoup d'habileté.

Sur l'emploi de valeurs absolues dans la géométrie analytique par A. Söderblom. Göteborg, Zachresson, 1806 (In-4° de VI-174 pp.).

M. Söderblom, dans cet ouvrage, montre comment l'emploi du symbole $|x|$ pour désigner la valeur absolue de x, permet de représenter des régions limitées, des lignes brisées, des périmètres de polygones, des surfaces de polyèdres, des faisceaux de demi-droites, des points imaginaires en géométrie analytique. Exemple : $F(x, y) = |F(x, y)|$ représente, en général, la région limitée par la courbe $F(x, y) = 0$, d'un côté ou de l'autre. — Il est difficile de déterminer à priori si cette notation aidera les géomètres à faire de nouvelles découvertes.

Théorie et usage de la règle à calculs (Règle des Écoles — Règle Mannheim), par P. Rozé, Licencié ès sciences. Paris, Gauthier-Villars, 1907 (Gr. in 8° de IV-118 pp., avec 85 fig. et 1 pl.). Prix : 3 fr. 50.

La règle à calculs employée depuis plus d'un siècle, perfectionnée de façon remarquable en 1851 par le colonel Mannheim, alors sous-lieutenant à l'École d'application de Metz, s'est répandue peu à peu et a servi de modèle pour la construction d'un grand nombre d'autres règles spécialement ordonnées en vue des diverses applications. Un dernier perfectionnement, relativement récent, dû au professeur Tserepachinsky, a permis de rattacher chaque opération à une règle unique et, par suite, de décharger la mémoire du calculateur, qui, après un exercice suffisant, peut effectuer les opérations machinalement, sans effort.

Cette modification permet en même temps d'obtenir tous les résultats de calculs arithmétiques avec une précision double pour des instruments de mêmes dimensions.

La règle à calculs fournit immédiatement le résultat complet toutes les fois qu'on n'a pas besoin de plus de trois ou quatre chiffres significatifs exacts; une telle précision est très souvent suffisante. L'emploi de la règle est encore indiqué pour obtenir une vérification simple des premiers chiffres d'un résultat calculé d'une autre manière, et ainsi écarter les chances de quelque grosse méprise.

L'apprentissage indispensable pour pouvoir utiliser avec profit une règle à calculs exige quelques semaines.

Les instruments les plus répandus aujourd'hui sont : la règle Mannheim, telle qu'elle a été imaginée dès 1851, la règle des Écoles et la règle Beghin qui comportent toutes deux la modification Tserepachinsky.

M. Rozé décrit les deux premières dans cette Notice, et expose les règles de

calcul se rapportant à chacune d'elles (ch. II et ch. III). La graduation des échelles d'une règle à calcul est basée sur la théorie des logarithmes. M. Rozé expose la partie essentielle de celle-ci dans le premier chapitre de son opuscule. Le chapitre IV est consacré aux applications de la règle à calcul, le chapitre V au choix et à l'entretien d'une règle de ce genre. Une planche-frontispice représente la règle Mannheim et la règle des écoles.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1605.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 32).

Un angle droit OAM *tourne d'un mouvement uniforme autour de son côté* OA *supposé horizontal tandis que ce côté est animé d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe vertical* OZ. *Trouver les équations de la courbe engendrée par un point déterminé* M *du second côté du triangle mobile, celles de la tangente et du plan osculateur.*

Solution par M. G. Verheugen. Prenons dans le plan décrit par OA deux axes rectangulaires OX, OY. Posons $OA = a$, $AM = b$, l'angle $XOA = \varphi$, l'angle $(OZ, AM) = \psi$. Soient x, y, z les coordonnées de M; M' la projection de M sur le plan XOY, M_1 la projection de M' sur OX; soit encore l'angle $AOM = \theta$, on a

$$AM' = b \sin \psi = a \operatorname{tg} \theta.$$

Ensuite,

$$OM_1 = x = OM' \sin (\theta + \varphi) = \frac{a \sin (\theta + \varphi)}{\cos \theta}$$

$$= a \operatorname{tg} \theta \sin \varphi + a \sin \varphi = b \sin \psi \cos \varphi + a \sin \varphi.$$

$$M_1M' = y = OM' \cos (\theta + \varphi) = \frac{a \cos (\theta + \varphi)}{\cos \theta}$$

$$= a \cos \varphi - a \operatorname{tg} \theta \sin \varphi = a \cos \varphi - b \sin \psi \sin \varphi.$$

$$z = b \cos \psi.$$

Si nous supposons que le rapport des vitesses angulaires des vecteurs AM et OA soit m, on aura les équations de la courbe décrite par M en fonction du paramètre φ

$$x = a \sin \varphi + b \sin m\varphi \cos \varphi,$$
$$y = a \cos \varphi - b \sin m\varphi \sin \varphi,$$
$$z = b \cos m\varphi.$$

De là on déduit facilement

$$\frac{dx}{d\varphi} = -(y + mz\sin\varphi); \quad \frac{dy}{d\varphi} = x + mz\cos\varphi; \quad \frac{dz}{d\varphi} = -mb\sin m\varphi,$$

d'où les équations de la tangente

$$\frac{X - x}{-(y + mz\sin\varphi)} = \frac{Y - y}{x + mz\cos\varphi} = \frac{Z - z}{-mb\sin m\varphi}.$$

Ensuite,

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = m(am - 2z)\cos\varphi - (1 + m^2)x,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = m(am - 2z)\sin\varphi - (1 + m^2)y,$$

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} = -m^2z.$$

D'où l'équation du plan osculateur

$$0 = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ -(y + mz\sin\varphi) & x + mz\cos\varphi & -mb\sin m\varphi \\ m(am - 2z)\cos\varphi - (1 + m^2)x & m(am - 2z)\sin\varphi - (1 + m^2)y & -m^2z \end{vmatrix}$$

Remarques. 1. On voit immédiatement que la courbe cherchée se trouve sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2$$

car la longueur OM est constante.

2. L'élimination du paramètre est fort simple si les vitesses angulaires des vecteurs OA et AM sont les mêmes ($m = 1$). On a

$$x = \sin\varphi(a + b\cos\varphi),$$
$$y = a\cos\varphi - b\sin^2\varphi,$$
$$z = b\cos\varphi;$$

d'où

$$\cos\varphi = \frac{z}{b}, \quad \sin\varphi = \frac{x}{a + z}.$$

Les équations de la courbe deviennent

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2,$$
$$z^2 + az - by + b^2 = 0;$$

on pourrait de même trouver les équations de la tangente et du plan osculateur sans paramètre variable.

Solution par M. Abramescu. Prenons pour axe Ox la position de OA lorsque le plan OAM est horizontal, pour axe Oy la perpendiculaire au

plan Oxz. Soient : x, y, z les coordonnées de M ; a, b les longueurs OA, AM ; θ, φ les angles xOA, M'AM, M' étant la projection de M sur le plan Oxy; enfin ω, ω' les vitesses angulaires de OA, AM. Nous aurons $\theta = \omega t$, $\varphi = \omega' t$, t étant le temps.

On trouve facilement

$$z = M'M = AM \sin \varphi = b \sin \varphi, \quad AM' = b \cos \varphi.$$

En projetant le contour AOM' sur Ox et Oy, on obtient

$$x = a \cos \theta + AM' \sin \theta, \quad y = a \sin \theta - AM' \cos \theta.$$

Par conséquent, les coordonnées de M en fonction du temps t sont

$$x = a \cos \omega t + b \cos \omega' t \cdot \sin \omega t,$$
$$y = a \sin \omega t - b \cos \omega' t \cdot \cos \omega t,$$
$$z = b \sin \omega' t.$$

Le point M se meut sur la sphère de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$, entre les parallèles $z = b$, $z = -b$; il décrit une épicycloïde sphérique. La projection horizontale de la trajectoire a pour équation $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \cos^2 \omega' t$; elle est comprise entre les deux circonférences $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

M. Abramescu cherche les équations de la tangente et du plan osculateur comme dans la solution de M. Verheugen. Peut-on trouver ces éléments géométriquement?

Autre solution par M. Fr. Dupont.

Questions ×1610 et 1612.

(Voir *Mathesis* (3), VII, pp. 56 et 88)

1610. *Un rayon* OM *de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC *rencontre les côtés en* A', B', C'. *Démontrer que les projections* A'', B'', C'' *de* A', B', C' *respectivement sur les droites* AM, BM, CM *appartiennent à la droite de Simson de* M. (A. Gob)

1612. *Une corde* MM' *de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC *rencontre les côtés* BC, CA, AB *aux points* A', B', C'. *Les parallèles menées par* A' *à* AM', *par* B' *à* BM', *par* C' *à* CM, *rencontrent respectivement* AM, BM, CM *en trois points collinéaires* α, β, γ. *De même, les parallèles par* A' *à* AM, *par* B' *à* BM, *par* C' *à* CM, *rencontrent respectivement* AM', BM', CM' *en trois points collinéaires* α', β', γ'.

Lorsque la corde MM' *se déplace en restant de longueur constante, les*

droites $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ font entre elles un angle constant, sont des transversales réciproques du triangle ABC *et enveloppent deux hypocycloïdes à trois rebroussements égales entre elles.* (A. Gob)

Solution par M. Abramescu. Nous démontrons d'abord la question 1612; la question 1610 s'en déduit aisément. Supposons le point M entre B et C, M′ entre B et A, plus près de A. L'angle $M\gamma C'$ est égal à MCM′ comme correspondant, donc sa mesure est l'arc $\frac{1}{2}$MBM′; de même, les angles $M\beta B_0'$ (B_0' étant sur le prolongement de $B'\beta$) et $M\alpha A'$, égaux aux angles MCM′ et MAM′ ont même mesure $\frac{1}{2}$ arc MBM′. Donc les angles $M\gamma C'$, $M\beta B_0'$, $M\alpha A'$ ont même valeur x et même mesure $\frac{1}{2}$ arc MBM′. Soient A_1, B_1, C_1 les points où $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ coupent les côtés BC, CA, AB. Considérons le point B_1 et les triangles $MC'\gamma$, MAB_1; angle $MC'\gamma$ = MM′C = MAC. Donc ces triangles ont même sommet M, les sommets C et A sur une même droite BA, les sommets C et B_1 sur la droite $x\gamma$ et les angles des sommets C′ et A égaux; par suite, d'après la réciproque d'un théorème (si un triangle varie en restant semblable à un triangle donné, ayant même sommet M, un sommet C′ décrivant la droite BA, l'autre sommet décrit une droite $\alpha\gamma$), les triangles $MC'\gamma$, MAB_1 sont semblables; donc angle $MB_1A = M\gamma C'$. Par conséquent, l'angle sous lequel MB_1 coupe la droite AC est égal à α. De même, les angles sous lesquels MA_1 et MC_1 coupent BC et AB sont égaux à α.

Donc, M étant un point du cercle ABC, les droites MA_1, MB_1, MC_1 coupent les côtés du triangle ABC sous un même angle α; par suite, les points A_1, B_1, C_1 sont sur une même droite P_α, *pédale oblique d'angle α de* M à laquelle appartiennent aussi les points α, β, γ.

On verra de même, que les points α', β', γ' sont sur une même *pédale oblique* p_α', d'angle égal à α.

Si MM′ est un diamètre du cercle ABC (question 1610), on a $\alpha = 90°$ et p_α est la droite de Simson de M.

Pour trouver les directions des pédales $\alpha\beta\gamma \equiv p_\alpha$, $\alpha'\beta'\gamma' \equiv p_\alpha'$, menons par M et M′ deux droites qui fassent avec AC le même angle α de mesure $\frac{1}{2}$M′BM = MCM′, et soient B et B_1' les points où elles coupent AC, B_2 et B_2' les points où elles rencontrent de nouveau le cercle ABC. On sait que les pédales p_α et p_α', sont parallèles à BB_2 et BB_2'; donc leur angle est B_2BB_2', qui a pour mesure $\frac{1}{2}$(arc B_2M + arc $M'ACB_2$). Les angles $B_2'B_1'C$ et M′AM étant égaux, on a *arc* $B_2'BMC$ — M′A = M′B_2'BM;

donc $B_2'M'A = MB_2C$; de même, *angle* $MB_1A = M'AM$, d'où $M'A = B_1C$ et, par suite, *arc* $MB_2 = M'B_2'$. Donc *arc* $B'AB_2 = M'AM$; d'où l'on conclut que l'angle des pédales p_α et p'_α est constant, égal à $\pi - \alpha = c^{te}$, parce que MM' est de longueur constante. Comme *arc* $M'A = B_2C$, les triangles $M'AB_1'$, B_2CB_1 sont égaux comme ayant les angles $M'B_1'A = B_2BC = \alpha$, $M'AB_1' = B_2CB_1$, $M'A = B_2C$; donc $AB_1' = CB_1$, ce qui montre que les points B_1', B_1 sont isotomiques par rapport à AC. Par conséquent, les points A_1', B_1', C_1' étant isotomiques des points A_1, B_1, C, par rapport aux côtés du triangle ABC, les droites $A_1B_1C_1 \equiv \alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma' \equiv A_1'B_1'C_1'$ sont des transversales réciproques.

Si M se déplace sur le cercle ABC, on sait que la pédale p_α enveloppe une *hypocycloïde* $\mathfrak{H}_\alpha$ à trois rebroussements tritangente à ABC (*Note sur l'hypocycloïde* par A. Gob, p. 10); de même, la pédale p'_α enveloppe une hypocycloïde $\mathfrak{H}'_\alpha$; les angles des pédales p_α et p'_α étant égaux, les hypocycloïdes $\mathfrak{H}_\alpha$ et $\mathfrak{H}'_\alpha$ sont égales.

La première partie de la question 1612 a été également résolue par M. Constantinescu (Ploesti).

×Question 1613.

(Voir *Mathesis*, (3). VII. p. 88).

Discuter le système

$$x + y + \lambda z = a,$$
$$2x - 3y - 2\lambda z = b,$$
$$ax + by + z = \lambda;$$

(a, b) étant les coordonnées d'un point du plan, interpréter les résultats.

(Abramescu)

Solution par M. J. Rose. 1° Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & -3 & -2\lambda \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \lambda(a + 4b) - 5$$

n'est pas nul, le système d'équations admet un seul système de valeurs finies pour x, y, z. Cela revient à dire que si le point (a, b) n'est pas situé sur la droite $x + 4y = \frac{5}{\lambda}$, le système a une solution finie et déterminée.

Cette condition étant réalisée, x sera nul si λ est racine de

$$\lambda^2 + b(2a + b)\lambda - (3a + b) = 0.$$

De même, $y = 0$ si λ est racine de

$$4\lambda^2 - a(2a + b)\lambda - (2a - b) = 0$$

et $z = 0$, si

$$5\lambda = 3a^2 + 3ab - b^2.$$

2° Soit $\lambda = \frac{5}{a + 4b}$; comme le mineur $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ n'est pas nul, les deux premières équations peuvent être résolues par rapport à x et y.

En substituant les valeurs de x et y dans la troisième équation, on trouve pour la condition de compatibilité

$$3a^2 + 3ab - b^2 - 5\lambda = 0$$

ou, en remplaçant λ par sa valeur,

$$(3a^2 + 3ab - b^2)(a + 4b) - 25 = 0.$$

Donc si $\lambda = \frac{5}{a + 4b}$, pour que les équations soient compatibles, il faut que (a, b) soit un point de la cubique

$$(3x^2 + 3xy - y^2)(x + 4y) - 25 = 0. \qquad (1)$$

Il existe alors une infinité de valeurs de x, y, z vérifiant les trois équations dont l'une est une conséquence des deux autres.

Cas particuliers. 1° $\lambda = 0$, on trouve pour x, y, z un seul système de valeurs finies.

2° $\lambda = a = b = 0$, le seul système satisfaisant est $x = y = z = 0$.

3° $\lambda = a = b = 1$, les trois équations se réduisent à deux; il y a une infinité simple de systèmes de solutions. Ce résultat était à prévoir, car la relation $\lambda = \frac{5}{a + 4b}$ est vérifiée et le point $(1, 1)$ est un point de la cubique (1).

Question 1621.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 144).

Trouver la limite de

$$y = \left(\frac{n^m}{n^m - 1}\right)^{\cot\left(\frac{a}{n}\right)^m}$$

pour $n = \infty$. *On suppose* m *positif.* (ABRAMESCU)

Solution par M. V. RETALI. En posant $n = \frac{1}{x}$, on peut écrire

$$y = e^{-\cot(ax)^m \log.(1 - x^m)},$$

Il s'agit donc de trouver la limite, pour $x = 0$, de l'exposant

$$\frac{-\log.(1-x^m)}{\operatorname{tg}(ax)^m};$$

le quotient des dérivées par rapport à x, des deux termes de cette fraction est :

$$\frac{\dfrac{1}{1-x^m}\cdot mx^{m-1}}{ma\operatorname{tg}(ax)^{m-1}\sec^2(ax)} = \frac{\cos^2(ax)}{a^m(1-x^m)}\cdot\left(\frac{ax}{\operatorname{tg}.ax}\right)^{m-1},$$

dont la limite pour $x = 0$ est $\frac{1}{a^m}$. La limite cherchée est donc $e^{\frac{1}{a^m}}$.

M. Listray (Namur) écrit

$$\lim y = \lim\left(1+\frac{1}{n^m-1}\right)^{(n^m-1)\frac{\cot\left(\frac{a}{n}\right)^m}{n^m-1}}$$

$$= e^{\lim\frac{\cot\left(\frac{a}{n}\right)^m}{n^m-1}}$$

et applique la règle de l'Hopital à l'exposant après avoir posé $n = \frac{1}{x}$.

M. Hernandez écrit

$$ly = \frac{l\left[\frac{1}{1-n^{-m}}\right]}{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{n}\right)^m}, \quad \text{etc.}$$

M. Verheugen suit la même méthode après avoir posé $\frac{1}{1-n^{-m}} = 1+\alpha$, d'où $n^{-m} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$. M. Agronomoff opère sur l'expression

$$\frac{1}{y} = \left(1-\frac{1}{n^m}\right)^{\cot\left(\frac{a}{n}\right)^m}.$$

M. Van Dinter observe que les infiniments petits $\operatorname{tg}\left(\frac{n}{a}\right)^m$, $\left(\frac{n}{a}\right)^m$, dont le rapport a pour limite 1, peuvent se substituer l'un à l'autre; donc

$$\lim ly = \lim\left(\frac{n}{a}\right)^m l\frac{n^m}{n^m-1} = -\lim\frac{n^m}{a^m}l\left(1-\frac{1}{n^m}\right)\cdot$$

$$= -\lim\frac{1}{a^m}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^m}\cdots\right) = \frac{1}{a^m}\cdot$$

Il arrive encore plus rapidement à ce résultat en écrivant

$$\lim y = \lim\left[\left(1-\frac{1}{n^m}\right)^{-n^m}\right]^{a^{-m}} = e^{a^{-m}}.$$

M. Cartuyvels emploie les développements en série de $\log \frac{1}{1-x}$ et $\operatorname{tg} x$ où il remplace x respectivement par $\frac{1}{n^m}$ et $\left(\frac{a}{n}\right)^m$.

Autre solution par M. Seam.

Solution élémentaire. On sait que, pour $k = \infty$,

$$\lim\left(1+\frac{1}{k}\right)^{kr} = e^{\lim r}.$$

En posant $k = n^m - 1$, on a

$$r = \frac{\cot\left(\frac{a}{n}\right)^m}{n^m - 1} = \cos\left(\frac{a}{n}\right)^m \cdot \frac{\left(\frac{a}{n}\right)^m}{\sin\left(\frac{a}{n}\right)^m} \cdot \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n^m}}$$

dont la limite, a^{-m}, se trouve immédiatement sans faire intervenir la règle de l'Hopital.

Question 1628.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 168.)

On donne deux plans α, β et une droite m. D'un point quelconque M *de m on abaisse sur α et β les perpendiculaires* MA, MB. *Démontrer que la droite* AB $\equiv g$ *engendre un paraboloïde hyperbolique.*

Réciproquement, tout paraboloïde réglé peut être engendré ainsi d'une infinité de manières. (J. Neuberg)

Solution par M. V. Retali. Appelons a, b les projections de m respectivement sur α et β : le plan variable MAB, perpendiculaire à la droite $\alpha\beta$, coupe a et b suivant deux ponctuelles semblables a(A, ..). b(B, ...); donc, les droites AB sont des génératrices, appartenant à un même système, du paraboloïde hyperbolique ayant pour génératrices de l'autre système les deux droites a, b et la droite à l'infini des plans perpendiculaires à la droite $|\alpha\beta|$.

Réciproquement, étant donné un paraboloïde hyperbolique, prenons trois génératrices d'un même système a, b, c^∞, parmi lesquelles celle à l'infini : menons d'abord par a et b respectivement les plans α et β perpendiculaires à ceux qui passent par c^∞, (ou au second plan directeur) et ensuite menons par a et b les plans α', β' respectivement perpendiculaires à α et β. Les droites qui unissent les projections sur les

droites a, b, d'un point variable de la droite $m \equiv \alpha'\beta'$, sont les génératrices du deuxième système du paraboloïde; cette surface peut donc être engendrée de la façon indiquée d'une double infinité de manières.

Solution analogue par MM. Hacken, Rose, Van Dinter; solution analytique par M. Abramescu.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1365. Chercher pour les équations

$$6x^3+5x^2+4x-3424=0,\quad 4x^3+6x^2+2x-3420=0,$$
$$3x^3+4x^2+2x-3420=0,\quad 2x^3+6x^2+x-3421=0,$$
$$x^3+11x^2+9x-3420=0,\quad x^3+7x^2+3x-3419=0,$$
$$x^3+3x^2+6x-3416=0,\quad x^3+3x-3420=0,\quad 13x^3+6x-3424=0.$$

qui proviennent de l'écriture du nombre 3427 dans les systèmes de numération à base 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, les racines autres que cette base. (E. N. Barisien)

1366. Soient M_a, M_b, M_c les milieux des côtés du triangle ABC, et M'_a, M'_b, M'_c les pieds des symédianes. Démontrer la relation

$$\frac{\text{aire } M_aM_bM_c}{\text{aire } M'_aM'_bM'_c} = \frac{AM_a.BM_b.CM_c}{AM'_a.BM'_b.CM'_c}.$$

(Vercellin)

1367. Résoudre l'équation

$$8\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-5x^2+3x+3} = 125.$$

(Cutore)

L'équation se ramène à $x^3-5x^2+3x+6=0$ et a pour racines 2, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{21})$.

1368. La perpendiculaire élevée au milieu B' du côté AC du triangle ABC rencontre AC en B'', et celle qui est élevée au milieu C' du côté AB rencontre AB en C''. Démontrer que les points B, C, B'', C'' et le centre O du cercle ABC sont sur une même circonférence, de rayon $\frac{a}{\sin 2A} = \frac{R}{\cos A}$. Cette circonférence et la circonférence circonscrite au triangle AB''C'' sont égales. Examiner le cas particulier de $A = 45°$. (Ferrari Fabio)

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1641**. Les nombres

$$N = 17^2 - 3, \quad N_1 = (17^2+1)^2 - 3, \quad N_2 = [(17^2+1)^2+1] - 3,$$
$$N_3 = \{[(17^2+1)^2+1]^2+1\}^2 - 3, \ldots$$

dont la loi de formation est bien nette, sont tous multiples de 13, et les nombres N_1, N_2, N_3, ... sont divisibles par le premier, N. (BARISIEN)

1642. On considère une droite m et deux points A, B non situés dans un même plan avec m. Soit C un point quelconque de m. Par A on mène un plan α perpendiculaire à la droite BC, et par B un plan β perpendiculaire à la droite AC. L'intersection des plans α et β engendre un paraboloïde hyperbolique.

Réciproquement, tout paraboloïde réglé admet ce genre de génération; comment peut-on choisir A, B et m?

Trouver le lieu de l'orthocentre du triangle ABC.

Examiner le cas particulier où les droites AB et m sont perpendiculaires l'une à l'autre (J. NEUBERG)

×**1643**. 1° Si les droites qui joignent chaque sommet d'un triangle ABC à la projection du centre de gravité G sur le côté opposé, concourent en un même point, on a la relation

$$(a + b\cos C)(b + c\cos A)(c + a\cos B)$$
$$= (a + c\cos B)(b + a\cos C)(c + b\cos A).$$

2° Si on remplace G par le point de Lemoine K, on a la relation

$$(a\cos C + b)(b\cos A + c)(c\cos B + a)$$
$$= (a\cos B + c)(b\cos C + a)(c\cos A + b).$$

(E. N. BARISIEN)

1644. La normale en un point M d'une parabole rencontre l'axe en N; les deux autres normales menées par M ont leurs points d'incidence en P et Q. Démontrer qu'il existe une parabole inscrite au triangle MPQ, de même axe que la première et de foyer N. (G. GÉRARD)

1645. Intégrer l'équation $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$

$$ap^3 + bp^2 = (3ay + 2bx + c)^2.$$

Rectifications. Page 166, ligne 5 en remontant, lire $\sqrt{x+1}$ au lieu de $\sqrt{x-1}$. — Page 175, ligne 23, au lieu de Vlack, lire Vlak. — Page 232, supprimer la croix à la question 1639 et la mettre à la question 1649.

NOTES ANALYTIQUES ET HISTORIQUES,

par M. A. Aubry.

(*Suite*, voir pp. 62 et 164).

12. On emploie souvent la propriété de la différence de deux carrés pour décomposer immédiatement en un produit de deux facteurs :

1° On a : $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$. Le second membre sera une différence de deux carrés si $A=a^2$ et $B=2b^2$, alors il vient :

$$a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab). \qquad (11)$$

De là on déduit, avec Sophie Germain, qu'aucun nombre a^4+4, sauf 5, n'est premier.

2° Développons le produit $(x^2+ax+b)\ (x^2-ax+b)$, posons $a=\sqrt{2b}$ et changeons x en $x\sqrt{2b}$; on aura cette identité d'Euler, retrouvée par Catalan,

$$4x^4+1=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1), \qquad (12)$$

qui donne, pour $x=2^n$, une autre identité d'Euler, découverte à nouveau par Le Lasseur.

Catalan a trouvé de la même manière la relation

$$3^{6n+3}+1=(3^{2n+1}+1)(3^{2n+1}+3^{n+1}+1)(3^{2n+1}-3^{n+1}+1). \qquad (13)$$

3° Changeons le produit $(Ax^2+Bx^2+Cx+D)(Ax^2-Bx^2+Cx-D)$ en une différence de deux carrés et identifions-le à x^6-1; on trouve $A=D=1$, $2C-B^2=0$, $C^2-2B=0$, d'où $B=C=2$. L'identité ainsi obtenue est due à A. Boutin.

4° On a identiquement $(1+x+x^2)^2-2x(1+x)^2=1-x^2+x^4$. Faisant $x=2a^2$, on en déduira la décomposition de $1-4a^4+16a^8$ en deux facteurs. En particulier, si $a=2^n$, on obtiendra une identité numérique donnée par Ed Lucas.

13. On se sert beaucoup de la méthode des coefficients indéterminés. Voici quelques exemples :

1° Soit à développer $\dfrac{x^n}{(x-a)(x-b)\dots}$ en une suite de la forme $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\cdots$ Avec Euler, on multipliera par $x-a$ les deux

membres de l'égalité et on fera $x = a$, ce qui donnera :

$$A = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)\dots}, \text{ et de même } B = \frac{b^n}{(b-a)(b-c)\dots}, \dots \quad (14)$$

On pourrait généraliser, en remplaçant x^n par un polynome quelconque, et les facteurs $x - a, \dots$ par leurs puissances **Mais pour ce** cas, on a des méthodes plus expéditives dues à **Leibniz et à Jean** Bernoulli.

2° Posons, d'après Stirling,

$$F(n) = (1+x)(1+2x)\cdots[1+(n-1)x] = 1 + A_n x + B_n x^2 + \cdots$$

il viendra, en changeant x en $x+1$,

$$F(n+1) = (1+nx)F(n),$$

d'où, en développant et identifiant,

$$A_{n+1} = A_n + n, \quad B_{n+1} = B_n + nA_n, \dots \quad (15)$$

Stirling décompose de même x^n en une suite de la forme

$$Ax + Bx(x-1) + Cx(x-1)(x-2) + \cdots$$

et donne beaucoup de sommations très remarquables, entre autres celles-ci :

$$\Sigma_1^n[a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2) + \cdots]$$
$$= an + n(n-1)\left[\frac{b}{2} + \frac{c(n-1)}{3} + \frac{d(n-1)(n-2)}{4} + \cdots\right],$$

$$\Sigma\left[\frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + \cdots\right]$$
$$= \frac{a}{n} + \frac{b}{2n(n+1)} + \frac{c}{3n(n+1)(n+2)} + \cdots$$

3° Avec Euler, posons

$$(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\cdots = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots.$$

changeons x en ax dans le second membre et égalons le résultat à ce même second membre multiplié par $(1+ax)$; il viendra :

$$A = \frac{a}{1-a}, \quad B = \frac{a^3}{(1-a)(1-a^2)},$$
$$C = \frac{a^6}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}, \quad D = \frac{a^{10}}{(1-a)\cdots(1-a^4)}, \dots \quad (16)$$

Il trouve de même

$$\frac{1}{(1-ax)(1-a^2x)\dots} = 1 + \frac{ax}{1-a} + \frac{a^2x}{(1-a)(1-a^2)} + \frac{a^3x}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)} + \dots \qquad (17)$$

14. Voici une autre théorie, due à Euler, et basée sur cette remarque que deux quantités en partie irrationnelles, de la forme $A + \sqrt{B}$, ne peuvent être égales que si les parties rationnelles sont égales entre elles, de même que les parties non rationnelles.

Soit $(a+\sqrt{b})^k = A_k + B_k\sqrt{b}$, A_k et B_k désignant des fonctions de a, b et k. On peut, sans employer la formule du binome, comme Euler, démontrer que $(a-\sqrt{b})^k = A_k - B_k\sqrt{b}$ (*). De là l'identité

$$(a^2-b)^k = A_k^2 - bB_k^2. \qquad (18)$$

Les expressions A_k et B_k se calculent au moyen des récurrences d'Euler

$$A_{k+1} = aA_k + bB_k, \quad B_{k+1} = A_k + aB_k, \qquad (19)$$

$$A_{k+1} = 2aA_k - (a^2-b)A_{k-1}, \quad B_{k+1} = 2aB_k - (a^2-b)B_{k-1}. \qquad (20)$$

Genocchi a trouvé les suivantes :

$$A_{2k} = A_k^2 + bB_k, \quad B_{2k} = 2A_kB_k. \qquad (21)$$

15. La considération des racines des équations conduit à de nombreuses identités.

1° Soient α et β les racines de l'équation $x^2 - ax + b = 0$; en posant

$$X = xx' - byy', \quad Y = xy' + yx' + ayy',$$

et en remarquant que $\alpha^2 = a\alpha - b$, on aura :

$$(x+\alpha y)(x'+\alpha y') = X + \alpha Y.$$

(*) En posant $(a-\sqrt{b})^k = A' + B'\sqrt{b}$, on verra que pour $k=2$, on a $A' = A$ et $B' = -B$, et que si la chose est vraie pour $k = h$, elle l'est pour $k = h+1$. Elle est donc générale.

Autrement De ce que $x^k - y^k$ est divisible par $x - y$, il suit que $A - A' = 0$. D'ailleurs le développement de $(a+\sqrt{b})^k$ $(a-\sqrt{b})^k$ est rationnel, ce qui conduit à poser $B + B' = 0$.

Il suit de là que si F désigne une fonction entière, la relation $F(a+\sqrt{b}) = A + B\sqrt{b}$ entraîne cette autre $F(a-\sqrt{b}) = A - B\sqrt{b}$.

Comme $(x+\alpha y)(x+\beta y) = x^2 + axy + by^2$, on conclura que

$$(x^2+axy+by^2)(x'^2+ax'y'+by'^2) = (X+\alpha Y)(X+\beta Y) = X^2+aXY+bY^2 \quad (23)$$

et par suite que *le produit de deux facteurs de la forme* $x^2+axy+by^2$ *est de la même forme* (Lagrange).

2° Appelons a et b les racines de l'équation $x^2 - Px + Q = 0$ et posons

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}, \quad V_n = a^n + b^n, \quad \Delta = P^2 - 4Q;$$

on aura :

$$\begin{gathered} U_{2n} = U_n V_n, \quad U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n, \quad V_{n+2} = PV_{n+1} - QV_n, \\ V_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} = Q^{n-1}, \quad V_n^2 - V_{n-1}V_{n+1} = -\Delta Q^{n-1}, \\ U_{n+1}^2 - QU_n^2 = U_{2n+1}, \quad V_n^2 - \Delta U_n^2 = 4Q^n, \\ V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n, \quad 2U_{m+n} = U_m V_n + U_n V_m. \end{gathered} \quad (33)$$

Ed. Lucas, l'auteur de cette théorie, en a tiré d'importantes conséquences pour l'arithmétique.

16. Euler a montré le rôle que jouent les imaginaires comme origine de certaines identités, démontrées seulement jusque là à posteriori. Ainsi, de l'identité évidente

$$a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$$

on tire, en quarrant, cette relation d'Euclide

$$(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2. \quad (34)$$

On décomposera de la même façon et de plusieurs manières, les expressions

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)(*), \quad (a^2+b^2)^2, \quad (a^2+b^2)^4, \ldots$$

en sommes de deux carrés, et $(a^2+kb^2)(\alpha^2+k\beta^2)$ en une expression de la forme x^2+ky^2. On obtiendra ainsi quatre identités bien connues et dues, la première à Fibonacci et les autres à Euler.

Catalan a fait connaître une transformation d'un carré en une somme de trois carrés et plusieurs autres transformations du même genre.

Comme dernier exemple, faisons avec Hermite,

$$\begin{gathered} a = q+ri, \quad b = -s+ti, \quad c = u+vi, \quad d = -x+yi, \\ \alpha = s+ti, \quad \beta = q-ri, \quad \gamma = x+yi, \quad \delta = u-vi, \end{gathered}$$

(*) On fait le produit des deux expressions $(a+bi)(\alpha \pm \beta i)$ et $(a-bi)(\alpha \mp \beta i)$.

dans (4); on obtiendra une identité permettant de conclure, avec Euler, que *le produit de la somme de quatre carrés par une somme de quatre carrés est lui-même une somme de quatre carrés.*

87. La théorie des combinaisons est une source indéfinie d'identités importantes ainsi que celles qui s'y rattachent : factorielles, nombres figurés, sommation de puissances, formule du binome, formule de Vandermonde, différences successives, suites récurrentes, déterminants, fonctions symétriques, calcul symbolique, théorie des fonctions entières, etc. Mais nous avons voulu rester dans les Éléments.

Toutefois on peut croire que ce serait un travail des plus utiles que de réunir les identités les plus typiques parmi celles qui ont été proposées dans les divers recueils mathématiques : il nous sera peut-être donné d'essayer de remplir ce programme un jour.

VARIÉTÉS.

Sur l'histoire des conchoïdes,

par M. F. Rudio (Zurich).

Extrait d'une lettre à M. Mansion.

Note préliminaire. M. Neuberg a publié en 1885, dans *Mathesis*, t. V, pp 89-92, une étude sur la courbe

$$r = \frac{a \sin \theta}{\theta},$$

remarquée dès 1857 par Catalan, et appelée *cochléoïde* par MM. Falkenburg et Benthem. Cette courbe est l'inverse de la *quadratrice*

$$r = \frac{a\theta}{\sin \theta}.$$

Nous avons ajouté à l'article de M. Neuberg la note suivante : « Il est assez curieux que, dans l'antiquité, Apollonius ait donné à la *quadratrice* le nom de sœur de la *cochloïde*. La cochloïde des anciens, que l'on a cru jusqu'à présent identique à la conchoïde de Nicomède, serait-elle la courbe de M. Catalan et de M. Falkenburg ? » [En grec, κόχλος à la même signification que κόγχος, conque ou coquille, de manière que *conchoïde*, *cochloïde*, *cochléoïde* sont synonymes]. (P. M.)

« A l'article de M. Neuberg sur la *Cochléoïde* (*Mathesis*, V, p. 92) vous avez ajouté en note qu'Apollonius a déjà désigné la quadratrice comme sœur de la cochloïde. Cette remarque s'appuie sur un passage de Jamblique dans son commentaire, malheureusement perdu, sur les *Catégories d'Aristote*. Ce passage nous a été conservé par Simplicius, à la fois dans son commentaire sur les

Catégories et dans celui sur la *Physique* d'Aristote. Aux deux endroits on lit (*) : « Mais plus tard, ARCHIMÈDE avec la spirale, NICOMÈDE avec la courbe que l'on appelle proprement quadratrice, APOLLONIUS avec une certaine ligne que lui-même appelle une *Sœur d'une conchoïde* — mais elle est la même que celle de NICOMÈDE, — KARPUS avec une certaine courbe qu'il appelle simplement *produite par un double mouvement*, et encore beaucoup d'autres ont résolu de diverses manières le problème (de la quadrature du cercle).

On peut se demander si les mots « mais elle est la même que celle de NICOMÈDE » se rapportent nécessairement à la *quadratrice*. Cela signifierait qu'APOLLONIUS a réinventé la quadratrice ou qu'il a trouvé nécessaire de lui donner un nouveau nom. Mais, d'après ce que nous savons par PAPPUS de DINOSTRATE, de sa quadratrice et de l'origine de ce nom (τετραγωνίζουσα), cette double conjecture à propos d'Apollonius doit être écartée. D'ailleurs comment serait-il arrivé à cette appellation de sœur de la conchoïde, même s'il n'avait pas connu la courbe par les écrits antérieurs? La quadratrice ressemble si peu à une conchoïde. Il est vrai que l'article de M. Neuberg signale une relation entre la quadratrice et la cochléoïde; cependant on ne peut admettre que cette relation ait été connue des anciens, même en faisant abstraction de ce que nous ignorons si cette cochléoïde a été connue *le moins du monde* dans l'antiquité.

Je suis plutôt porté à croire que les mots « elle est la même que celle de NICOMÈDE » ne se rapportent aucunement à la quadratrice, mais plutôt à une conchoïde de NICOMÈDE. Le nom de ce mathématicien est tellement lié aux conchoïdes qu'aux mots « celle de NICOMÈDE »: on pense immédiatement et spontanément à ces courbes. Il paraît donc qu'APOLLONIUS s'est déjà servi d'une ligne de cette espèce, et non de la quadratrice à laquelle, c'est peu probable, il aurait donné le nom de *sœur de la conchoïde*. Il est vrai que nous n'avons aucun renseignement sur la nature spéciale de cette ligne d'APOLLONIUS et sur son emploi dans la quadrature du cercle. Il en est de même de la ligne de KARPUS. On peut supposer qu'elles se trouvent dans le livre d'Apollonius περὶ τοῦ κοχλίου, livre qui a été perdu et dont PROCLUS nous a conservé au moins le titre (PROCLUS, sur EUCLIDE 105,6). Remarquons que, si la conchoïde ordinaire dont NICOMÈDE se servait dans les problèmes de la duplication du cube et de trisection de l'angle, est algébrique, PAPPUS (PAPPI *Collect.*, éd. HULTSCH, I, 224) fait observer qu'il y a une seconde, une troisième et une quatrième conchoïde qui ont servi dans d'autres problèmes. »

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**34.** *Sur quelques relations dans le triangle rectiligne.* 1. Des formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \quad \ldots,$$

(*) RUDIO. Der Bericht des SIMPLICIUS über die Quadraturen des ANTIPHON und des HIPPOCRATES. Leipzig, 1907, p. 45 et p. 112.

déduit aisément, en observant que $4S = 2bc \sin A$, ... :

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{\cot C} = \frac{b^2+c^2-a^2}{\cot A} = \frac{c^2+a^2-b^2}{\cot B} = 4S = \frac{\Sigma a^2}{\Sigma \cot A}, \quad (1)$$

$$\Sigma a^2 = 4S\Sigma \cot A = \frac{abc}{R}\Sigma \cot A, \quad \Sigma \frac{a}{bc} = \frac{\Sigma \cot A}{R}.$$

Multiplions les deux termes des trois premiers rapports (1) respectivement par $\cot A + \cot B$, $\cot B + \cot C$, $\cot C + \cot A$ et faisons ensuite la somme des antécédents et celle des conséquents; nous aurons

$$\Sigma a^2 \cot A = 4S = \frac{abc}{R}.$$

Comme $S = r^2 \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} C$, on a aussi

$$\frac{\Sigma a^2}{4r^2} = \cot \tfrac{1}{2} A \cot \tfrac{1}{2} B \cot \tfrac{1}{2} C . \Sigma \cot A.$$

2. Considérons maintenant les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \quad (2)$$

On en tire

$$2R = \frac{\Sigma a^2}{\Sigma a \sin A} = 4S \frac{\Sigma \cot A}{\Sigma a \sin A}, \quad \frac{2S}{R} = \frac{\Sigma a \sin A}{\Sigma \cot A}.$$

O étant le centre du cercle circonscrit, on a

$$S = OBC + OCA + OAB = \tfrac{1}{2} \Sigma R^2 \sin 2A = \tfrac{1}{2} \Sigma a . R \cos A \quad (3)$$

Par suite, si l'on combine cette relation avec la précédente, on trouve

$$\frac{\Sigma a \sin A}{\Sigma a \cos A} = \Sigma \cot A.$$

Des égalités (2) on déduit encore

$$4R^2 = \frac{\Sigma a^2}{\Sigma \sin^2 A} = \frac{a^2b^2c^2}{4S^2};$$

comme $\Sigma \sin^2 A = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$, on peut aussi écrire

$$\frac{\Sigma a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{\Sigma \sin^2 A}{4S^2} = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{2S^2}. \quad (3)$$

En remplaçant S par pr, la relation (3) donne encore

$$\Sigma a^2 \Sigma^2 a = \tfrac{1}{2} a^2b^2c^2r^2 (1 + \cos A \cos B \cos C),$$

$$\Sigma a^2 \Sigma^2 a = a^2b^2c^2 (p-a)(p-b)(p-c)(1 + \cos A \cos B \cos C).$$

3. Eu égard à la relation $S = Rr\Sigma \sin A$, on déduit de (1) cette formule assez curieuse

$$\frac{\Sigma a^2}{Rr} = \Sigma \sin A \, \Sigma \cot A.$$

Au moyen des égalités (2) et (3), on vérifie aisément que

$$\Sigma \frac{a}{\cos A} = 2R \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \frac{\Sigma a \cos A}{2 \cos A \cos B \cos C}.$$

(HERNANDEZ, Valence)

25. *Sur la parabole tangente à deux droites.* La parabole tangente à deux axes OX, OY, en A et B (OA = a, OB = b) a pour équation

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - \frac{4xy}{ab} = 0.$$

Elle s'écrit aussi

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + 1\right)$$
$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} + 1\right) = 0.$$

Nous supposons a et b positifs. La première parenthèse égalée à zéro représente les points de la parabole, situés sur l'arc AB; la seconde parenthèse est à négliger; la troisième et la quatrième égalées à zéro représentent les arcs allant de A et B vers l'infini. (E. N. BARISIEN)

26. *Sur un théorème de Fermat* (voir p. 181). Voici une démonstration assez simple, peut-être nouvelle, de ce théorème :

Sur le diamètre AB *d'une demi-circonférence* AMB, *on construit un rectangle* ABCD *dont la hauteur* AD *est égale au côté du carré inscrit au cercle. Soient* F, G *les points de rencontre du diamètre* AB *avec les droites* MD, MC. *Alors*

$$\overline{AG}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AB}^2. \qquad (1)$$

Appelons K et L les points où MA et MB coupent respectivement DC. On a

$$\frac{AG}{KC} = \frac{BF}{LD} = \frac{AB}{KL}.$$

Au lieu de la relation (1), il suffit évidemment de démontrer celle-ci :

$$\overline{KC}^2 + \overline{LD}^2 = \overline{KL}^2$$

ou successivement

$$KD + DC)^2 + (LC + DC)^2 = (KD + LC + DC)^2 \ldots \qquad (2)$$
$$\overline{DC}^2 = 2KD \times LC.$$

Les triangles rectangles KDA, BCL sont équiangles entre eux et donnent $KD \times LC = \overline{AD}^2$.

L'égalité à démontrer revient donc à $\overline{DC}^2 = 2\overline{AD}^2$, ou $DC = AD\sqrt{2}$, laquelle est vraie, puisque AD est le côté d'un carré dont DC ou AB est la diagonale. La démonstration se fait de la même manière quand la demi-circonférence se trouve dans le rectangle : il suffit de changer, dans (2), le signe de DC. (L. HACKEN)

CONCOURS DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN (1907).

Géométrie analytique.

Etant donnée une ellipse E *avec ses foyers* F *et* F', *on joint* F' *aux extrémités d'une corde* PQ *menée par* F. 1° *Trouver l'équation de l'hyperbole* H *passant par* F *et ayant pour asymptotes les droites* F'P *et* F'Q.

2° *Construire le second point de rencontre de l'hyperbole avec la droite* PQ, *et trouver le lieu décrit par ce point lorsque* PQ *tourne autour de* F. *Ce lieu est une ellipse* E' *concentrique à l'ellipse donnée et passant par les foyers* F, F'. *Faire voir que* E *et* E' *sont homothétiques et calculer le rapport d'homothétie.*

3° *Démontrer que la droite qui joint les pôles de* PQ *par rapport aux deux coniques* E *et* E' *est constamment le diamètre conjugué de la corde* PQ.

4° *Construire la tangente en* F *à l'hyperbole* H, *ainsi que les axes de symétrie de cette conique en grandeur et en position. Trouver le lieu décrit par les points de rencontre de cette tangente avec les axes de symétrie lorsque* PQ *tourne autour de* F.

(*L'équation obtenue se décompose en : 1° l'équation de l'axe focal* FF'; 2° *l'équation d'une perpendiculaire à cet axe;* 3° *l'équation d'une ellipse concentrique à l'ellipse donnée et passant également par* F, F').

Solution par M. LIÉNARD (voir *Mathesis*, p. 208). Soient

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse E et

$$\frac{x}{2c}+\frac{y}{\lambda}=1 \qquad (2)$$

l'équation générale des droites menées par F.

En rendant la première équation homogène en x et y au moyen de la seconde, on voit que les droites F'P, F'Q ont pour équation quadratique

$$\frac{\left(\frac{x}{2}-\frac{cy}{\lambda}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{x}{2c}+\frac{y}{\lambda}\right)^2=0;$$

ou

$$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2c\lambda}xy+\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{a^2}{b^4}\right)y^2=0. \qquad (3)$$

L'équation de l'hyperbole H est de la forme

$$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2c\lambda}xy+\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{a^2}{b^4}\right)y^2+\mu=0,$$

avec la condition $1+\mu=0$. Elle est donc finalement

$$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2c\lambda}xy+\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{a^2}{b^2}\right)y^2-1=0. \qquad (4)$$

2° Le second point de rencontre de l'hyperbole avec la droite PQ est le point symétrique de F par rapport au milieu de PQ.

On obtiendra l'équation de l'ellipse E' en éliminant λ entre les équations (3) et (4). Il vient

$$\frac{(x-c)^2}{\left(a\frac{c}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\frac{c}{a}\right)^2}=1.$$

Rapportée aux axes de symétrie de l'ellipse E, cette équation s'écrit

$$\frac{x^2}{\left(a\frac{c}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\frac{c}{a}\right)^2}=1.$$

On voit que E et E' sont homothétiques. Le rapport d'homothétie est $\frac{c}{a}$.

3° La propriété évidente d'une *couronne elliptique* comprise entre

deux ellipses homothétiques et concentriques (projection orthogonale de deux cercles concentriques) d'intercepter sur une même sécante, à l'entrée et à la sortie des segments de longueur égale, suggère les propriétés 2° et 3°.

4° Nommons S le pôle de PQ, T le pied de la directrice relative au foyer F et R le point où cette dernière droite rencontre PQ; S est situé sur la directrice. On demande le lieu de l'intersection de la droite F'S (bissectrice de l'angle PF'Q et, par suite, axe réel de H) et de la parallèle à F'R menée par F (tangente en F à H, car le faisceau F'(PQFT) étant harmonique, la parallèle au rayon F'R et limitée à l'angle PF'Q a son milieu en F).

Entre les coefficients angulaires m, m' de ces deux droites, on a la relation

$$mm' = \frac{TS.TR}{F'T^2} = -\frac{FT^2}{F'T^2} = -\frac{\left(\frac{a^2}{c} - c\right)^2}{\left(\frac{a^2}{c} + c\right)^2} = -\frac{b^4}{(a^2+c^2)^2}.$$

Elles ont donc des directions conjuguées par rapport à la conique

$$\frac{(x-c)^2}{c^2} + \frac{y^2}{\frac{b^4c^2}{(a^2+c^2)^2}} = 1. \qquad (5)$$

Or, deux cordes menées par les extrémités F, F' d'un diamètre de la conique (5) parallèlement à deux directions conjuguées par rapport à cette conique, se coupent sur cette même conique.

Entre les coefficients angulaires m' et m_1 de la tangente en F et du second axe de l'hyperbole, on a la relation

$$\frac{m'}{m_1} = -mm' = \frac{b^4}{(a^2+c^2)^2},$$

ou

$$m' - \frac{b^4 m_1}{(a^2+c^2)^2} = 0. \qquad (6)$$

Plus généralement, si deux droites tournent autour de deux points fixes et s'il existe, entre les paramètres λ, μ qui en déterminent la position, la relation homographique

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

le point commun à ces droites décrit une conique passant par les deux points fixes.

Lorsque A = 0, la conique se décompose en un système de droites.

On pourrait encore éliminer m' et m_1 entre (6) et les équations

$$y = m'(x - 2c), \quad y = m_1 x,$$

ce qui donnerait l'équation d'une perpendiculaire à FF′ et de l'axe focal.

Algèbre.

(Seconde des humanités modernes.)

Démontrer que si, dans un polynome

$$a + bx + cx^2 + \cdots + cx^{p-2} + bx^{p-1} + ax^p \qquad (1)$$

ordonné suivant les puissances de x, les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux, il en est de même dans la m^e puissance de ce polynome, cette m^e puissance étant aussi supposée ordonnée suivant les puissances de x.

Le *Journal de Vuibert* vient de donner deux démonstrations de ce théorème; en voici une troisième.

Considérons deux polynomes homogènes dans lesquels les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux :

$$f(x, y) = ay^p + by^{p-1}x + cy^{p-2}x^2 + \cdots + cy^2x^{p-2} + byx^{p-1} + ax^p,$$
$$\varphi(x, y) = a'y^p + b'y^{p-1}x + c'y^{p-2}x^2 + \cdots + c'y^2x^{p-2} + b'yx^{p-1} + a'x^p;$$

comme ils ne changent pas quand on échange x et y, le produit effectué $f(x, y)\,\varphi(x, y)$ jouit de la même propriété. Faisant ensuite $y = 1$, on voit que le produit de deux polynomes en x ayant la forme indiquée est de la même forme.

Considérant ensuite le produit d'un nombre quelconque de tels polynomes, on étend facilement la propriété à ce produit et aux puissances d'un tel polynome.

Au lieu d'employer des polynomes en x et y, on pourrait multiplier deux polynomes de la forme (1) en les ordonnant d'abord suivant les puissances croissantes de x ensuite suivant les puissances décroissantes; dans les deux cas, les multiplications partielles et les réductions se présentent d'une manière identique sauf que x^n est remplacé par x^{2p-n}.

(J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

J. A. Serret. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, nach Axel Harnacks Uebersetzung. Dritte Auflage, neu bearbeitet von G. Scheffers. Zweiter Band. Integralrechnung mit 105 Figuren in Text. Leipzig, Teubner, 1907. (In-8° cartonné de XIV-583 pp.). Prix : 13 marcs.

Sommaire : 1. Intégrale. Méthodes d'intégration. Intégration des séries. 2. Intégrales des fonctions élémentaires. Les intégrales elliptiques. 3. Les intégrales définies. Différentiation et intégration d'après un paramètre. 4. Intégrales eulériennes. 5. Quadrature et rectification des courbes. 6. Cubatures, aire des surfaces courbes ; intégrales multiples ; leurs transformations. 7. Intégration des différentielles totales. Intégration le long d'une courbe. 8. Théorie des fonctions d'une variable imaginaire. 9. Supplément de Harnack sur les séries et les intégrales de Fourier. 10. Index et rectifications.

Voici d'après le nouvel éditeur, les changements introduits dans la 3e édition du Traité de Serret-Harnack. La démonstration de l'existence de l'intégrale comme limite de somme a été complétée (ch. 1) L'exactitude des résultats trouvés au moyen des imaginaires a été établie (ch 2). Dans les ch. 3 et 4 on a ajouté des explications complémentaires pour rendre les raisonnements plus clairs. La théorie du planimètre polaire a été introduite dans le ch. 5. Dans le sixième, la notion précise de l'intégrale double et la théorie de la transformation ont été exposées avec plus de soin. Les autres chapitres ont aussi subi diverses modifications en vue de faciliter l'usage du livre aux étudiants. Le supplément s'adresse plutôt aux analystes déjà formés. Çà et là le nouvel éditeur allemand a fait des suppressions (notions sur les fonctions elliptiques, série de Lagrange); il y a aussi des additions : théorème de Guldin, définition de l'espace à n dimensions, démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

Un jeune géomètre français ne se servira-t-il pas quelque jour de la traduction allemande de l'ouvrage de Serret, où Harnack, Bohlmann, Scheffers ont introduit tant d'améliorations de détail pour publier une nouvelle édition française, vraiment revue et augmentée, de ce traité si clair et, somme toute, si bien conçu ?

Theorie das Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten von Dr N. Nielsen, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen. Leipzig, Teubner, 1906. (In-8° de IV-105 pp.). Prix : 3,60 marcs.

Monographie des fonctions connues sous le nom de logarithme intégral, cosinus intégral, sinus intégral et de trois autres fonctions voisines, toutes apparentées à la fonction gamma.

Sommaire : 1. Définitions de propriétés analytiques. 2. Représentation par des intégrales. 3. Séries asymptotiques et fonctions continues. 4. Intégrales définies. 5. Développements en série. 6. Calculs numériques. 7. Bibliographie.

1. **H. Durège. Elemente der Theorie der Funktionen** einer komplexen veränderlichen Grösse. In 5ter Auflage neu bearbeitet von L. Maurer. Leipzig, Teubner, 1906. (In-8° cartonné de X-398 pp.), Prix : 10 marcs.

2. **Lehrbuch der Funktionentheorie** von Dr W. F. Osgood, ord. Professor der Mathematik an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass. (U. St. A.), Erster Band. Leipzig und Berlin, Teubner, 1906-1907. (In-8° de XII-642 pp.). Prix . 14,60 marcs.

3. **Projective Differential Geometry** of Curves and Ruled Surfaces, by E. S. Wilczynski, A. M., Ph. D, Assistant Professor of Mathematics at the University of California. Leipzig, Teubner; New-York, Stechert, et Westermann and C°; London, P. Nutt, et Williams and Norgate and C°. 1906. (In-8° cartonné de VIII-298 pp.). Prix : 10 marcs.

Ces trois ouvrages, que leur succès ou le nom de leurs auteurs recommandent suffisamment, sont trop en dehors du programme de *Mathesis* pour que nous puissions en donner plus que le sommaire ou l'objet d'une manière générale.

1. *Elemente de Durège-Maurer.* 1. Définitions et principes sur les fonctions d'une variable réelle. 2. Imaginaires, représentation géométrique. 3. Fonctions analytiques d'une variable imaginaire, intégrales. 4. Séries et produits infinis. 5. Fonctions monodromes d'une variable imaginaire. 6. Fonctions doublement périodiques. 7. Fonctions polydromes. 8. Fonctions algébriques. 9. Équation différentielle linéaire homogène du second ordre.

2 *Lehrbuch de Osgood.* I. I. *Théorie des fonctions d'une variable réelle. Théorie des ensembles,* 1. Notions fondamentales. 2. Fonctions de plusieurs variables. 3. Équiconvergence. 4. Intégrale curviligne ; domaine à connexité multiple. 5. Théorie des ensembles. II. *Théorie des fonctions d'une variable imaginaire.* 6. Fonctions analytiques ; différentiation; fonctions élémentaires; transformations linéaires. 7. Intégrales ; points singuliers ; fonctions rationnelles ; 8. Fonctions polydromes ; surfaces de Riemann. 9. Prolongement analytique. III. *Applications.* 10. Fonctions périodiques. 11. Fonctions elliptiques. Théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler. 12. Fonctions élémentaires. 13. Potentiel logarithmique (Voir sur cet ouvrage, une notice détaillée de M. Lacour, dans le *Bulletin des sciences mathématiques,* 1903, 1re partie, pp. 273-277 ; 1907, 1re partie, pp. 138-145).

3. *Projective Geometry de Wilczinski.*- « L'objet de M. Wilczinski est d'exposer les propriétés géométriques concernant les courves et les surfaces réglées auxquelles conduisent les propriétés d'invariance des équations différentielles linéaires ou des systèmes de pareilles équations, lorsque l'on regarde les coordonnées homogènes du point courant sur la courbe comme les solutions d'une équation différentielle linéaire du troisième ou du quatrième ordre, suivant qu'il s'agit d'une courbe plane ou d'une courbe dans l'espace et qu'on considère une surface réglée comme joignant deux points correspondants de deux courbes, les coordonnées homogènes de ces points étant les solutions d'un système de deux équations différentielles simultanées du second ordre. » (J.T. *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1907, 1re partie, pp. 448-149).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 1628.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 144).

Soient MP *l'ordonnée d'un point* M *d'une courbe* (C), N *le point de rencontre de la normale en* M *avec* Ox, R *le point de rencontre de la tangente en* M *avec la perpendiculaire en* N *à* Ox. *Déterminer la courbe* (C) *par l'une des conditions :*

1° $\rho.NP = MP.NR$; 2° $\rho.MN = m MP.NR$, ρ *désignant le rayon de courbure en* M *et* m *étant une constante.* (Rose)

Solution par A. Listray. Les triangles semblables MPN, MNR donnent la relation :

$$MP.NR = \overline{MN}^2.$$

Les conditions données deviennent donc :

$$1°\ \rho.NP = \overline{MN}^2;\quad 2°\ \rho = m.MN.$$

1° On sait que

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},\quad NP = yy',\quad MN = y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

d'où l'équation différentielle :

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}y'}{y}.$$

Posons $y' = p$, d'où $y'' = \frac{p\,dp}{dy}$;

l'équation précédente se décompose en $p = 0$, d'où $y = \text{const.}$ et

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dy}{y}.$$

Intégrons : $l(p+\sqrt{1+p^2}) = ly + lC.$

$$p+\sqrt{1+p^2} = Cy,$$

(*) Nous avons oublié de mentionner de bonnes solutions des questions 1585 et 1604, par M. Rose, 1605 par MM. Malaise et Bar, 1606 par M Abramescu, 1617 par M. Seam, 1621, par M. Tseing, 1628 par M. Dupont.

d'où l'on tire facilement

$$2Cp = \frac{C^2y^2 - 1}{y} \quad \text{et} \quad \frac{2Cydy}{C^2y^2 - 1} = dx.$$

Intégrons : $\frac{1}{C} l(C^2y^2 - 1) = x + lK, \quad C^2y^2 - 1 = De^{Cx}$

où $D = K^C$ est une nouvelle constante arbitraire.

2° La seconde partie est le problème classique : trouver une courbe dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale.

Ont résolu la même question, MM. Abramescu, Van Dinter, E. Seam et Cartuyvels.

Question 1626.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 168).

Si on projette un point M *d'une ellipse en* P *et* Q *sur les diamètres conjugués égaux, le milieu* I *de* PQ *est situé sur la normale en* M. *Le point de Frégier correspondant à* M *est le symétrique de* M *par rapport à* I. *Trouver le lieu de* I *lorsque* M *parcourt l'ellipse.* (E. N. Barisien)

Solution par M. W. Gaedeke (Berlin). La première partie de cet énoncé a déjà été proposée en 1842 dans les *Nouvelles Annales* (Tome I^er^, Question 3, communiquée par Steiner). Dans le même volume on trouve deux solutions analytiques de cette question, pages 142 et 429. Le 7^me^ volume (4^e^ série) de ce recueil, janvier 1907, Question 2029 (E. N. Barisien), page 40, renferme trois solutions géométriques de la première et de la seconde partie de la question. Par conséquent, il suffit de trouver le lieu I.

Soient les coordonnées rectangulaires des points $M \equiv (x', y')$, $P \equiv (x_1, y_1)$, $Q \equiv (x_2, y_2)$. On obtient pour les coordonnées des points d'intersection des deux perpendiculaires MP et MQ avec les diamètres conjugués égaux :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a(by' + ax')}{a^2 + b^2}, \\ y_1 = \dfrac{b(by' + ax')}{a^2 + b^2}, \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{a(ax' - by')}{a^2 + b^2}, \\ y_2 = \dfrac{b(by' - ax')}{a^2 + b^2}. \end{array} \right.$$

Désignant par (x, y) les coordonnées du point I, on trouve facile-

ment à l'aide des valeurs précédentes

$$(1) \qquad x = \frac{a^2 x'}{a^2 + b^2}, \qquad (2) \qquad y = \frac{b^2 y'}{a^2 + b^2}.$$

La direction de la droite IM est $\frac{y - y'}{x - x'}$. Portant les valeurs de x et y dans cette fraction, on trouve $\frac{a^2 y'}{b^2 x'}$. On voit donc que le point I est situé sur la normale en M.

Des équations (1) et (2), on déduit $x' = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x$, $y' = \frac{a^2 + b^2}{b^2} y$, valeurs qui, portées dans l'équation de l'ellipse, donnent :

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^6} x^2 + \frac{(a^2 + b^2)^2}{b^6} y^2 = 1.$$

Le lieu cherché est donc une ellipse, ayant les demi-axes $\frac{a^3}{a^2 + b^2}$, $\frac{b^3}{a^2 + b^2}$, avec le même centre que l'ellipse donnée.

Solution par M. V. Retali. Soient $x = a \cos\theta$, $y = b \sin\theta$ les équations paramétriques de l'ellipse et O son centre.

Le cercle

$$x^2 + y^2 - ax \cos\theta - by \sin\theta = 0,$$

décrit sur OM comme diamètre, va recouper les diamètres conjugués égaux $ay \mp bx = 0$ aux points P et Q dont les coordonnées sont respectivement

$$\frac{a}{a^2 + b^2}(a^2 \cos\theta + b^2 \sin\theta), \qquad \frac{b}{a^2 + b^2}(a^2 \cos\theta + b^2 \sin\theta),$$

et

$$\frac{a}{a^2 + b^2}(a^2 \cos\theta - b^2 \sin\theta), \qquad \frac{b}{a^2 + b^2}(a^2 \cos\theta - b^2 \sin\theta).$$

Les coordonnées du point I sont, par suite,

$$x' = \frac{a^3}{a^2 + b^2} \cos\theta, \quad y' = \frac{b^3}{a^2 + b^2} \sin\theta$$

et le lieu de I est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Les coordonnées du point de Frégier M'', correspondant à M, sont données (v. ma solution de la question 1558, année 1906, p. 140) par

$$x'' = \frac{a}{a^2+b^2}(a^2-b^2)\cos\theta, \quad y'' = -\frac{b}{a^2+b^2}(a^2-b^2)\sin\theta,$$

donc $$x+x''=2x', \qquad y+y''=2y'$$

et I est bien, sur la normale MM'', le point milieu du segment $\overline{MM''}$.

Solution analogue par MM. Lez, Abramescu, Rose, Seam, Agronomof Radev et Verheugen. M. Hacken résout la question en rapportant l'ellipse aux diamètres conjugués égaux.

Question 1633.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 200).

Une droite quelconque menée par le foyer F *d'une hyperbole rencontre en* P *et* Q *les tangentes menées aux deux sommets de la courbe. Démontrer que la circonférence décrite sur la distance* PQ *comme diamètre est bitangente à l'hyperbole.* (Droz-Farny)

Solutions par M. V. Retali. Considérons une *conique centrale* rapportée aux axes,

$$S \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0;$$

si une droite quelconque $y = \lambda(x-c)$ menée par F$(c, 0)$ coupe les droites $x \pm a = 0$ aux points P et Q, l'équation du cercle décrit sur le diamètre PQ est évidemment

$$x^2 + (y+\lambda c)^2 = a^2(1+\lambda^2),$$

ou bien

$$C \equiv b^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2 + 2\lambda b^2cy - \lambda^2b^4 = 0;$$

d'où par soustraction

$$S - C \equiv c^2y^2 - 2\lambda b^2cy + \lambda^2b^4 = (cy - \lambda b^2)^2.$$

La conique et le cercle ont donc un double contact sur la droite $cy - \lambda b^2 = 0$, parallèle à l'axe focal et menée par le point où la droite $y = \lambda(x-c)$ rencontre la directrice $cx = a^2$.

Solution géométrique. La droite menée par F rencontre l'axe secondaire en Ω, les tangentes parallèles à cet axe aux points P, Q et la directrice

relative à F en N. Appelons E le point où l'axe secondaire est coupé par la parallèle à l'axe focal menée par N; menons enfin la droite FG perpendiculaire à FΩ et qui va couper EN en H et l'axe secondaire au point G.

Les tangentes parallèles à l'axe secondaire étant séparées harmoniquement par le foyer F et la directrice correspondante, les points F, N sont conjugués harmoniques par rapport à P, Q, et par suite N et FG sont pôle et polaire par rapport au cercle décrit sur le diamètre PQ. Les points N, H sont donc conjugués par rapport au cercle et aussi par rapport à la conique donnée; le point à l'infini de l'axe focal et E étant évidemment un deuxième couple de points conjugués par rapport aux deux courbes, la droite NE en est une corde commune. Les points E, F, G, N étant sur un cercle, $\Omega E.\Omega G = \Omega F.\Omega N = \overline{\Omega P}^2$ et G est le pôle de NE par rapport au cercle; les triangles semblables FOG, FND donnent $OG : FD = OF : ND$ ou bien

$$OG.OE = OF.FD = \frac{b^2}{c};$$

donc G et NE sont aussi pôle et polaire par rapport à la conique donnée; cette courbe et le cercle décrit sur le diamètre PQ ont donc un double contact sur la droite NE.

L'énoncé suivant comprend aussi le cas des foyers imaginaires : *les droites qui unissent les foyers réels (imaginaires) d'une conique centrale à un point quelconque de l'axe secondaire (principal) coupent les tangentes perpendiculaires à cet axe sur un cercle bitangent à la conique.*

Solution analytique analogue par MM. Rose, Abramescu, Ferreira Nunes, H. Lez, Van Dinter, Agronomof, Terracini, Chen, Hacken, Barisien, Tsring et Verheugen.

M. Malaise calcule le covariant F des formes S et C, qui égalé à zéro, représente la conique passant par les huit points de contact des tangentes communes à l'hyperbole et au cercle et conclut le théorème de M. Droz-Farny de la forme $\alpha S + \beta C$ de ce covariant.

Solution géométrique par M. Decerf (Lille). Proposons-nous d'abord le problème suivant : le centre O d'un cercle mobile décrit une droite XY; son rayon OM est proportionnel à la distance OF du centre à un point fixe F. soit $\overline{OM} = \lambda . \overline{OF}$; trouver l'enveloppe de ce cercle.

Pour fixer les idées, soit $\lambda < 1$; F sera constamment extérieur au cercle mobile.

Les points de contact du cercle O avec son enveloppe sont les limites des intersections M et M′ de ce cercle mobile avec le cercle O′ infiniment voisin. Or, $OM : O'M = OF : O'F = OM' : O'M'$; donc les points M et M′ appartiennent au lieu des points dont les distances à O et O′ sont dans le rapport λ, c.-à-d. à un cercle IMFF′, I étant le pied de la bissectrice de l'angle OFO′, F′ étant le symétrique de F par rapport à XY.

A la limite, O′ et I venant se confondre avec O, ce cercle est OFF′.

Les points du lieu M et M′ sont donc les intersections du cercle mobile O et du cercle OFF′.

Soit N le point où la droite F′M rencontre à nouveau le cercle O. Le triangle OMF est égal à l'un ou l'autre des deux triangles OMF′ ou ONF′, comme ayant deux côtés égaux $OF = OF'$, OM commun, (ou $OM = ON$), et un angle égal, les angles en F et en F′. On voit aisément que c'est ONF′ qui est égal à OMF.

Donc $$NF' = MF.$$

$$MF' - MF = MF' - NF' = MN.$$

Or les triangles isocèles OMN, OFF′ sont semblables, comme ayant l'angle à la base égal, donc $\frac{MN}{FF'} = \frac{OM}{OF} = \lambda$. D'où $\overline{MN} = \lambda . \overline{FF'} = C^{te}$. M décrit donc une hyperbole de foyers F et F′.

Réciproquement, toute hyperbole peut être considérée comme l'enveloppe d'un tel cercle.

Soient d'ailleurs P, P′ les points où OF et OF′ rencontrent le cercle O : le triangle OPP′, semblable à OFF′, est donc égal à OMN, donc $PP' = MN = C^{te}$. Donc P et P′ décrivent deux droites parallèles à XY : on verra aisément que ce sont les tangentes aux sommets.

La réponse à la question proposée en résulte immédiatement.

Remarque. La propriété s'étend à l'ellipse. Il suffit de supposer $\lambda > 1$.

L'ingénieuse construction des points caractéristiques du cercle mobile O s'étend au cas où le centre O décrit une courbe Δ ; le point F′ est alors le symétrique de F par rapport à la tangente en O à la courbe Δ (J. N.).

×Question 1640.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 232).

Démontrer les identités

$$\sqrt[3]{1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}=1$$

$$\sqrt[5]{1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}-\sqrt[5]{1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

(E. N. Barisien)

Solution par M. G. Verheugen. 1° Posant $m=\sqrt[5]{1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}$, $n=\sqrt[5]{1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}$, on trouve $mn=-\frac{1}{3}$ et $m^5+n^5=2$; d'où

$$(m+n)(m^2-mn+n^2)=2,$$

$$(m+n)(m^2+2mn+n^2)-3mn(m+n)=2,$$

équation vérifiée pour $m+n=1$.

2° On a $m^5-n^5=\frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$, $mn=-\frac{1}{3}\cdots$, d'où

$$(m-n)(m^2+mn+n^2)=\frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{3}},$$

$$(m-n)(m^2-2mn+n^2)+3mn(m-n)=\frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$$

$$(m-n)^3-(m-n)=\frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{3}},$$

équation vérifiée pour $m-n=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

Solution par M. J. Bar (Liége). 1° Le premier membre de la première identité peut prendre la forme :

$$x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{27}}}.$$

Comparant à la formule de Cardan on voit que x est l'une des solutions de l'équation du 3° degré : $x^3+x-2=0$.

Cette équation peut s'écrire : $(x-1)(x^2+x+2)=0$ Or, $x=1$ est donc la seule solution convenable, les autres étant imaginaires.

2° Le premier membre de la seconde identité peut s'écrire :

$$x=\sqrt[3]{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{\frac{112}{27}}{4}-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{\frac{112}{27}}{4}-\frac{1}{27}}}$$

x est donc l'une des solutions de l'équation du 3e degré :

$$x^3-x-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}=0,$$

laquelle peut prendre la forme :

$$\left(x-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}x+\frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}\right)0.$$

$x=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ est donc la seule solution convenable; les deux autres étant imaginaires.

Solution par MM. Rose et C. D. Constantinescu. 1° Posons

$$\sqrt[3]{1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}=x.$$

En élévant au cube on a successivement

$$2-3\sqrt[3]{1-\frac{28}{27}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}\right)=x^3$$

ou $$2-x=x^3, \quad x^3+x-2=0.$$

Cette équation est vérifiée pour $x=1$ et n'a pas d'autre racine réelle.

2° Posons

$$\sqrt[3]{1+\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}-\sqrt[3]{1-\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}=x.$$

En élévant au cube on obtient :

$$x^3-x-\frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}=0. \qquad (2)$$

Cette équation admet la seule racine réelle $x=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

Solution analogue, moins explicite, par M. Retali.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1360. On considère les cercles (M) de rayon constant r, et dont le centre M décrit un cercle (O) de rayon constant a.

1° Trouver le lieu des points de contact des cercles (M) avec les tangentes parallèles à une droite donnée d.

2° Trouver les lieux des sommets des losanges circonscrits à ces mêmes cercles et dont les côtés ont des directions données d et d'.

3° On mène par le point O deux droites fixes rectangulaires Ox, Oy, et l'on demande sous quelle condition il existe des cercles (M) qui coupent à la fois ces deux droites. Montrer que, lorsqu'il en existe, la somme des carrés des cordes qu'un même cercle intercepte sur Ox et sur Oy a une valeur constante.

4° Trouver un cercle de rayon donné qui découpe sur Ox, Oy deux cordes dont la somme des carrés soit égale à l^2 et tel que les tangentes qu'on peut lui mener d'un point donné A fassent entre elles un angle de 60°.

(*École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses*).

1° Le lieu est la circonférence (O) à laquelle on imprime une translation parallèle à d et ayant pour mesure r, dans un sens ou l'autre. 2° Solution analogue à la précédente. 3° Soit XYZU un carré dont deux côtés sont les parallèles à Oy, à la distance r ; si les sommets tombent hors du cercle (O) les points des arcs de la circonférence (O) compris dans les angles X, Y, Z, U sont les centres de cercles (M) coupant à la fois Ox, Oy. Pourqu'il en soit ainsi, on doit avoir OX ou $r\sqrt{2} > a$ — Soient alors x, y les distances du centre M à Oy, Ox : la somme des carrés des cordes sera $4(r^2 - x^2) + 4(r^2 - y^2) = 8r^2 - 4a^2$. 4° Le centre M du cercle cherché se trouve aux distances $OM = \frac{1}{2}\sqrt{8r^2 - l^2}$ et $AM = 2r$ des points O et M.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1646. On considère les paraboles ayant même foyer F et passant par un même point A. B étant le second point de rencontre de la droite AF avec l'une de ces courbes, on élève en B une perpendiculaire BM à AF jusqu'à la rencontre en M avec la directrice d de cette parabole. Trouver et construire le lieu de M.

Ce lieu passe par F. Trouver l'aire comprise entre les droites AF, d et l'arc FM du lieu. (ABRAMESCU)

×**1647.** Les droites qui joignent le point de Nagel d'un triangle ABC aux sommets A, B, C rencontrent les côtés opposés en A′, B′, C′. Le rapport des aires des triangles ABC du A′B′C′ est égal au rapport du diamètre du cercle circonscrit au rayon du cercle inscrit. (E. N. Barisien)

×**1648.** Dans tout triangle ABC, on a

$$\cos A \sin 2A \sin (B - C) + \cos B \sin 2B \sin (C - A) + \cos C \sin 2C \sin (A - B) = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \cos A & \cos B & \cos C \\ \cos B \cos C & \cos C \cos A & \cos A \cos B \\ \sin B \sin C & \sin C \sin A & \sin A \sin B \end{vmatrix} = 0.$$

(E. N. Barisien)

×**1649.** Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés d'un triangle ABC. Par un point P pris à l'intérieur du triangle A′B′C′, on mène une droite qui rencontre les côtés AB, AC en des points C_a, B_a tels que P soit le milieu du segment C_aB_a. Si A_bC_b, B_cA_c sont les segments analogues dans les angles ABC, CAB, on demande : 1° la relation qui existe entre les aires des triangles AB_aC_a, BC_bA_b, CA_cB_c; 2° l'aire de l'hexagone $A_cA_bB_aB_cC_bC_a$ en fonction des coordonnées normales.

Question suggérée par un article de M. Ed. Collignon dans les *Proceedings of the Edinburgh Math. Soc.*, 1907.

×**1650.** Des sommets d'un triangle ABC comme centres on décrit trois circonférences (A), (B), (C) tangentes aux côtés opposés. 1° Démontrer que le rapport des distances du milieu A′ de BC à l'axe radical des cercles (B), (C) et la hauteur AH est égal à $\sin^2 A$; 2° que les axes radicaux de ces cercles combinés avec le cercle ABC forment un triangle homologique avec le triangle ABC, le centre d'homologie étant le point de Lemoine de ABC et l'axe d'homologie ayant pour équation barycentrique

$$\alpha \cot^2 A + \beta \cot^2 B + \gamma \cot^2 C = 0;$$

3° les coordonnées barycentriques du centre radical des cercles (A), (B), (C) vérifient les égalités

$$\frac{-\alpha + \beta \cot^2 B + \gamma \cot^2 C}{\sin^2 A} = \frac{\alpha \cot^2 A - \beta + \gamma \cot^2 C}{\sin^2 B} = \frac{\alpha \cot^2 A + \beta \cot^2 B - \gamma}{\sin^2 C}.$$

(J. Neuberg)

TABLE DES MATIERES(*).

ARITHMÉTIQUE, ANALYSE INDÉTERMINÉE.

	Pages.
Notes historiques et analytiques, par M. A. Aubry	63, 97
×Théorèmes d'arithmologie	128
×Question, par M. E. Lebon	152
×Sur les derniers chiffres des carrés, des cubes, etc., par M. Verkaart	169, 233
×Méthodologie mathématique. Sur la théorie de la division (P. M.)	171
×Sur les chiffres terminaux des puissances, par M. Barisien	183

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Sur quelques lignes trigonométriques, par M. Barisien	37
×Notes historiques et analytiques, par M. A. Aubry	62, 146, 207
Sur les maxima et les minima, par J. N.	70
Résolution graphique de l'équation cubique, par M. P. Noaillon	122
×Question 1573; solutions par MM. Barisien, Delahaye, etc.	20
×Question 1585; solutions par MM. Hernandez et Abramescu	53, 131
×Question 1598; solution par M. L. Hacken	85
×Question 1608; solutions par MM. G. Verheugen, Rose, etc.	193
×Question 1611; solution par M. J Rose	195
Concours de l'enseign. moyen (1907), solutions par MM. Rose et Neuberg.	206
×Question 1609; solution par M. G. Verheugen	220
Question 1616; solutions par MM. J. Rose et Hacken	223
Question 1620; solutions par MM. Sintsof, Delahaye, etc.	225
×Question 1613; solution par M. J. Rose	251
×Question 1640; solutions par MM. G. Verheugen, J. Bar, etc.	277

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; MÉTAGÉOMÉTRIE.

Sur le quadrangle orthogonal, par M. Agronomof	11
Sur les médianes d'un triangle, par M. Barisien	15
Sur un minimum, par J. N.	69
Sur les transversales angulaires d'un triangle, par M. J. Tummers	92
Sur le centre de gravité d'un triangle, par M. N. Agronomof	98
Théorèmes sur les transversales, par M. Terracini	127
Géométrie du triangle, par M. Emile Weber	128
Sur le triangle quasirectangle, par Droz Farny	152
Sur un theorème de Fermat, par MM. J. N. et Hacken	181, 261
Théorémes sur les transversales; par M C. D. Constantinescu	211
Sur la sécante minimum, par M. Malaise	241
Théorème de géométrie, par M. C. D. Constantinescu	241
Sur quelques questions traités dans Mathesis, par A. C.	241
Sur quelques relations dans le triangle rectiligne, par M. Hernandez	262

(*) Pour les rectifications, voir pp. 232, 256, 280 De plus, p. 228, ligne 7 et 229, dernière ligne, le facteur $2a + b$ doit être remplacé par $a + 2b$.

Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.

Question 1568; solution par M. Neuberg 17
Question 1575; solution par M. Absolonne 23
École militaire. Concours de 1906. Solutions par J. Rose 38
Question 1483, solution par M. J. Neuberg 73
Question 1536; solutions par MM. J. Rose, Abramescu, etc. 104
Question 1601; solutions par MM. Lez, Rose, etc 107
Question 1603; solution par MM. L, Hacken et Rose 135
Question 1579; solution par M. Abramescu 156
Question 1593; solution par M. Delahaye 160
Question 1614; solution par M. L. Hacken 196
Question 1610; solutions par MM. V Retali, A. Droz-Farny, etc. . . . 221
Question 1619; solution par M. Malaise 234

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur quelques divisions harmoniques, par M. A. Terracini 16
Note sur les coniques, par M. Terracini 42
Tangentes communes à une parabole et à un cercle (J. N.). 48
Involution et évolution, par M. J. Neuberg 66
Points communs à une parabole et à sa développée, par M. Barisien . . 98
Sur deux lieux géométriques, par J. N. 99
Sur les quadriques homofocales, par M. C Servais 113
Sur la conique (GK.), par M. Emile Weber 128
Sur la parabole, par M. E. N. Barisien 152
Questions sur les coniques, par M. G. Gérard 177
Sur quelques courbes associées au triangle, par M. L. Godeaux. . . . 236
Sur la parabole tangente à deux droites (E. N. Barisien) 264
Question 1577; solution par M. Absolonne 25
Question 1581 ; solutions par MM. Abramescu et Rose et par M. H. Lez 29
École militaire. Concours de 1906. Solutions par M Rose 41
Question 1589 ; solutions par MM. Fr. Dupont et Rose 53
Question 1597 ; solutions par MM. V. Retali et Hacken 83
Question 1599 ; solution par MM Rose et Aenden Boom 106
Question 1604 ; solutions par MM. A. Listray, V. Retali, etc. . . . 137
Question 1593 ; solution par M. Delahaye 160
Question 1570 ; solution par M. Abramescu 185
Question 1606 ; solutions par MM. Rose, Tabacof et Listray. . . . 189
Question 1617 ; solution par M. E. N. Barisien 199
Concours de l'enseign. moyen (1907) ; solutions par MM Rose et Liénard 203, 265
Questions 1610 et 1612 ; solution per M. Abramescu 249
Question 1624 ; solution par M V. Retali 254
Question 1626 ; solutions par MM Gaedecke et V. Retali. 272
Question 1632; solutions par MM. Retali et Decerf 274

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR ; COURBES ET SURFACES TRANSCENDANTES ; COMPLEXES.

La trisectrice de Maclaurin, par M. J. Neuberg 89
Sur la strophoïde oblique, par M. C. Servais 201
Congruence particulière de droites, par M. J. Neuberg, Suppl. (juin). . 1-11
Question 1511 ; solution par M. J. Rose 75
Question 1513 ; solution par M. Absolonne 76
Question 1566 ; solution par J. N. 77
Question 1591 ; solutions par M. V. Retali 81
Question 1594 ; solution par M. E. N. Barisien 102
Question 1133 ; solution par M. Abramescu 129
Question 1584 ; solution par M. Jeřábek 157
Question 1607 ; solution par M. H. Lez 191

CALCUL DIFFÉRENTIEL ; CALCUL INTÉGRAL ; SÉRIES.

	Pages.
Mouvement elliptique des planètes, par M. E Bertrand.	5
Volumes dans les quadriques à centre, par M. C. E. Wasteels . . .	33
Points d'inflexion rencontrés en stéréotomie, par M. A. Claeys . . .	57
Question 1574 ; solution par M. Van Dinter	22
Question 1580 : solution par M. Fr. Dupont	27
Question 1582 ; solution par M. Abramescu	50
Question 1583 ; solution par MM. G. Verheugen, Dupont, Barisien, etc. .	52
Question 1592 : solution par M. J. Rose	100
Question 1590 ; solutions par MM. Abramescu et Dupont	133
Question 1595 ; solution par MM. J. Rose, Abramescu et Dupont. . .	186
Question 1615 ; solution par MM. Abramescu et Lez	198
Question 1600 ; solution par MM. E. Seam, Hacken, Verheugen, etc. . .	217
Question 1625 ; solution par M. Van Dinter	228
Question 1605 ; solutions par MM G. Verheugen et Abramescu . . .	247
Question 1621 ; solution par M. V. Retali	252
Question 1623 ; solution par M. Listray	271

HISTOIRE ; BIBLIOGRAPHIE ; VARIÉTÉS.

N Abramescu. Algebrà superioarà	245
W. Ahrens. C. G. J. Jacobi als Politiker	155
Annuaire pour l'an 1907 du bureau des longitudes	13
P. Appell. Cours de mécanique	72
P. Appell et J. Chappuis. Mécanique élémentaire	72
Archimède. Eine neue Schrift	245
W. W. R. Ball. Histoire des mathématiques	153
Bonola. Geometria non Euclidea (P. Mansion) . . . Suppl de nov. pp.	1-7
K. Bopp. Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio (H. Bosmans S. J.)	213
H. Brocard. Bibliographie de la géométrie du triangle de 1895 à 1905. . . . . Supplément de juillet, pp.	1-14
M. Cantor. Geschichte der Mathematik. Band I	153
P. Duhem. 1. Les origines de la statique. 2. Léonard de Vinci . . .	154
Dürège-Maurer. Theorie der Funktionen	270
A Emch. Projective Geometry. (J. N.)	13
Emmerich. Histoire des triangles pseudo-isoscèles (J. N.)	184
E Fagnart et Th Klompers. Arithm. commerciale (J. Schul. S. J.).	242
W. Fiedler. George Salmon	245
E A. Fouet. Fonctions analytiques	244
G Guillemin. Tableaux logarithmiques	176
G Halsted. Rational Geometry (P. Mansion) . . Suppl. de nov. pp.	8-11
L. Heffter und C. Köhler. Analytische Geometrie	125
K. Hering Jubilaeum der Dampfmaschine.	155
Une page oubliée d'Hermite	145, 213
O. Hesse, Analytische Geometrie (J. Neuberg)	174
E. V. Huntington. La Continuo	196
D. Iéfrémof. Geometria Treougolnika	244
C. G. J. Jacobi und M. H Jacobi Briefwechsel.	155
H. Laurent. Géométrie analytique générale. (F. W)	70
Leibnizens nachgelassene Schriften.	154
E. Maillet. Nombres transcendants	217
H. Mandart Trigonométrie (G. Verheugen)	46
P. Mansion. Histoire des mathém. en Belgique. . . Suppl. (avril) pp.	1-16
F. Müller. Karl Schellbach	155
N. Nielsen. Integrallogarithmus.	269
W. Osgood Funktionentheorie	270
G. Papelier. Précis de Géométrie analytique	94
G. Petit-Bois. Tables d'intégrales indéfinies (français et allemand).	177

Pages.

O. Richter. Logarithmische und trigonometrische Tafeln. (P. M.) . . 177
J. Riollot. Les Carrés magiques 216
P. Rozé. Règle à calculs 246
F. Rudio. Sur l'histoire des conchoïdes 361
G. Salmon Fiedler. Kegelschnitte. 177
G. Schröder. Differentialrechnung und Integralrechnung. (P. M.) . . 95
J. A. Serret-Scheffers: Differentialrechnung und Integralrechnung 97, 269
Max. Simon. Entwicklung der Elementar Geometrie. (J. Neuberg). . . 44
A. Söderblom. Valeurs absolues 246
O. Staude. Analytische Geometrie. (J. Neuberg). 173
G. Tarry. Tablettes 176
F. Gomes Teixeira. Curvas especiales notables. (J. N.) 12
J. Vensluys. Meetkunde van het platte vlak. (J. N.) 175
H. Weber u. Wellstein. Elementar-Geometrie (P. M.) Supp.de nov pp. 11-15
E. S. Wilczinski. Projective Differential Geometry. 270

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 1316 à 1325, 1326 à 1327, 1328 à 1336, 1337 à 1342, 1343 à 1347, 1348 à 1355, 1356 à 1357, 1358 à 1364, 1365 à 1368, 1369 :
pages 31. 55, 86, 111, 142, 166, 200, 231, 255, 279
École militaire de Belgique Concours de 1906; solution par M. J. Rose. 37
École polytechnique de Paris. Concours d'admission de 1907 164
Concours de l'ens. moyen (1907); solutions par MM. Rose, Liénard, etc. 206, 265

SUPPLÉMENTS (56 pages).

1. (Avril). Paul Mansion. Esquisse de l'histoire des mathématiques en Belgique (16 pages).
2. (Juin). J. Neuberg Sur une congruence particulière de droites (11 pages).
3. (Juillet-août). M. H. Brocard. La bibliographie de la géométrie du triangle de 1895 à 1905 (14 pages).
4 (Novembre). P. Mansion. Analyse de quelques publications récentes sur les principes de la géométrie (15 pages).

QUESTIONS.

Solution d'une question posée dans la deuxième série.

1133 posée (2) VII, p. 214 résolue p. 129

Questions résolues et non résolues des tomes I à VII de la troisième série.

R = Résolue ; NR = Non Résolue.

Tome I.

1335	215	R		1338	240	NR	

Tome II.

1371	128	NR		1378	184	NR	
1374	152	NR					

Tome III.

1429	184	NR		1448	280	NR	
×1447	280	NR					

Tome IV.

1451	33	NR		1492	240	100	
1467	101	R		×1499	280	NR	
×1488	216	73		1500	280	R	

Tome V.

1507	56	NR	1513	83	76
1508	56	R	×1525	144	NR
1511	83	75	1546	280	NR
1512	83	NR	1547	280	NR

Tome VI.

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1557	55	NR	×1583	200	54, 131
1564	88	NR	×1586	232	R
1566	112	77	1589	232	53
×1568	112	17	1590	232	138
1570	112	185	1591	255	81
×1573	144	20	1292	255	NR
1574	144	22	×1593	256	160
×1575	144	23	1594	256	102
1577	168	24	1595	256	186
1579	168	156	1596	280	104
1580	168	27	1597	280	83
1581	200	29	1598	280	85
1582	200	50	1599	280	106
1583	200	51	1600	280	217
1584	200	157			

Tome VII.

×1601	32	107	1626	168	272
1602	32	R	×1627	168	R
×1603	32	135	1628	168	254
1604	34	137	1629	168	R
1605	32	247	×1630	168	R
1606	56	189	1631	200	R
1607	56	191	1632	200	274
×1608	56	193	×1633	200	R
×1609	56	219	1634	200	R
×1610	56	231, 249	1635	200	R
×1611	88	195	1636	232	R
1612	88	249	1637	232	R
1613	88	251	1638	232	R
×1614	88	196	1639	232	R
1615	88	198	×1640	232	277
×1616	112	223	×1641	256	R
1917	112	199	1642	256	R
×1618	112	R	×1643	256	R
×1619	112	224	1644	256	R
1620	112	225	1345	256	R
1621	144	252	1646	279	NR
×1622	144	R	×1647	280	NR
1623	144	271	×1648	280	NR
1624	144	R	×1649	280	NR
1625	144	228	×1650	280	NR

Questions des deux premières séries, résolues et non publiées.

(I-X) 353, 825 (XI-XX) 893bis, 1057, 1101, 1216, 1271, 1275.

Questions non résolues des deux premières séries (voir (2) V, pp. 30 et 113).
(I-X) 513, 598. (XI-XX) 905, 958, 1046, 1079, 1087, 1107, 1123, 1144, 1220, 1225, 1228, 1233, 1240, 1247.

TABLE DES NOMS.

(*Cette table ne renferme pas tous les noms cités dans les comptes-rendus d'ouvrages*).

Abel, 64.
Abramescu, 21, 23, 28, 29, 50, 52, 53, 68, 82, 84, 85, 88, 109, 112, 131, 133, 144, 157, 160, 168, 186, 187, 192, 193, 197, 198, 199, 217, 220, 223, 232, 245, 248, 252, 255, 271, 274, 275, 279.
Absolonne, 23, 24, 76.
Aenden Boom, 85, 105, 106.
Agronomof, 13, 50, 83, 85, 98, 253, 274, 275.
Ahrens, 154.
Alasia, 244.
Alauda, 46, 184.
Alban, 155.
Anthemius, 155.
Antiphon, 262.
Apollonius, 46, 179, 216, 251.
Appell, 72.
Archimède, 154, 155, 232, 245.
Aristote, 154, 261.
Aubry, 62, 97, 146, 257.

Bachet, 216.
Baidaff, 110, 136.
Bang, 112, 224.
Bar, 271. 277.
Barbarin, 184.
Barbette, 45.
Barisien, 16, 29, 31, 32, 48, 49, 50, 52, 55, 56, 75, 77, 85, 87, 88, 98, 102, 106, 107, 111, 112, 140, 143 144, 152, 166, 167, 168, 183, 191, 194, 195, 199, 200, 225, 228, 230, 232, 254, 255, 256, 264, 272, 277, 280.
Basset, 12.
Beghem, 246.
Benthem, 261.
Bergery, 45.
Bernoulli (Jacques), 65, 147.
Bernoulli (Jean), 258.
Bertrand (E.), 5.
Bertrand (J.), 153.
Biddle, 32, 136.
Biot, 153.
Bohlmann, 97, 269.
Bonnet (O.), 9.
Bopp, 213.
Bosmans, 216.
Bouquet de la Grye, 14.
Boutin, 257.
Branca, 155.
Brianchon, 46.
Bricard, 126.
Briggs, 63.
Brignon, 83, 85.
Brocard, 12, 141, 142, 213, 244.
Brouncker, 147.
Buys 44.

C (A.), 88, 197, 230, 231, 242.
Cantor (M.), 153, 213.
Capdeville, 89.
Cardan, 277.
Cartuyvels, 254.
Casey, 46, 69, 106, 244.
Castillon, 46.
Catalan, 92, 149, 257, 261
Cauchy, 64, 150.
Caus (Salomon de), 155.
Cawley, 155.
Cesaro (E.), 102.
Chappuis, 72.
Chasles, 71, 73, 150, 153.
Chauliac, 141, 142.
Chen, 275.
Chevreul, 145, 213.
Claeys, 57.
Clairault, 64.
Collignon, 153, 280.
Combette, 45.
Constantinescu, 107, 194, 213, 221, 278.
Corliss, 155.
Cremona, 13.
Cunningham, 56, 193.
Cutore, 255.
Czuber, 145.

Dallo, 199.
Darboux, 9, 120, 213.
Decerf, 275.
Delahaye, 20, 107, 136, 161, 194, 222, 227.
Delambre, 46.
Delbœuf, 44.
Demeyer, 107.
Descartes, 154, 214.
Deslandres, 14.
De Vinci (Léonard), 154
De Vylder, 44.
Dewulf, 205.
Dickmann, 53.
Dinostrate, 232
Dioclès, 89, 160.
Dobarescu, 144.
Doutrewe, 107, 136, 195, 220, 221.
Droz-Farny, 133, 153, 157, 200, 221, 232, 274.
Dufailly, 45.
Duhem, 153.
Dupont (Fr.), 27, 29, 52, 53, 82, 85, 131, 160, 187, 249, 271.
Durège, 270.

Emch, 13.
Emmerich, 143, 184, 244.

Enestrŏm, 153.
Enriques, 13.
Euclide, 44, 262.
Eudoxe, 147.
Euler, 9, 46, 64, 129, 145, 147, 181, 216, 257.
Even, 181.

Fagnart, 242.
Falkenburg, 261.
Fermat, 45, 181, 214, 264.
Ferrari (Fabio), 255.
Ferreira Nunes, 23, 275.
Feuerbach, 46.
Fibonacci, 97 147, 260.
Fiedler, 13, 177, 245.
Folie, 34.
Fontaine, 73, 147.
Fontené, 184.
Fouet, 244.
Frenicle, 216.
Fregier, 170, 272.
Freund, 153.

Gaedecke, 230, 272.
Galilée, 153, 154.
Gallez, 107.
Gambioli, 153.
Gauss, 46. 151.
Gelin, 45 49.
Gerard (G.), 144, 177, 256.
Gerland, 154.
Germain (Sophie), 257.
Gerono, 182.
Gob, 25, 36, 88, 112, 129, 144, 186, 201, 221, 249, 250.
Godeaux, 236.
Godefroy, 89.
Grainville (de),
Greenstreet, 141.
Grégoire de St Vincent, 213.
Grunert, 181, 184.
Guillemin. 176.
Guimaraes, 89.

H. 84.
Hacken, 85, 105, 136, 138, 192, 195, 196, 197, 199, 217, 222, 223, 224, 254, 265, 274, 275.
Harnack, 97, 269.
Haton de la Goupillière, 12.
Heffter, 125.
Heiberg, 232, 245.
Hering, 155.
Hernandez, 53, 85, 194, 253, 264.
Hermite, 145, 213, 260.
Heron, 155.
Hesse (O.), 174.
Hippocrate, 45, 262.
Hirn, 155.
Hirst, 83.
Houtekiet, 217
Huntington, 126
Huygens, 153, 216.

Ibfremof, 244.

Jacobi (C. G.), 145, 155.
Jacobi (H.), 155.
Jamblique, 231.
Janne, 52.
Jeřábek, 157.
Jordanus de Nemore, 154.

Kantor (S.), 23, 24.
Karpus, 262.
Kepler, 5, 153.
Klimpert, 45.
Klompers, 242.
Köhler, 125.
Krüger, 131.

Lalbalettrier, 244.
Lachlan, 244.
Lacour, 270.
Lagrange, 9, 149. 260.
Laguerre, 51, 114.
Laisant, 92, 244.
Lamarle, 45.
Lamotte, 208, 211, 224.
Laurens, 93.
Laurent (H.), 70, 147.
Lauvernay, 184.
Lebon, 152.
Lecointe, 45
Legendre, 9, 14, 165.
Lehmus, 46, 184.
Leibniz, 147, 154, 214, 258.
Le Lasseur, 257.
Lemoine (E.), 16, 20, 110, 244.
Leroy, 57.
Lez, 29, 30, 52, 83, 107, 140, 160, 191, 198, 199, 233, 226, 230, 274, 275.
Liangtu, 84, 105, 109, 140
Liénard, 265.
Lima (Almeida), 89.
Lionnet, 182.
Liouville, 71, 217.
Listray, 137, 189, 192, 253, 271.
Longchamps (G. de), 89, 141.
Loria (Gino), 12, 153.
Lucas (Ed.), 147, 216, 257, 260.

Maclaurin, 89, 160.
Maclellan, 244.
Mach, 153.
Maillet, 217.
Majorin, 82. 160.
Malaise. 17, 23. 105. 160, 196, 224, 227, 240, 271, 275.
Maleyx, 205.
Malfatti, 46.
Mandart, 45, 46.
Mannheim, 179, 246.
Mansion, 96, 102, 173, 177, 261.
Marie (Maximilien), 45.
Mascheroni, 45.
Marcolongo, 184.
Marx, 184.
Maurer, 270.
Mersenne, 154.
Meyer, 45.
Mineur, 44.
Miquel, 45.
Mittag-Leffler. 270.
Möbius, 67, 73.
Mollweide, 46.
Monge, 73.
Monteiro (Schiappa), 89.
Moschopoulos, 216.
Mouton, 151.
Müller (Félix), 155.

Narantengar, 141.
Neper, 153.
Neuberg, 13, 19, 42, 49, 56, 66, 69, 70, 73, 76, 81, 83, 89, 92, 100, 102, 104, 128, 141, 141, 164, 166, 174, 178, 183, 185, 188, 189, 211, 244. 254, 231, 238, 276. 280.
Newcomen, 155.
Nicole, 147.
Nicomède, 81, 262.
Nielsen, 269.
Nixon, 244.
Noaillon, 122.

Ottejano, 46.
Osgood, 270.

Pampuch, 142.
Papelier, 94.
Papin, 155.
Pappus, 122, 147, 262.

Pascal, 25, 46, 64, 147, 154, 216.
Petit-Bois, 177.
Plakhovo, 21, 59, 53, 85, 107, 160, 194.
Poncelet, 13.
Porchon, 45.
Poulain, 44, 244.
Prange, 50, 195.
Proclus, 262.
Ptolémée, 46.
Puliti, 153.
Pund, 168.
Pythagore, 46.

Radev, 221, 274.
Rebière, 45.
Retali, 81. 83, 136, 192, 221, 253 254. 273, 274.
Retsin, 44.
Reye, 13.
Ribaucour, 116.
Richter, 177.
Riemann, 270.
Riollot, 216.
Roberval, 154.
Rose, 21, 22, 27, 32, 37, 50, 51, 53, 76, 82, 84, 85, 88, 104, 106, 107, 112, 133, 136. 144, 187, 189, 192, 194, 195, 197, 198, 199, 200, 206, 209, 217, 223, 225, 251, 254. 271, 274, 275, 278.
Rougevin, 184.
Rouse Ball, 153.
Rozé, 247.
Rudio, 261.

Salmon, 99, 139, 177, 245.
Savery, 155.
Schäfli, 185.
Scheffers, 12, 97, 239.
Schellbach. 155.
Schooten, 65.
Schoute, 89.
Schröder, 95.
Schuh, 17.
Schul, 244.
Scott, 32, 137.
Seam, 52, 82, 84, 104, 188, 217, 254, 271, 274.
Serret (J. A), 9, 97, 269.
Servais (Cl.), 93, 98, 113, 201.
Simon (Max.), 44, 182.
Simplicins, 262.
Simson, 23, 46, 129, 181, 185, 302, 249.
Sintsoff, 199, 225.
Sluze, 160.
Smith, 154.
Söderblom, 246.
Soons, 184.
Staude, 12, 173.
Staudt (von), 13.
Steiner, 13, 46, 104, 179, 184, 272.
Sterne, 147.
Stevin, 154.
Stewart, 46, 150.
Stifel, 63.
Sterling. 147, 258.

Tabacof, 189.
Tafelmacker, 99.
Tannery (J), 53, 131.
Tartaglia, 154.
Tarry (G.), 176.
Teixeira (Gomès),
Teodorescu, 87.
Terloo, 194.
Terquem, 184.
Terracini, 21, 42, 83, 1 7, 137, 140. 211, 275.
Thoman (Fedor), 66.
Tseing, 271, 275.
Tserepachinsky, 246.
Tudor, 32.
Tummers, 92.

Van Aubel (H.), 17, 92.
Van de Griend, 17.
Van Dinter, 21, 22, 228, 253 255, 275.
Vercellin, 255.
Verheugen, 30, 48, 52. 85, 186, 192, 193, 217, 220, 217, 219, 2.3, 274. 275, 277.
Verkaart, 20, 161, 169.
Veronese, 13.
Verslnys, 175.
Viète, 153.
Vigarié, 244.
Vitruve, 155.
Vuibert 44, 111, 233.

W (F.), 72.
Wasteels (C. E.), 33.
Watt, 155.
Weber (E.), 106, 148.
Weierstrass, 270.
Wiener, 13.
Wilczinski, 270.
Worcester (de), 155.

Zamenhof, 126.
Zeuthen, 233.

ESQUISSE DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES EN BELGIQUE (*)

PAR

PAUL MANSION,

Professeur à l'Université de Gand,

Membre de l'Académie royale de Belgique.

Pour se faire une juste idée de l'influence qu'a eue la réalisation de notre indépendance nationale sur notre vie intellectuelle, même dans le champ des sciences exactes, il importe de mettre en lumière la stérilité de la période antérieure dans ce domaine. La domination étrangère semble avoir été, dans notre pays, un obstacle à peu près radical à l'essor des intelligences dans l'étude des mathématiques comme des sciences de la nature. Mais à peine les liens artificiels que la diplomatie ou la conquête brutale avaient forgés pour unir nos destinées à celles de l'Autriche, de la France ou de la Hollande sont-ils brisés, à peine la Belgique indépendante est-elle libre d'orienter son activité dans le sens de ses aspirations nationales, qu'elle voit ses enfants se lancer non seulement dans les carrières industrielles et commerciales, si conformes à son génie naturel, mais aussi dans ces hautes études désintéressées qui sont l'objet des sciences naturelles, physiques et mathématiques.

Nous allons le montrer pour les mathématiques en en esquissant l'histoire avant et après 1830.

I. Les Mathématiciens belges avant 1830

Stevin, Grégoire de Saint-Vincent, Sluse. Au XVI^e^ siècle, sous Charles-Quint et Philippe II, et au XVII^e^ siècle, particulièrement sous Albert et Isabelle, la Belgique n'a rien à envier aux pays voisins dans le domaine des sciences et des arts. Un grand nombre de Belges, soit dans notre pays, soit à l'étranger, publient, dans le domaine des mathématiques pures et

(*) Extrait de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, janvier 1907, t. LXI, pp. 270-285.

appliquées, des ouvrages qui sont un témoignage durable de notre activité scientifique : Mercator, Stadius, Coignet, Romanus, Simon Stevin, d'Aiguillon, Lansberghe, Muliers, Beeckman, Wendelin, Grégoire de Saint-Vincent, della Faille, Van Langren, Tacquet, de Sarasa, Verbiest, Sluse, etc.

Trois d'entre eux, Stevin (né à Bruges en 1548, mort à Leyde en 1620), Grégoire de Saint-Vincent (né à Bruges en 1584, mort à Gand en 1667) et René de Sluse (né à Visé en 1622, mort à Liége en 1685) ont eu sur la science de leur temps et même, pour le premier, sur la science de tous les temps, une influence considérable qui les met hors de pair parmi leurs contemporains.

Le principal titre de gloire de Stevin, c'est d'avoir été le créateur de la statique et de l'hydrostatique modernes. Entre Archimède et lui, il n'y a aucun géomètre qui ait trouvé et mis en pleine lumière une vérité importante relative à ces deux sciences. Dès 1586, il établit, par un raisonnement admirable de simplicité, la loi de l'équilibre sur le plan incliné et la composition des forces rectangulaires, complète ou rectifie Archimède en découvrant le paradoxe hydrostatique et signale, là où il le faut, le principe d'égalité de pression, devançant ainsi Pascal de plus d'un demi-siècle. L'année précédente, dans son écrit intitulé la *Disme*, publié aussi en flamand, il avait donné les règles du calcul des fractions décimales, non pas incidemment comme plusieurs de ses devanciers, mais avec la pleine conscience de la valeur pratique de son invention. En 1594, dans un appendice à son Arithmétique, il fait connaître ce principe fondamental de la résolution des équations numériques que deux nombres comprennent entre eux une racine de l'équation, si, substitués dans son premier membre, ils lui font prendre des signes contraires.

Grégoire de Saint-Vincent, avant Cavalieri, dans des manuscrits assez répandus, mais surtout dans son *Opus geometricum* (1647), a traité avec rigueur, au moyen de théorèmes généraux qui ont eu une influence incontestable sur Newton et sur Leibniz, les questions de quadratures et de cubatures; il a démontré l'égalité de l'arc de la parabole et de la spirale d'Archimède; il a trouvé l'aire de l'hyperbole par une série équivalente à la série logarithmique et d'innombrables théorèmes sur les coniques.

Sluse emploie l'analyse à la manière de Viète et de Descartes. On lui doit, outre des quadratures très compliquées, une méthode pour résoudre par l'algèbre les problèmes déterminés, où il manie les lieux géométriques avec une aisance toute moderne. Mais sa découverte principale est celle de la règle pour

mener la tangente aux courbes algébriques dont l'équation est mise sous forme rationnelle. Cette règle, trouvée en 1652, mais publiée seulement en 1668, puis plus complètement en 1673, provoqua l'admiration de Newton et fit nommer Sluse membre de la Société royale de Londres.

Le Poivre et **Nieuport**. « Après de Sluse, dit Quetelet, et pendant plus d'un siècle, la Belgique au milieu de ses revers politiques, dut se tenir à peu près en dehors du champ de la science nouvelle (l'analyse infinitésimale)... Quand arriva le commencement du XVIII^e^ siècle, le silence scientifique s'était répandu sur la Belgique... Aucun effort ne fut fait alors pour aider nos aïeux à diriger leurs pas. »

On ne peut guère citer au XVIII^e^ siècle, comme mathématiciens belges, que Le Poivre (mort en 1710), de Mons, et le vicomte de Nieuport (1746-1827), de Gand. Le premier a publié, en 1704, puis de nouveau en 1708, un traité des sections coniques, très court et de forme assez originale pour avoir été remarqué des contemporains, mais ne contenant rien d'essentiellement nouveau, la méthode exceptée. On peut en dire autant des nombreux mémoires publiés par le vicomte de Nieuport sur les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles, à la fin du XVIII^e^ siècle et au commencement du XIX^e^ : ils n'eurent aucune influence sur le développement scientifique.

Quetelet et **Dandelin**. Sous la domination française (1794-1814), l'ancienne Université de Louvain avait été supprimée sans qu'aucune institution d'enseignement supérieur la remplaçât. Sous le régime hollandais, des universités nouvelles furent établies à Louvain, à Liége et à Gand, mais parmi les professeurs qui y occupèrent les chaires de hautes mathématiques, aucun n'arriva à la notoriété scientifique, sauf Pagani dont nous reparlerons plus loin.

Au contraire en dehors des universités, un autodidacte, Adolphe Quetelet (1796-1874), qui se fit plus tard un nom immortel dans le domaine de la statistique morale (*Physique sociale*, 1836), et son ami Dandelin (1794-1847), publièrent sur les coniques, de 1820 à 1822, les *théorèmes belges*, si simples et si beaux, que l'on ne conçoit pas comment ils ont pu échapper à tant de géomètres qui, dans l'antiquité et les temps modernes, ont étudié ces courbes célèbres : « Une sphère tangente à un cône circulaire droit et à un plan qui le coupe, touche le plan sécant en un point

qui est un foyer de la conique d'intersection du cône et du plan; la directrice correspondante est l'intersection du plan sécant avec le plan de la circonférence de contact de la sphère et du cône. »

Quetelet, qui fut secrétaire perpétuel de l'Académie royale, de 1835 à 1874, a eu une influence prépondérante sur la renaissance de l'activité scientifique dans notre pays, avant et après 1830, grâce à la publication de la CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE (1824-1839, onze volumes), puis à celle des BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE (à partir de 1833).

II. La première génération après 1830

G.-M. Pagani (1796-1855), réfugié italien, successivement professeur à l'Université de Liége (1826-1830) et à celle de Louvain (1835-1853), a écrit un grand nombre de mémoires ou de notes sur des sujets très variés : théorie des lignes spiriques, mécanique rationnelle des systèmes déformables, séries de Fourier, intégration des équations du mouvement de la chaleur, principe des vitesses virtuelles, pendule de Foucault, équilibre des colonnes, théorie des exponentielles et des logarithmes. Il a introduit le premier dans l'étude des courbes gauches la considération du trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale.

A. Timmermans (1801-1864). On doit à Timmermans, qui a enseigné à l'Université de Gand de 1835 à 1864, l'analyse infinitésimale et la mécanique rationnelle, deux traités relatifs à ces branches élevées des mathématiques, et, en outre, un certain nombre de mémoires sur la théorie des moulins à vent, sur les solutions singulières des équations différentielles, sur les axes principaux d'inertie et les centres de percussion, etc. Mais le travail le plus original qu'il ait publié semble être son petit mémoire sur la théorie intrinsèque des courbes intitulé : *Recherches sur la théorie des courbes, déduite de la considération de leurs rayons de courbure successifs* (Lille, 1828). On y trouve, entre autres, ce joli théorème : « Il y a dans le plan d'une courbe un point dont la distance à la tangente et à la normale à la courbe, en un point quelconque, est égale à la somme algébrique des rayons de courbure successifs, impairs ou pairs, de la courbe en ce point. »

J.-B. Brasseur (1802-1868) est plus original que les précédents. Il a publié un *Programme d'un Cours de géométrie descriptive* (quatre éditions : 1837, 1850, 1859, 1866) qui est un vrai chef-d'œuvre didactique et qu'on ne peut surpasser qu'en en prenant le plan et les grandes lignes; des mémoires divers sur la géométrie des quadriques, la mécanique et la mécanique appliquée. Son œuvre capitale est son *Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue* (1855), qui est, au fond, un exposé entièrement personnel de la géométrie projective, déduite d'un seul théorème fondamental.

A. Meyer (1803-1857), Luxembourgeois comme Brasseur, outre bon nombre de notes ou de mémoires sur des questions d'analyse et de calcul des probabilités, a publié des ouvrages didactiques sur l'arithmétique, la trigonométrie, le calcul différentiel, le calcul des variations, la théorie des intégrales définies, dont aucun n'a eu de valeur durable; l'auteur ne s'était pas suffisamment inspiré des traditions de rigueur absolue introduite par Cauchy en mathématiques. En revanche, le *Cours de calcul des probabilités* que Meyer a fait à l'Université de Liége, de 1849 à 1857, et qui a été publié en 1874 par Folie, est une œuvre qui lui fait honneur. Ce cours a été traduit en allemand par M. E. Czuber en 1879.

P.-J. Verhulst (1804-1849), professeur à l'école militaire de Bruxelles, a écrit quelques notes ou mémoires sur les applications du calcul des probabilités à la statistique, mais il est surtout connu par son *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* (1841), où il a résumé, sous une forme aussi élémentaire que possible, les travaux de Legendre et une partie des *Fundamenta* de Jacobi.

E. Lamarle (1806-1875), né à Calais, mort à Douai, mais dont la vie scientifique s'est passée entièrement en Belgique (il a été professeur à l'Université de Gand de 1838 à 1867), est l'auteur de travaux très dignes d'attention sur les principes de l'analyse infinitésimale et de la géométrie cinématique. Son *Étude approfondie sur deux équations fondamentales du calcul différentiel* (1855), où il essaie de prouver l'existence de la dérivée pour toutes les fonctions continues, est pleine d'idées fécondes, quoiqu'elle n'aboutisse pas à la conclusion voulue par

l'auteur. L'*Exposé géométrique du calcul différentiel et du calcul intégral* (1861-1863) est le résumé et le couronnement de nombreuses recherches antérieures de géométrie cinématique. Dans ces recherches et dans ce livre, Lamarle trouve ou retrouve presque intuitivement une foule de théorèmes nouveaux ou anciens, en regardant une courbe comme engendrée par un point mobile sur la tangente à la courbe, tandis que la tangente s'infléchit par un mouvement de rotation autour du point mobile.

E. Catalan (1814-1894), bien que né à Bruges, est Français et la plus grande partie de sa carrière (1814-1865) s'est passée en France. Mais de 1865 à 1884, il a été professeur à l'Université de Liége et c'est pendant les trente dernières années de sa vie qu'il a publié ses mémoires capitaux. Nous citerons ici ses *Recherches sur quelques produits infinis de la théorie des fonctions elliptiques* (1873); son travail sur la constance G (1883), qui touche à celle des Eulériennes; ses dix Mémoires sur les polynômes de Legendre (1876-1892), dont les derniers surtout sont très remarquables; enfin, son étude sur la transformation apsidale et la surface des ondes (1871). De 1874 à 1880, Catalan a publié le recueil périodique NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE (six volumes).

J.-B. Liagre (1815-1891), qui a succédé à Quetelet comme secrétaire perpétuel de l'Académie royale de Belgique (1874-1891), n'a guère écrit en mathématiques que sur les applications du calcul des probabilités aux institutions de prévoyance (1853-1862). On lui doit un *Calcul des probabilités et théorie des erreurs avec des applications aux sciences d'observation en général* (1852), où, il faut bien l'avouer, la partie pratique est mieux exposée que la partie théorique.

M. Schaar (1817-1867), Luxembourgeois comme Meyer et Brasseur, fut un vrai analyste. Il s'était formé seul, surtout en étudiant les *Recherches arithmétiques* de Gauss et les travaux de Cauchy et d'autres géomètres sur les Eulériennes. Il a publié sur ces dernières fonctions plusieurs notes dont les résultats sont devenus classiques; pour la formule de Stirling, en particulier, il a indiqué une limite supérieure de l'erreur qu'elle comporte quand on s'arrête à un terme convenablement choisi. Les recherches de Schaar sur l'arithmétique supérieure, notamment

sur la théorie des résultats quadratiques, sont plus abstruses encore : elles contiennent, entre autres choses, trois démonstrations de la loi de réciprocité des résidus quadratiques. Schaar a été successivement professeur aux Universités de Gand (1854-1857), de Liége (1857-1864) et de Gand encore (1864-1867).

H. Limbourg (1833-1860), le disciple et continuateur de Schaar dans la théorie des Eulériennes, est l'auteur de la *Théorie de la fonction gamma* (1859), monographie remarquable où il parvient à définir cette fonction par ses propriétés. On lui doit ensuite une étude sur la série de Stirling (1860), où il indique le moyen d'en déduire la valeur de gamma avec la plus grande approximation ; il a complété ainsi l'œuvre de Schaar.

L. Houtain (1828-1880). L'injustice des hommes a empêché Houtain d'arriver à l'enseignement supérieur ; mais son livre, le plus savant et le plus rigoureux que l'on eût jamais publié en Belgique sur l'analyse à l'époque où il a paru (1853), prouve qu'il était plus digne d'occuper une chaire d'analyse que plusieurs de ses contemporains. Ce livre est intitulé : *Théorie des solutions singulières des équations différentielles et aux dérivées partielles.*

F. Dauge (1829-1899), professeur à l'Université de Gand de 1857 à 1898, y a créé le cours de méthodologie mathématique, dont les idées fondamentales ont pénétré directement ou indirectement tout l'enseignement mathématique des collèges et des athénées belges. Dauge a fait paraître deux éditions de son cours (1883 ; 1896) et quelques articles qui s'y rattachent.

Ph. Gilbert (1832-1892), professeur à l'Université catholique de Louvain de 1855 jusqu'à sa mort, a honoré sa patrie d'adoption (il était d'origine française) par de beaux travaux d'analyse, de géométrie, de mécanique, de physique mathématique et d'histoire des sciences. Nous citerons, en analyse, ses recherches sur les Eulériennes, où il trouve une série nouvelle et simple pour la fonction de Binet, puis le beau mémoire où il corrige et complète la *Nova Methodus* de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ; en géométrie infinitésimale, un mémoire sur la théorie des surfaces (1869). En mécanique, le

travail capital de Gilbert, celui qui lui a valu d'être nommé Correspondant de l'Institut de France, est son *Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif* (1882) où l'on trouve la théorie du barogyroscope, instrument inventé par lui pour mettre en évidence le mouvement de rotation de la terre par rapport aux étoiles fixes. En physique mathématique, les recherches de Gilbert sur la diffraction sont devenues classiques. En histoire des sciences, il est l'auteur de l'étude la plus approfondie qui existe sur le procès de Galilée et de diverses biographies (Pagani, Chasles, Puiseux, Foucault, etc.).

F. Folie (1833-1905). Par ses travaux astronomiques, Folie appartient à la génération contemporaine; par ses travaux de mécanique rationnelle sur une théorie nouvelle du mouvement d'un corps solide (1865-1867), sa *Géométrie supérieure cartésienne* (1872) et sa *Théorie des faisceaux* (1878), on peut le rattacher à la période précédente. L'idée fondamentale de la géométrie supérieure cartésienne consiste à couvrir toutes les courbes du quatrième ordre et certaines courbes d'ordre supérieur, d'un *grillage* de droites analogues à celles que l'on rencontre dans l'équation $\delta_1 \delta_2 \delta_3 - k\, d_1 d_2 d_3 = 0$ des cubiques, les δ et les *d* étant linéaires. L'auteur a abandonné ses recherches après en avoir esquissé le principe et les applications possibles.

Divers. [illegible] mathématiques en [illegible] un certain [illegible] géométrie, la [illegible] ouvrages, [illegible] Adan, [illegible] eau, [illegible] Le Fran[illegible], [illegible] Noël, [illegible] La [illegible]part [illegible]

III. Les Contemporains

Nouveaux périodiques. La plupart des travaux dont nous avons parlé jusqu'ici ont été publiés dans les BULLETINS et les MÉMOIRES de l'Académie royale de Belgique, dans la CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE de Quetelet et, enfin, dans les MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES de Liége. Depuis 1874 jusqu'à l'époque actuelle, les savants belges ont eu à leur disposition de nouveaux recueils périodiques : la NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE (1874-1880; 6 volumes) de Catalan, déjà citée, MATHESIS (1881-1906; 26 volumes) fondée par MM. Mansion et Neuberg, les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES (1877-1906; 30 volumes), la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1906; 60 volumes). Quelques articles importants ont été publiés dans la REVUE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE EN BELGIQUE (1853-1906).

Le lieutenant-général **J. De Tilly** (1837-1906) a publié trois mémoires capitaux sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique euclidiennes et non euclidiennes : *Études de mécanique abstraite* (1868); *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* (1878); *Géométrie analytique générale* (1892), dont l'ensemble constitue, avec les notes moins étendues qui les complètent, le travail le plus philosophique qui ait paru sur la matière, principalement pour la géométrie. Dans sa *Balistique* (1874), il a soumis à une critique tout aussi pénétrante la théorie des erreurs accidentelles et, dans un discours *Sur les notions de force, d'accélération et d'énergie en mécanique* (1887), il a donné une solution claire et naturelle du problème de la conciliation du déterminisme avec le libre arbitre. On lui doit, en outre, un grand nombre de notes d'analyse, de géométrie et de mécanique pure et appliquée, le *Rapport séculaire sur les travaux mathématiques de l'Académie royale de Belgique*, de 1772 à 1872, et une belle notice sur Lamarle.

J. Neuberg, né en 1840, professeur à l'Université de Liége, a publié depuis quarante ans un nombre prodigieux de notes et de mémoires d'analyse et de géométrie, plusieurs ouvrages didactiques, sans compter ceux auxquels il a collaboré : *Trigo-*

nométrie et *Géométrie analytique* de Casey; ***Traité de Géométrie*** de Rouché et Comberousse, etc., etc. Il a contribué puissamment au développement de la géométrie récente du triangle et de celle du tétraèdre, tant par de nombreuses recherches personnelles qu'en coordonnant en corps de doctrines tout ce qui a paru dans ce domaine; il les a étudiées l'une et l'autre vraiment à fond dans leurs rapports avec les coniques, les quadriques, les cubiques planes ou gauches, les complexes. On lui doit aussi des recherches nombreuses sur les transformations, sur la géométrie cinématique, sur les surfaces anallagmatiques, etc., etc.

J.-A. Carnoy (1841-1906) n'a publié qu'un petit nombre de mémoires originaux, mais il a fait paraître trois [illegible] universitaires qui ont eu un grand succès en Belgique et à l'étranger : le *Cours d'A[illegible] supérieure* (deux [illegible] 1892, 1900), le *Cours de Géo[illegible]* [illegible] 1872, 1876, 1880, 1884, 1891, 1896, 1906) et le *Cours de G[illegible] analy-*[illegible] 1872, 1876, 1882, 188[illegible], 190[illegible]. Le *Cours d'A[illegible]* [illegible]

J. Gra[illegible] [illegible]

P. Mans[illegible] [illegible]

des fonctions elliptiques (1870); *Sur la méthode d'Abel pour l'inversion de la première intégrale elliptique, dans le cas où le module a une valeur imaginaire complexe* (1903); *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (1875; édition allemande, 1892); *Premiers principes de la Métagéométrie* (1896); *Démonstration du théorème de Jacques Bernoulli* (1902); Biographies de Clebsch, Catalan, Gilbert, Hermite, etc.; études critiques sur les principes de la géométrie et de la mécanique.

Ch. Lagrange, né en 1851, s'est occupé successivement ou simultanément de mathématiques, de physique, de physique du globe, de mécanique céleste, d'histoire et de philosophie des sciences. Les mémoires où il expose, démontre et complète, en les précisant, les recherches de Wronski sur la mécanique céleste (1882), sur la loi suprême (1884) et sur le problème universel et un autre problème relatif à l'intégration des équations différentielles (1886) semblent les meilleures contributions de l'auteur à l'analyse mathématique.

C. Le Paige, né le 9 mars 1852, professeur à l'Université de Liége, a publié de nombreux écrits sur la théorie des formes algébriques et sur la géométrie supérieure, les premiers servant pour ainsi dire de support et d'instrument pour étudier de plus en plus profondément l'homographie et l'involution du troisième ordre. Le couronnement de ces travaux a été la découverte de la construction linéaire d'une surface du troisième ordre (1883), qui a valu à son auteur le prix quinquennal des sciences physiques et mathématiques (1879-1883). Le Paige a publié des notices érudites sur l'histoire des mathématiques, en particulier sur Sluse et Wendelin.

J. Massau, né le 9 avril 1852, professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Gand, est l'auteur d'un ouvrage considérable et très original intitulé : *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications* (1877-1886 ; supplément, 1889; complément et continuation dans une foule de notes ultérieures). Dans cet ouvrage, qui lui a valu le prix quinquennal des sciences physiques et mathématiques (1889-1893), l'auteur unifie et généralise les procédés de la nomographie, de la statique graphique et de l'intégration approchée des équations différentielles et aux dérivées partielles. Il a aussi publié un *Cours de mécanique*

rationnelle où il fait largement usage des vecteurs et des transformations géométriques, et où il étudie et rapproche les méthodes voisines. L'Académie des Sciences de Paris lui a décerné, en 1906, le prix Wilde.

Ed. Goedseels, né en 1857, administrateur-inspecteur de l'Observatoire d'Uccle et professeur à l'Université de Louvain, a publié un grand nombre de notes sur les mathématiques pures ou appliquées. Il a réuni les principaux résultats de ses recherches dans sa *Théorie des erreurs d'observation* (1902). Il y expose, sous une forme personnelle, les méthodes de Cauchy et de Tobie Mayer, celle-ci de manière à la faire sienne. Ce qui est plus important encore, il y prouve, sans faire intervenir aucune loi de probabilité des erreurs accidentelles, que la méthode des moindres carrés donne certainement les valeurs les plus approximatives pour les inconnues, quand on calcule, non les approximations linéaires, mais les approximations quadratiques.

E. Cesàro (1859-1906). Si l'Italie ne nous l'avait repris, il y aurait lieu de citer ici Ernest Cesàro, professeur à l'Université de Naples, associé de l'Académie royale de Belgique, élève de son frère G. Cesàro, l'éminent cristallographe, et de Catalan. Il a publié, lorsqu'il était encore étudiant à l'Université de Liége, de nombreuses notes originales d'analyse et de géométrie infinitésimale, et des recherches d'arithmétique asymptotique qui constituent un travail de premier ordre.

Jacques Deruyts, né le 18 mars 1862, professeur à l'Université de Liége, s'est occupé plus que personne en Belgique d'invariantologie. Il a résumé une grande partie de ses recherches dans son *Essai d'une théorie générale des formes algébriques* (1891) et dans quelques notes ultérieures; il y donne une solution complète et relativement simple de la recherche des formes invariantes d'un système de formes algébriques à un nombre quelconque de séries cogrédientes de variables, en passant par les covariants primaires et les semi-invariants.

François Deruyts (1864-1902), élève de Le Paige comme son frère aîné, s'est surtout occupé de Géométrie supérieure. Son travail le plus étendu est son *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* (1890), qu'il a com-

plété dans des mémoires ultérieurs où il s'occupe des groupes neutres des involutions par des méthodes très simples. Dans sa trop courte carrière comme professeur de Géométrie supérieure à Liége, il a formé quelques élèves parmi lesquels il faut citer **M. Fairon**. M. Fairon a représenté sur des courbes rationnelles planes ou gauches, des systèmes de formes algébriques des quatre premiers degrés.

Cl. Servais, né le 16 octobre 1862, professeur à l'Université de Gand, est l'un des principaux représentants de la Géométrie projective synthétique à notre époque. On peut citer parmi ses travaux, son mémoire *Sur la Courbure et la Torsion dans la collinéation et la réciprocité ;* trois études constituant les fondements d'une géométrie projective imaginaire *(Sur les imaginaires en géométrie ; sur le système focal ; sur la projectivité imaginaire)*, où il démontre une foule de propriétés nouvelles des cubiques gauches; deux mémoires sur les faisceaux de coniques et de quadriques où il ne recourt nullement à la théorie des limites ni au principe de continuité de Poncelet. Dans son *Cours de Géométrie analytique* (1902; seconde édition, 1906), il expose plus systématiquement et plus logiquement qu'aucun autre géomètre, le principe des signes, et les notions relatives aux éléments à l'infini ou imaginaires.

M. Stuyvaert, né le 30 juillet 1866, a étudié les cubiques et les quartiques planes par l'analyse, dans un assez grand nombre de notes et de mémoires ; mais il faut remarquer surtout parmi ses écrits son *Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du deuxième ou du troisième ordre* (1902) et plus encore ses *Recherches relatives aux connexes de l'espace* (1901) et quelques notes récentes qui s'y rattachent. En 1906, la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique lui a décerné le prix François Deruyts.

Ch.-J. de la Vallée Poussin, né le 14 août 1866, professeur à l'Université de Louvain, s'est mis rapidement au premier rang des analystes belges par les nombreux et importants travaux qu'il a fait paraître depuis quinze ans. En laissant de côté une foule de notes d'analyse infinitésimale et d'arithmétique supérieure, et sans parler non plus de son remarquable *Cours d'analyse infinitésimale* (1898-1899; 2e édition, 1903-1906), on

peut signaler trois sujets de recherches qui témoignent surtout de son originalité : la question de l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle où la dérivée de la variable dépendante est égale à une fonction discontinue de la variable indépendante et de la variable dépendante (1892-1893); la réduction des intégrales multiples généralisées (1899); la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée (1889). Ces travaux lui ont valu le prix décennal des sciences mathématiques (1894-1903).

A. Demoulin, né en 1869, professeur à l'Université de Gand, quoique jeune encore, a écrit un nombre considérable de mémoires et de notes substantielles sur la géométrie infinitésimale, euclidienne ou non euclidienne, des courbes, des surfaces, des congruences ou des complexes; il y complète des recherches où d'illustres mathématiciens contemporains avaient laissé des lacunes, y résout des problèmes qui avaient résisté à ses devanciers; il découvre des propriétés nouvelles. Que citer dans cet ensemble d'études aussi variées qu'intéressantes? Bornons-nous à signaler ses recherches sur les surfaces minima et ses *Principes de géométrie anallagmatique et de géométrie réglée intrinsèque* (1905) dont il a déjà fait de belles applications à la théorie des sphères. L'Académie des Sciences de Paris lui a décerné, en 1906, le prix de Joest.

C. Wasteels, Beaupain, Mathy. C. Wasteels a publié des notes courtes, mais substantielles, rigoureuses et complètes sur des questions de géométrie générale (1901-1902), et aussi sur l'analyse infinitésimale. Beaupain a publié une douzaine de mémoires étendus sur des sujets difficiles d'analyse, presque tous apparentés à la théorie des eulériennes. Mathy s'est occupé surtout des fonctions elliptiques et de leurs applications à la géométrie, à la mécanique rationnelle et à la physique mathématique.

Divers. Outre les précédents, beaucoup d'autres géomètres ont écrit des ouvrages, des mémoires ou des articles plus ou moins originaux dans les recueils belges et étrangers. En voici une liste sommaire inévitablement très incomplète : Ancion, Andrien, Barbette, Bergmans, E. Bertrand, Boset, Brahy, Breithof, Cambier, Casteels, G. Cesàro, Charlier, Chomé, Claeys, Collette,

Colart, Compère, Coppens, De Donder, de Locht, Delsaux, Demanet, Deprez, Derousseau, Dutordoir, Even, Fagnart, Falisse, Fréson, Gelin, G. Gérard, Ghuys, Ghysens, Gob, Hanocq, Klompers, Lebeau, Lecointe, Ledent, Legrand, Leman, Liénard, Listray, Lorent, Malengreau, Mandart, Merlin, Meurice, Mineur, Mister, Moreau, Namur, Pasquier, Petit-Bois, Philippot, Postula, Ronkar, Rose, Saurel, Sautreaux, Schoentjes, Soons, Thiry, H. Van Aubel, A. Van Biervliet, Van Deuren, Verbessem, Verniory, J. Wasteels, etc.

Histoire des mathématiques. Nous avons déjà cité quelques écrits sur l'histoire des mathématiques à propos de Gilbert, De Tilly, Mansion, Le Paige. Nous devons y ajouter les deux volumes de Quetelet intitulés : *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (Bruxelles, Hayez, 1864); *Sciences physiques et mathématiques chez les Belges au commencement du XIX^e^ siècle* (Bruxelles, Thiry, 1866); ceux que Mailly a publiés sur l'histoire de l'Académie avant sa réorganisation (1883; t. XXXIV et XXXV des Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique), et enfin, dans *Cinquante ans de liberté*, l'esquisse de l'histoire des mathématiques en Belgique, de C. Lagrange (Bruxelles, Weissenbruch, 1881, t. II, pp. 203-275).

On doit au **R. P. Thirion,** S. J., une foule de notices historiques sur la physique et les physiciens, l'astronomie et les astronomes, puis l'excellent ouvrage : *L'évolution de l'astronomie chez les Grecs* (Paris, Gauthier-Villars, 1900), le seul où l'on ait tenu compte des recherches modernes des érudits sur la matière.

Le **R. P. Bosmans,** S. J., a fait paraître, dans les recueils de la Société scientifique de Bruxelles, des notices ou des notes plus fouillées et plus exactes que celles de ses devanciers surtout sur la vie et les écrits de mathématiciens du XVI^e^ et du XVII^e^ siècle : Michel Coignet, Grégoire de Saint-Vincent, Snell, Adrien Romain, Ticho Brahé, Van Langren, Viète, Albategnius, Dithmarus, Regiomontanus, Galilée, etc. (1).

(1) Pour les renseignements bibliographiques sur l'histoire des mathématiques et des mathématiciens belges, nous renvoyons aux *Notices biographiques et bibliographiques* de l'Académie royale de Belgique (1854, 1874, 1886, 1896); au *Rapport secularie* de M. De Tilly et aux JAHRBÜCHER ÜBER DIE FORTSCHRITTE DER MATHEMATIK (1868-1904).

Conclusion

Après Stevin, Grégoire de Saint-Vincent et Sluse, la science européenne n'a plus à s'inquiéter des recherches des géomètres belges jusqu'à 1830; après 1830, les travaux de Schaar et de Limbourg (fonction gamma), de Gilbert (barogyroscope), de De Tilly (principes de la géométrie et de la mécanique), de Neuberg (géométrie du triangle et du tétraèdre), de Le Paige (surfaces du troisième ordre), de Massau (intégration graphique), de Goedseels (méthode des moindres carrés), de J. Deruyts (semi-invariants), de Servais (géométrie synthétique), de la Vallée Poussin (nombres premiers), de Demoulin (géométrie anallagmatique intrinsèque) font partie intégrante essentielle de la science mathématique moderne.

NOTE. Nous avons analysé les publications belges, depuis 1871, dans les *Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik* (Berlin, Reimer); depuis 1876, dans le *Bulletin des sciences mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars); et, pour 1871 à 1875, dans le *Bullettino* de Boncompagni (tirage à part en deux brochures in-8° de 60 et 112 pp., Rome 1873, 1877). Notre rapport sur le prix décennal de mathématiques pures (période de 1894-1903), publié dans le *Moniteur belge* du 7-8 août 1905 (tirage à part de 24 pages in-8°, supplément dans *Mathesis*, 1906) contient l'analyse des travaux de Beaupain, Mathy, Goedseels, Wasteels, Stuyvaert, Fr. Deruyts, Fairon, Servais, Demoulin et Ch. de la Vallée Poussin. Nous avons publié, en outre, de courtes notices dans *Mathesis*, sur Namur (1881), Gilbert (1902), et, en collaboration avec Neuberg, sur Catalan (1894), Graindorge (1896), Mister (1898), Dauge (1899), C. De Tilly (1906), Césaro (1906); dans la *Revue des Questions scientifiques*, sur Delsaux (1891), Gilbert (1892; aussi dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1892); De Tilly (1895, 1906, aussi dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1906 et en brochure à part); dans la *Biographie nationale* (1900, t. XVI) sur Pagani; des notices détaillées sur Catalan, dans les *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège* (1885) et dans l'*Annuaire de l'Académie royale de Belgique* (1896) et aussi en brochure; sur Gilbert, en une brochure à part (Paris, Gauthier-Villars, 1893; 93 pp. in-8°).

Sur une congruence particulière de droites

PAR

J. NEUBERG (Liége)

La question que je me propose de traiter ici, m'a été suggérée par le problème suivant que j'ai rencontré dans mes *Notes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*) :

Étant données deux droites l, m situées dans un même plan, on projette un point quelconque M *de m en* N *sur l, et le point* N *en* P *sur la droite joignant* M *à un point fixe* O *de l. Trouver l'enveloppe de la droite* NP ≡ *g*.

Comme problème analogue dans l'espace, on peut considérer celui-ci :

Étant donnés deux plans λ, μ, *on projette un point quelconque* M *de* μ *en* N *sur* λ, *et le point* N *en* P *sur la droite joignant* M *à un point fixe* O *de* λ. *Étudier la congruence* Γ *engendrée par la droite* NP ≡ *g*.

C'est la congruence Γ qui forme l'objet du présent travail.

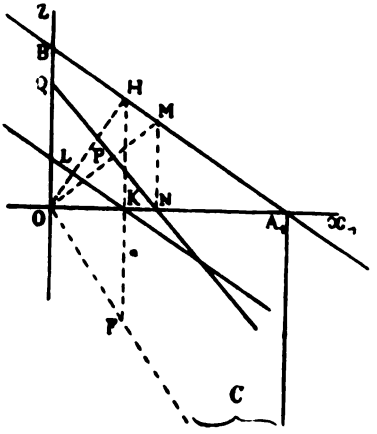


FIG. 1

(*) MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE, (3) IV, p. 21.

1. Je reprendrai d'abord le premier problème avec quelques nouveaux développements nécessaires pour la suite.

Les droites OM, MN et une parallèle à NP par O (fig. 1) se correspondent dans trois faisceaux projectifs; par suite la droite g joint les éléments correspondants de deux ponctuelles projectives ayant pour support l et la droite de l'infini. Il résulte de là que l'enveloppe de g est une parabole π tangente à l.

Lorque M se transporte à l'infini sur m, g tend à devenir perpendiculaire à m en même temps qu'elle recule à l'infini; par conséquent, les diamètres de π sont perpendiculaires à m.

Soit A_1 le point de concours de l et m. Une position particulière de g est la perpendiculaire A_1C à l; par suite, la droite m qui passe par le point de concours de deux tangentes rectangulaires et est perpendiculaire aux diamètres, est la directrice de la parabole π.

Menons OH perpendiculaire à m, HK perpendiculaire à l, et KL parallèle à m; KL est la tangente au sommet de π.

Élevons en O sur l la perpendiculaire OB; lorsque M tend vers B, N se rapproche indéfiniment de O, et g de l. On en conclut que O est le point de contact de l avec π.

Enfin, le foyer F se trouve sur la circonférence circonscrite au triangle formé par les trois tangentes l, A_1C et KL. Comme la polaire du point A_1 de la directrice passe par O et est perpendiculaire à la droite A_1F, la circonférence de diamètre OA_1 passe également par F. On déduit de là que F est le symétrique de H par rapport à l et que la droite OF passe par le point de contact C de la tangente A_1C.

Le point P décrit la podaire du point O par rapport à π; cette courbe est une cubique circulaire qui a en O un rebroussement, la tangente étant OB.

Supposons maintenant la droite m parallèle à l. Si l'on projette O en B sur m et que l'on construise le symétrique B' de B par rapport à O, la figure B'OMN sera un parallélogramme; donc NP est perpendiculaire à B'N. Ainsi, l'enveloppe de g est une parabole qui a B' pour foyer et l pour tangente au sommet. Le lieu de P est une cissoïde de Dioclès.

2. Prenons pour axes coordonnés les droites OA_1, OB; pour plus de facilité de ce qui va suivre, nous les désignons par Ox_1, Oz et nous posons :

$$OA_1 = a_1, \quad OB = b, \quad ON = \alpha.$$

L'ordonnée de M déduite des triangles semblables A_1NM, A_1OB a pour expression $\frac{b}{a}(a_1 - \alpha)$; par suite, l'équation de g est

$$z = -\frac{\alpha a_1}{b(a_1 - \alpha)}(x_1 - \alpha), \text{ ou } a_1\alpha^2 - (a_1x_1 - bz)\alpha - a_1bz = 0. \quad (1)$$

On en conclut l'équation de l'enveloppe π :

$$(a_1x_1 - bz)^2 + 4a_1^2bz = 0. \quad (2)$$

La droite NP rencontre OB en un point Q ayant pour ordonnée :

$$\beta = \frac{a_1\alpha^2}{b(a_1 - \alpha)}, \quad \text{d'où} \quad a_1\alpha^2 + b\alpha\beta - a_1b\beta = 0. \quad (3)$$

L'équation du lieu du point P résulte de l'élimination de α entre les équations des droites OM et NP :

$$z = \frac{b(a_1 - \alpha)}{a_1\alpha}x_1, \quad z = -\frac{a_1\alpha}{b(a_1 - \alpha)}(x_1 - \alpha);$$

On trouve :

$$(x_1^2 + z^2)(a_1z + bx_1) = a_1bx_1^2. \quad (4)$$

Lorsque m est parallèle à l, les équations (2), (3) et (4) sont remplacées par celles-ci :

$$x_1^2 + 4bz = 0, \quad \alpha^2 - b\beta = 0, \quad (x_1^2 + z^2)z = bx_1^2.$$

3. Passons à l'étude de la congruence Γ.

Si les plans λ et μ sont parallèles, les droites g qui sont contenues dans un même plan ν passant par la perpendiculaire OB commune à λ et μ, enveloppent une parabole π qui a pour foyer le symétrique B' de B par rapport à O, et pour tangente au sommet la trace de ν sur λ. Par conséquent, la congruence Γ comprend les tangentes menées à un paraboloïde de révolution par un point quelconque de l'axe.

4. Si les plans λ et μ se coupent suivant une droite AA_1 (fig. 2), prenons pour axes coordonnés la perpendiculaire OA à AA_1, la parallèle Oy à AA_1 et la perpendiculaire OB à λ, qui rencontre μ en B.

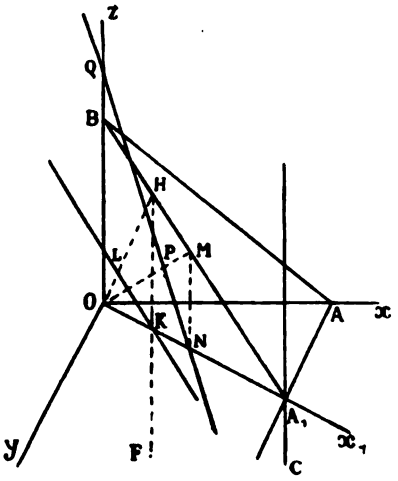


FIG. 2

Menons par OB un plan quelconque $OBA_1 = \nu$; soient a_1 et a les distances OA_1 et OA, (x_1, z) les coordonnées d'un point quelconque du plan ν par rapport aux axes OA_1, OB, et (x, y, z) les coordonnées du même point rapporté aux axes Ox, Oy, Oz. On trouve facilement les formules :

$$x_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad a_1 = \frac{ax_1}{x} = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2}}{x}. \tag{6}$$

Lorsque le point M se meut sur la droite BA_1, la droite g enveloppe la parabole π représentée par l'équation (2). En remplaçant x_1 et a_1 par les valeurs (6), on obtient :

$$[a(x^2 + y^2) - bxz]^2 + 4a^2b(x^2 + y^2)z = 0. \tag{7}$$

L'équation (7) représente évidemment une surface du quatrième ordre, lieu des paraboles π qui sont situées dans les différents plans passant par l'axe Oz, qui ont pour directrice l'intersection de ν avec μ et touchent en O la trace de ν sur λ.

Pour abréger le discours, nous appellerons cette surface la *surface méridienne* de la congruence; OB en sera l'*axe* et chacune des paraboles π, une *courbe méridienne*.

La congruence Γ est donc constituée par toutes les tangentes qu'on peut mener à la surface méridienne par un point quelconque de l'axe.

5. Cette surface jouit de propriétés remarquables.

La direction asymptotique de la courbe méridienne π est celle de la droite OH perpendiculaire à la droite A_1B. Or, lorsque le plan de π tourne autour de Oz, le lieu de H est la circonférence γ suivant laquelle le plan μ est coupé par la sphère de diamètre OB. Par suite, le cône asymptotique de la surface méridienne a pour sommet O et passe par la circonférence γ. D'après l'équation (7), le plan de l'infini touche la surface en tous les points de son intersection avec le cône (O, γ); car si l'on rend l'équation (7) homogène en écrivant :

$$[a(x^2 + y^2) - bxz]^2 + 4a^2b(x^2 + y^2)zt = 0,$$

on trouve qu'elle admet la solution :

$$t = 0, \quad [a(x^2 + y^2) - bxz]^2 = 0.$$

La dernière équation est donc celle du cône engendré par la droite OH; c'est ce que l'on pourrait aussi démontrer par un calcul direct.

Le lieu des foyers des courbes méridiennes est la circonférence γ' symétrique de γ par rapport à λ.

La parabole π admet une tangente perpendiculaire à OA_1 en A_1; le lieu de ces tangentes est le plan δ mené suivant AA_1 perpendiculairement à λ. Le plan δ touche la surface méridienne le long de son intersection avec le cône (O, γ'), courbe qui est une parabole puisque δ est parallèle au plan zOx qui touche le cône le long de la génératrice Oz.

Le dernier résultat se déduit encore aisément de l'équation (7) résolue par rapport à z ; car on trouve :

$$z = \frac{a(x^2+y^2)}{bx^2}\left(x-2a \pm 2\sqrt{a(a-x)}\right),$$

d'où, en faisant $x = a$,

$$z = -\frac{a^2+y^2}{b}, \quad \text{ou} \quad y^2 = -b\left(z+\frac{a^2}{b}\right).$$

L'équation (7) admet la solution $x^2+y^2=0$, $x^2z^2=0$. Or, l'équation $x^2+y^2=0$ représente les deux plans menés par l'axe Oz et par les points cycliques ω, ω' du plan λ. Par conséquent, l'axe Oz est une droite double de la surface méridienne et les plans $z\mathrm{O}\omega$, $z\mathrm{O}\omega'$ touchent cette surface le long des droites $\mathrm{O}\omega$, $\mathrm{O}\omega'$.

Au moyen des égalités (6), l'équation (4) se transforme en

$$(x^2+y^2+z^2)(az+bx) = ab(x^2+y^2).$$

Elle représente maintenant le lieu des projections du point O sur les droites de la congruence ; ce lieu est donc une surface du troisième ordre qui passe par le cercle imaginaire à l'infini, commun à toutes les sphères.

6. Cherchons les équations de la congruence Γ en coordonnées pluckériennes. Si (x', y', z') sont les coordonnées du point M, le plan BOM et le plan mené par N perpendiculairement à OM ont pour équations

$$xy'-yx'=0, \quad (x-x')x'+(y-y')y'+zz'=0,$$

et les *coordonnées axiales* q_{12}, q_{13},... de g sont proportionnelles aux mineurs du système d'éléments

$$\left\| \begin{matrix} y' & -x' & 0 & 0 \\ x' & y' & z' & -(x'^2+y'^2) \end{matrix} \right\|,$$

de sorte que

$$\left.\begin{array}{lll} \rho q_{12} = x'^2 + y'^2, & \rho q_{23} = -x'z', & \rho q_{31} = -y'z', \\ \rho q_{43} = 0, & \rho q_{41} = y'(x'^2 + y'^2), & \rho q_{42} = -x'(x'^2 + y'^2) \end{array}\right\} \quad (8)$$

De plus, le point M vérifie l'équation du plan μ :

$$bx' + az' = ab. \quad (9)$$

Entre les sept équations (8) et (9), il faut éliminer x', y', z' et le facteur de proportionnalité ρ. L'une des résultantes est $q_{34} = 0$; elle représente le *complexe spécial* d'axe Oz. Une autre résultante est visiblement

$$q_{13}\, q_{42} + q_{14}\, q_{23} = 0; \quad (10)$$

c'est l'identité fondamentale entre les six coordonnées q, où l'on fait $q_{34} = 0$.

Enfin, des égalités (8) on déduit

$$\rho^2 q_{23} q_{42} = x'^2 z'(x'^2 + y'^2) = \rho x'^2 z' q_{12}, \quad \rho^2 q_{31} q_{41} = -\rho y'^2 z' q_{12},$$

$$\rho(q_{23} q_{42} - q_{31} q_{41}) = z'(x'^2 + y'^2) q_{12} = \rho z' q_{12}^2,$$

$$z' = \frac{q_{23} q_{42} - q_{31} q_{41}}{q_{12}^2}, \quad x' = -\frac{\rho q_{42}}{x'^2 + y'^2} = -\frac{q_{42}}{q_{12}};$$

portant ces valeurs de x' et z' dans l'équation (9) on obtient

$$b(q_{42} + aq_{12}) q_{12} - a(q_{23} q_{42} - q_{31} q_{41}) = 0. \quad (10)$$

Il en résulte que la congruence Γ est l'intersection du complexe spécial d'axe OB avec un complexe du second ordre. Il serait intéressant d'avoir une construction géométrique simple de ce dernier complexe et d'étudier ses propriétés au moyen de l'équation (10).

Introduisons les coordonnées radiales

$$p_{12} = xy' - x'y, \quad p_{23} = yz' - y'z, \quad p_{31} = zx' - z'x,$$

$$p_{14} = x - x', \quad p_{24} = y - y', \quad p_{34} = z - z'.$$

où (x, y, z), (x', y', z') sont les coordonnées de deux points quelconques E, E' d'un rayon de la congruence. On sait que

$$\frac{q_{41}}{p_{23}} = \frac{q_{42}}{p_{31}} = \frac{q_{43}}{p_{12}} = \frac{q_{23}}{p_{41}} = \frac{q_{31}}{p_{42}} = \frac{q_{12}}{p_{43}};$$

par suite, l'équation (10) est équivalente à

$$b\,(p_{31} - a\,p_{34})\,p_{34} - a\,(p_{14}\,p_{31} - p_{24}\,p_{23}) = 0, \qquad (11)$$

ou

$$\begin{aligned} b\,[(zx' - z'x) - a(z - z')]\,(z - z') \qquad (12)\\ - a[(x - x')\,(zx' - z'x) - (y - y')\,(yz' - y'z)] = 0. \end{aligned}$$

Si $ux + vy + wz + r = 0$, $u'x + \cdots = 0$ sont les équations de deux plans quelconques ϵ, ϵ' menés par un rayon g de Γ, l'équation (10) peut encore prendre la forme

$$\begin{aligned} b\,[(rv' - r'v) - a(uv' - u'v)]\,(uv' - u'v)]\\ + a[(rw' - r'w)\,(rv' - r'v) - (wu' - w'u)(ru' - r'u)] = 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

7. La congruence Γ est évidemment du deuxième ordre et de la deuxième classe.

Les deux rayons de Γ qui passent par un point quelconque E', sont les deux tangentes menées de E' à la parabole π située dans le plan OBE'.

Cependant, lorsque le point E' appartient à l'axe Oz, les rayons qui y passent appartiennent à un cône du second ordre, qui rencontre le plan λ suivant une circonférence. En effet, entre les segments $ON = \alpha$, $OE' = \beta$ il existe la relation (3); mais si x, y sont les coordonnées de N par rapport aux axes Ox, Oy, on a

$$\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad a_1 = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Portons ces valeurs de α et a_1 dans l'équation (3); il vient

$$a\,(x^2 + y^2) + b\beta x - ab\beta = 0, \qquad (14)$$

équation d'une circonférence lieu du point N. On obtient l'équation du cône en faisant $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \beta$ dans l'équation (12); elle est

$$a\beta(x^2 + y^2) - ab(z - \beta)^2 - b\beta x(z - \beta) = 0, \qquad (15)$$

et se réduit à l'équation (14) pour $z = 0$.

Les points de l'axe Oz sont donc des *points singuliers* de Γ. Le point O et le point à l'infini de Oz peuvent même être qualifiés de *bisinguliers*, parce que le cône correspondant se réduit à un faisceau de droites situé dans le plan λ ou à un système de parallèles à Oz, situées dans le plan mené par AA_1 perpendiculairement à λ. Ces résultats qui nous sont déjà connus, se déduisent aussi de l'équation (15) en y faisant $\beta = 0$, ce qui donne $z^2 = 0$, ou $\beta = \infty$ ce qui donne $x = a$.

8. Un plan quelconque contient deux droites de la congruence; ce sont des génératrices du cône de la congruence ayant pour sommet le point de rencontre du plan avec l'axe Oz.

Cependant, ainsi qu'on le sait, les plans menés par Oz renferment une infinité de rayons de Γ qui touchent une même parabole π. C'est pourquoi ces plans sont dits *singuliers*. Le plan λ et le plan mené par AA_1 perpendiculairement à λ peuvent être dits *bisinguliers*, parce que les rayons de Γ qui y sont contenus forment un faisceau.

9. Examinons encore la surface engendrée par les droites g qui s'appuient sur une droite donnée h.

Soient $E_1(x_1, y_1, z_1)$, $E_2(x_2, y_2, z_2)$, $E'(x', y', z')$ deux points fixes et un point variable de h, $E(x, y, z)$ un point quelconque d'un rayon g de Γ mené par E'; on peut poser

$$x' = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y' = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z' = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation $xy' - x'y = 0$, on voit que $m_1 = xy_2 - x_2 y$, $-m_2 = xy_1 - x_1 y$, de sorte que x', y', z' sont des rapports de fonctions linéaires de x et y. En substituant ces rapports dans l'équation (12), on obtient une équation du quatrième degré en x, y, z, qui représente la surface cherchée.

Voici une autre manière d'établir ce résultat. Soit Q le point de

rencontre de la génératrice E'E avec l'axe Oz ; entre les ponctuelles [E'] et [Q] il existe une correspondance (2, 2). En effet, par un point quelconque E' de *h*, on peut mener deux rayons de Γ ; de même en un point quelconque Q de Oz, il passe deux rayons s'appuyant sur *h* aux points de rencontre de cette droite avec le cône quadratique des rayons issus de Q. Cela posé, si l'on projette sur une droite quelconque *k* la ponctuelle [E'] à partir de la droite Oz, et la ponctuelle [Q] à partir de la droite *h*, on obtient sur *k* deux ponctuelles entre lesquelles il existe une correspondance (2,2) et qui, par suite, ont quatre points doubles. Une droite menée par l'un de ces points doubles et s'appuyant sur *h* et Oz est un rayon de Γ ; donc la surface considérée est du quatrième ordre, ayant deux droites doubles Oz et *h*.

Prenons pour *h* une droite quelconque du plan λ ; alors la surface du quatrième ordre se compose du plan λ, lieu des droites *g* passant par O et d'une surface Σ du troisième ordre, laquelle est susceptible d'une définition très simple. En effet, lorsque le point M (fig. 3) parcourt une droite quelconque *h'* du plan μ, le point N décrit une ponctuelle *h* semblable à la ponctuelle [M] et, par suite, projective avec le faisceau O[M]. Par conséquent, la surface Σ est le lieu des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque d'une ponctuelle [N] sur le rayon correspondant d'un faisceau de rayons

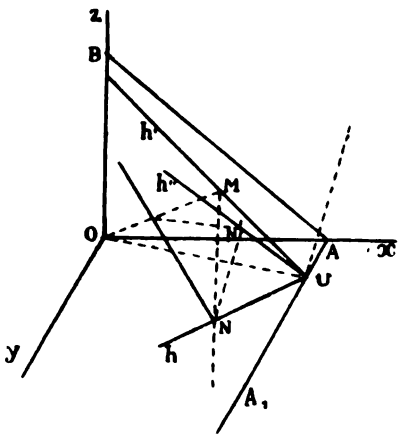


FIG. 3

O[M] projectif avec cette ponctuelle et non situé avec elle dans un même plan.

Pour déterminer directement l'ordre de cette nouvelle surface, projetons N en N' sur le plan Oh' et joignons les points N' et P; la droite N'P sera également perpendiculaire à OM. Comme le point N' décrit une ponctuelle h'' projective avec le faisceau O(M). la droite N'P enveloppe une parabole π'. Le point P décrit la podaire de O par rapport à π', courbe qui est une cubique circulaire V ayant en O un point double et appartenant évidemment à la surface Σ; celle-ci est donc bien du troisième ordre. Soit U le point de AA_1 où se coupent les trois droites h, h', h''; lorsque N est en U, NP est la perpendiculaire élevée en U sur OU, dans le plan Oh'; donc U appartient à la cubique V. Un plan quelconque mené par h coupe V en deux points autres que U; par ces points passent deux génératrices de Σ, et comme h est une droite simple de Σ, on voit de nouveau que cette surface est du troisième ordre.

10. Pour terminer, cherchons encore la surface lieu des tangentes au sommet des paraboles méridiennes π.

Les segments interceptés sur les axes Ox_1, Oz (fig. 1) entre l'origine et la tangente KL se déduisent de la relation (3) combinée avec la proportion $\alpha : \beta = a_1 : b$; donc

$$\alpha = \frac{a_1 b^2}{a_1^2 + b^2}, \quad \beta = \frac{b^3}{a_1^2 + b^2},$$

et l'équation de KL est

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{z}{b} = \frac{b^2}{a_1^2 + b^2}.$$

Les coordonnées d'un point de cette droite par rapport aux axes Ox, Oy, Oz étant désignées par x, y, z, on a vu que $x_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a_1 = a\sqrt{x^2 + y^2} : x$; par conséquent, la surface considérée a pour équation

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{b}\right)[(a^2 + b^2)x^2 + a^2y^2] = b^2x^2.$$

Elle est du troisième ordre.

Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 31e année, 1re partie, pp. 130-140.

Imp. Joseph Pellenis, Ixelles, Tél. 8060

M. H. BROCARD
Ancien élève de l'École Polytechnique, à Bar-le-Duc

LA
BIBLIOGRAPHIE de la GÉOMÉTRIE du TRIANGLE
De 1895 à 1905

Extrait des Comptes rendus de
l'Association Française pour l'Avancement des Sciences

CONGRÈS DE LYON — 1906

PARIS
SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION
(Hôtel des Sociétés Savantes)
28, RUE SERPENTE

ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES
Fusionnée avec
L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE
(Fondée par Le Verrier en 1864)

CONGRÈS DE LYON. — 1906

M. H. BROCARD

Ancien élève de l'École Polytechnique, à Bar-le-Duc.

LA BIBLIOGRAPHIE DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE DE 1895 A 1905

— Séance du 6 août —

Le présent catalogue est destiné à faire suite aux trois relevés qui ont paru dans l'*Annuaire de l'Association*. Le premier a été donné par M. E. Lemoine en 1885; les deux autres, de 1889 et de 1895, sont dus à M. Vigarié.

Depuis cette époque, le désir a été exprimé d'une continuation de ce travail, et nous devons des remerciements à M. C. Alasia, professeur au gymnase d'Ozieri (Sardaigne), d'avoir bien voulu s'en charger et de nous avoir autorisé à le présenter à l'Association. Auteur lui-même d'une *Géométrie du Triangle*, parue en 1900, M. Alasia s'est trouvé naturellement amené à étudier un grand nombre de travaux se rapportant à ce sujet. Il lui a été facile de le tenir à jour. Nous avons simplement ajouté quelques titres qui avaient échappé à son attention.

M. Alasia a conservé la même disposition que dans les Catalogues précités, mais il a désigné les noms d'auteurs dans leur ordre alphabétique.

Cette communication devrait être accompagnée d'une liste des abréviations conventionnelles employées pour dénommer les titres des recueils mentionnés. Nous avons pensé que ces abréviations sont familières aux lecteurs que le sujet intéresse. La liste en a d'ailleurs été donnée, soit dans les Catalogues antérieurs, soit au Répertoire Bibliographie des Sciences mathématiques, réédité à diverses reprises.

Nous avons pareillement supprimé le relevé des questions relatives à la géométrie du Triangle, proposées dans les journaux mathématiques, *The Educational Times*, Journal de Hoffmann, *Mathesis*, et Nous comptons le donner à une autre occasion.

1889

P.-H. SCHOUTE. — Over viervlakken door gelijkvormige driehoeken begrens Ac. des sc. d'Amsterdam (3), VI, 462-481, 1 pl.

1890

R.-E ALLARDICE. — On some properties of the quadrilateral, PERS., VIII

A. MULLER. — Ueber den Brocard'schen Kreis als geometrischen Ort und die demselben verwandten Kegelschnittschaaren A. Gr.

— Ueber Kegelschnitte die zu dem Dreieck verallgemeinerten. A. Gr.

1891

R.-E. ALLARDICE. — Some geometrical theorems. PEMS, IX.

— On some properties of a triangle of given shape inscribed in a given triangle, PEMS, IX.

J. GRIFFITHS. — Notes on the Recent Geometry of the Triangle, Oxford. 39 pages.

J. NEUBERG. — Sur la géométrie récente du triangle et du tétraèdre (Note au Traité de géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, 445-516).

R.-J.-C. NIXON. — Supplement to Euclid revised, Oxford, 28 p.

A. SCHIAPPA MONTEIRO. — Bulletin scientifique (juillet).

1892

R. TUCKER. — On a group of triangles inscribed in a given triangle A B C, whose sides are parallel to connectors of any point P with A B C., PLMS., t. XXIV, 131-143.

1893

E. BERTRAND. — Notes sur quelques propriétés relatives aux projections des sommets d'un triangle sur les bissectrices, JE. (4), II, 174-179.

E. LEMOINE. — Lettre à M. G. de Longchamps, JE. (4), II, 135-136.

J.-S. MACKAY. — Note de géométrie, JE. (4), II, 97-100.

A. POULAIN. — Points à l'infini sur certaines droites, JE. (4), II, 77-78.

1894

A. GOB. — Le rapport anharmonique étudié au point de vue de la géométrographie, AF. (Caen), XXIII.

J. GRIFFITHS. — Note on a variable Sevenpoints circle analogous to the Brocard circle of a Plane Triangle, PLMS, XXV, 75-85.

— Note on four Special Circles of Inversion of a System of Generalized Brocard Circles of a Plane Triangle PLMS, XXV, 376-388.

J. LANGE. — Geschichte des Feuerbach'schen Kreises, Progr. Berlin.

1895

R.-F. DAVIES. — The nine point circle, PEMS, XIII.

— The Brocard point and the Brocard angle, PEMS, XIII.

F.-W. FRANKEMBRACH. — Die Harmonicalen der Mittelpunkt der Berührungkreise eines Dreiecks, Progr. Liegnitz.

J. GRIFFITHS. — Note on some properties of a generalized Brocard circle, PLMS, XXVI, 173-183.

LANGLEY. — On the circle of Apollonius, MG., I, 41.

E. LEMOINE. — Etude sur le triangle et sur certains points de Géométrographie, PEMS., XIII.

— Nota sobre la clipse circumscripta de Steiner, PEMS, V.

J.-S. MACKAY. — Isogonals of a triangle, PEMS, XIII, 14 p.

J.-J. MILNE. — The conics of Apollonius, MG., I, 49.

R.-F. MUIRHEAD. — Note on triangle transformations, PEMS, XIII.

R. TUCKER. — Properties of some groups of Wallace lines, PEMS., XIV.

E. VIGARIÉ. — La Bibliographie de la géométrie du triangle, AF. (Bordeaux), XXIV, 50-63.

1896

P. BARBARIN. — Systèmes isogonaux du triangle. — AF. (Carthage), XXV, 89-105.

— Triangle dont les bissectrices sont données, M. (2), VI, 143-160.

E. N. BARISIEN. — Sur les triangles équilatéraux inscrits à une conique, M. (2), 14-15.

— Sur les triangles formés par les tangentes communes à trois cercles donnés, M. (2), VI, 33-37, 60-64.

G. BROCARD. — Centre des transversales angulaires égales, M. (2), VI, 217-221.

A. DROZ-FARNY. — Sur les triangles équilatéraux inscrits à une conique, M. (2), VI, 107-109.

J.-J. DURAN-LORIGA. — Sur les cercles radicaux, M. (2), VI, 105-107.

W. GODT. — Sur le cercle de Feuerbach et sur une courbe du quatrième ordre et de la troisième classe envisagée par Steiner (All.), Sitzung. zu München, XXVI, 119-166.

J. GRIFFITHS. — Note on some properties of a generalized Brocard Circle, PLRS, XXVI.

V. JERABEK. — Sur les triangles à la fois semblables et homologiques, M. (2), VI, 81-83.

E. LEMOINE. — Questions relatives à la géométrie du triangle, à la géométrographie et la transformation continue, AF. (Carthage) XXV, 58-73.

H. LIEBER. — Ueber die Isogonischen und Isodinamischen Punkte des Dreiecks, *Progr. d. Fried.-Wilhelms Schule zu Stettin*, 27 p., 1 pl.

J.-S. MACKAY. — Symmedians of a triangle and their concomitant Circles. PEMS, XIV, 67 p., 40 fig.

J. NEUBERG. — Sur un lieu géométrique élémentaire, M. (2), VI, 83.

— Sur un système de coniques, M. (2), VI , 164-173.

— Note sur l'article précédent (de M. G. Brocard), M. (2), VI, 87.

— et QUETELET. — Problème de Bruno, M. (2), VI, 19-20, *à suivre*.

E. STUDY. — Ueber Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie, *Sitz. d. K. Sœchs, Gesells d. Wissensch.*

SOONS. — Théorème de géométrie, M. (2), VI, 57-60.

G. TARRY. — Sur un triangle isoscèle, M. (2), VI, 41.

J. DE VRIES. — Recherches sur les coordonnées multipolaires, AT. (2), IV 99-157.

1897

R.-J. ALEY. — Contributions to the Geometry of the triangle, *Publications of the University of Pennsylvania, New-series*, n° 1.

— Collinear sets of three points connected with the triangle, *Proceedings of Acad. of Sciences, Indiana University.*

J.-F. d'AVILLEZ. — Sur un certain triangle AF. (Saint-Etienne), XXVI. 131-133.

— Sur un groupe de trois paraboles, (*Ibid.*), 133-135.

E.-N. BARISIEN. — Etude d'un triangle remarquable AF. (Saint-Etienne). XXVI, 107-128.

G. CANDIDO. — Un teorema sui triangolo, PML, XII, 187-189.

A. DROZ-FARNY. — Sur un théorème de Schroeter et sur la droite δ de Longchamps, AF. (Saint-Etienne, XXVI, 136-146.

J.-J. DURAN-LORIGA. — Deuxième note sur les cercles radicaux et anti-radicaux, JE. (4), VI.

— Notes de géométrie, AF. (Saint-Etienne), XXVI, 175-189.

KORSELET. — Sur le problème des bissectrices, ZS., XLII, 304-312.

J.-S. MACKAY. — Isogonic centres of a triangle, PEMS, XV, 19 pages.

E. PERRIN. — Préliminaires d'une Géométrie du triangle. AF. (Saint-Etienne), XXVI, 90-107.

RICHTER. — Construction des axes d'inertie d'un triangle, ZS, XLII, 339-340.

J.-M.-J. SACHSE. — Der fünfte merkwürdige Punkt in Dreieck, ZH, XXVII.

1898

R.-J. ALEY. — A new triangle and some of its properties, *Proceedings of Indiana Academy of Sciences*, n° 1, 89-91.

— Concurrent sets of three lines connected with the triangle, *Proceedings of Indiana Academy of Sciences*, n° 1, 93-100.

BILLUPS. — Continuous Transformation, MG, I, 177.

G. CANDIDO. — Cenni de Geometria del triangolo, SPML, I, 6-8, 22-25, 70-71, 89-90.

U. CERETTI. — Triangoli rettangoli a lati commensurabili fra loro, SPML, II, 17-19.

J.-J. DURAN-LORIGA. — Sur les cercles remarquables du triangle, AF. (Nantes), XXVII, 147-155.

J. GREENSTREET. — Note on Simson Line, MG, I, 158.

J.-S. MACKAY. — Continuous Transformation, MG, I, 209.

A. MARTINI-ZUCCAGNI. — Sulla distanza d'un punto arbitrario dal baricentro del triangolo, SPLM, I, 9-12.

R.-F. MUIRHEAD. — Continuous Transformation, MG, I, 209.

N. QUINT. — La droite générale de Wallace d'un polygone inscrit (angl.), NAW (2), III.

— Sur une extension du théorème de Wallace (angl.), NAW. (2),

L. RIPERT. — La dualité de l'homographie dans le triangle et le tétraèdre, IM. V. supplément, 59 pages.

C.-E. SMITH. — The Geometry of Simson's Line, *Proceedings of Indiana Academy of Sciences*, n° 1, 101-117.

J.-A. THIRD. — Modern Geometry of the Point, Stright-Line and Circle, *Edinburgh and London.*

1899

R.-J. ALEY. — A proposed notation for the Geometry of the Triangle, *Proceedings of Indiana Academy of Sciences*, 86-87.

— Some Circles connected with the triangle, *Proceedings of Indiana Academy of Sciences*, 88-89.

— The Point P (point de Gergonne) and some of its properties, *Proceedings of Indiana Academy of Sciences*, 90-93.

G. CANDIDO. — Formules pour l'étude d'une figure remarquable, NA. (3), XVIII.

GALLUCI. — Alcuni teoremi di Geometria elementare, SPML, II, 97-99.

R. GUIMARAES. — Equacion del Circulo de Joachimsthal, PMS. (2), I.

A. KRAHE. — Nota acerca de un punto del plano del triangulo, PMS. (2), I.

— Sobre el punto de Gergonne de las conicas inscriptas de un triangulo, PMS. (2), I.

E. LEMOINE. — Comparaison géométrographique de douze constructions déduites de onze solutions d'un même problème, AF. (Boulogne), XXVIII, 102-127.

J. NEUBERG. — Sur le centre des moindres carrés, AB. XXIII.

J.-A THIRD. — Systems of Circles analogous to Tucker Circles, PEMS., XVII, 30 pages.

— Systems of Conics connected with the Triangle, PEMS., XVII, 14 pages.

M. VICKER. — Feuerbach's Theorem, A. Gr., I, 257.

1900

C. ALASIA. — La recente Geometria del triangolo, *Città di Castello*, vol. de XVI-339 pages.

— 566 relazioni fra gli elementi d'un triangolo piano, *Città di Castello*, brochure de 35 pages.

R.-J. ALEY. — Some properties of the Symmedian Point, *Proceedings of Indiana Academy of Sciences*, 85-88.

G. CANDIDO. — Pour la géométrie récente, NA., (3), XIX.

F. CASPARY. — Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle, NA. (3) XIX, 75-77.

A. DROZ-FARNY. — Sur un théorème de Steiner, SMH.

J.-J. DURAN-LORIGA. — Notas matematicas, PMS. (2), II.

E. JAHNKE. — Ueber dreifach perspectivische Dreiecke in der Dreiecksgeometrie, Progr. scolaire, Berlin, 26 p.

— Eine dreifach perspectiven Dreiecken zugehörige Punktgruppe (Cr. 42-47).

— Construction gewisser Punkte aus der Dreiecksgeometrie (Cr. 48-53).

E. LEMOINE. — Comparaison géométrographique de diverses constructions d'un même problème *(suite)*, AF., Paris XXIX, 74-78.

— Suite de théorèmes et de résultats concernant la géométrie du triangle, AF. (Paris), XXIX, 79-111.

J. NEUBERG. — Barycentre podaire et barycentre symétrique, NAW (2), I.

L. RIPERT. — Etude sur des groupes de triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une même conique ou à des familles de coniques, AF. (Paris), XXIX, 112-133.

J. SCHICK. — Beziehungen zwischen Isogonalcentrik und Invariantentheorie (Acad. de Münich XXX, 249-272, 6 fig.

J.-W. TESCH. — Sur la question 1.044 de l'Intermédiaire, NAW. (2), IV.

J.-A. THIRD. — Sur les triangles trihomologiques, M. (2), IX.

— Two Geometrical Transformations, PEMS., XVIII, 14 pages.

R. TUCKER. — Notes ou isoscelians, PLMS, XXXIII, 87-90.

— Two in-triangles wich are similar to the pedal triangle, PLMS XXXIII, 91-97.

— The Brocardal properties of some associated triangles, PLMS XXXIII, 404-405.

1901

L. DE ALBA. — Nota sobre un nuevo circulo de la Geometria del triangulo, RTM, I, 79-83.

R. E. ALLARDICE. — On a cubic curve connected with the triangle, PEMS XXI, 62-65.

— Su i fuochi di una conica inscritta in un triangolo, MPA, I. 1-135.

— Note on four circles touching a common circle, PEMS, XIX, 4 pages.

— On the nine-point Conic, PEMS, XIX, 23-82.

H. VAN AUBEL. — Une proposition, M (3), I, 195-196.

E.-N. BARISIEN. — (2056) Lieu des centres des cercles exinscrits à des triangles à cercle circonscrit et inscrit communs, IM, VIII, 28.

G. BIASI. — Sopra un estenzione del torema di Wallace, MPA, I. 281.

F. CASPARY. — Zur neueren Dreiecksgeometrie, A. Gr. (3), I, 269-288.

C. A. CIKOT. — Eenige eigenschappen van driehoeren, wier hoekpunten langs rechte lijnen bewegen, VW, XVI, 151-156.

G. DELITALA. — Relazioni dipendenti da raggi uscenti da un punto e passanti pei vertici d'un triangolo, MPA, I, 5-12.

— La rizoluzione completa del tetragono piano, PML, XVI, 198.

— Un correlativo del teorema di Stewart, PML, XVII, 41-48.

A. DROZ-FARNY. — Sur un théorème de Steiner. *Mémoires de la Soc. des Sciences de Berne*, 18 p. 7 fig.

— Note sur un théorème de Steiner, M (3), I, 22-24.

E. DUPORCQ. — (2143) Démonstration géométrique d'un théorème, IM, VIII, 331-333.

J.-J. DURAN-LORIGA. — Sui parametri dell' equazione del cerchio in coordinate baricentriche, MPA, I, 77-78, 101-105.

G. FONTENÉ. — Sur les triangles non isoscèles qui ont deux bissectrices extérieures égales, M (3), I, 24-25.

L. GIANNI. — Contributo allo studio della Geometria del triangolo, PML, XVII, 127-137.

HERTER. — Die Dreiecktransversalen, ZS, XXXII, 505-512.

E. LEMOINE. — Sur le point du cercle circonscrit dont les coordonnées normales sont $\frac{a}{b^2 - c^2}, \ldots$ M (3), I, 131-132.

G. DE LONGCHAMPS. — La Geometria dei triangoli, PML., XV, 112.

E. MALO. — (1753) Choix des coordonnées dans la Géométrie du triangle, IM, VII, 99-101.

J. MATHOT. — Sur un point remarquable du quadrilatère inscriptible, M (3), I, 25-26.

M. MITTAG. — Die anschaulische Behandlung des Satzes von Ceva, ZS, 619-623.

A.-A. MOLL VAN SANTBERGEN. — Een merkwaardige cirkel, VW, XVI, 91-102.

T.-T. MOSCU. — Théorème de Géométrie démontré au moyen du théorème de Pythagore, CMB, VI, 150-152.

J. NEUBERG. — Sur les triangles orthologiques, M (3), I, 157-158.

— Die Verwandtschaft zwischen einer Geraden und ihren Lotpunkt in Bezug auf ein Dreieck, AGr, III.

L. RIPERT. — Sur les triangles parallélogiques et leurs applications, AF. (Ajaccio), 91-106.

— Notes sur le quadrilatère, AF. (Ajaccio), 106-118.

— Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle, AGr (3), I, 310-318.

W. RUTHEFORD. — Formules du triangle. *Parues dans le « Mathematician ; puis dans* A. Gr., VII, 217-221: *la même année* (1901), M (3), I, 117-118, *les reproduit en partie sous le titre « Géométrie du triangle », et propose à ses lecteurs de calculer les rayons des huit cercles qui touchent les trois cercles décrits sur les côtés de* ABC *comme diamètres.*

N. SCHMIT. — Sur le cercle des neuf points. *Programme de l'Athénée Grand-Ducal de Luxembourg*, 63 pages.

M. SOONS. — Propriétés du triangle, M (3), I, 159-160.

G. TARRY. — Théorème de géométrie, M (3), I, 191-193.

J.-A. THIRD. — Triangles triply in perspective, PEMS, XIX, 10-22.

R. TUCKER. — The Brocardal properties of some associated triangles, PLMS, XXXIII, 404-405.

J. TVERDOVSKY. — Démonstration au moyen de la théorie des transversales du théorème d'après lequel les hauteurs d'un triangle concourent en un point, VSO, 25e *semestre*, 68-69.

C. TWEEDIE. — Note on the expression for the area of a triangle in cartesian coordinates, etc., PEMS, XIX, 2-4.

J. WASTEELS. — Propriétés des triangles qui sont inscrits à un même cercle et circonscrits à un même second cercle, M (3), I, 271-272.

— Sur une propriété du triangle isoscèle, M. (3), I, 65-69.

— Sur les bissectrices d'un triangle, M. (3), I, 133.

... (1930). Valeurs des rayons des cercles tangents aux trois cercles exinscrits d'un triangle, IM., VII, 119.

... (1932). Lieu du point de rencontre des couples de droites de Wallace généralisées de même inclinaison, IM., VII, 119-120.

... Dimostrazione della formolo dell'area del triangolo in funzione dei lati, P.,VII, 136-137.

1902

C. ALASIA. — Saggio-terminologico-bibliografico sulla Recente Geometria del triangolo, *Bergamo*, brochure de 43 pages.

— Saggio di nomenclatura sulla Geometria del triangolo, P., VIII, 43-49, 73-75, 100-104, 125-131.

L. DE ALBA. — Formulas de la Geometria del triangulo, RTM. II, 1-17, 49-62, 104-115, 145-161, *à suivre*.

R.-E. ALLARDICE. — On some systems of Conics connected with the Triangle, PEMS, XX, 40-43.

H. Van AUBEL. — Notes de Géométrie, M. (3), II, 246-250.

— Bilatères et trilatères en Métagéométrie, M. (3), II.

E.-N. BARISIEN. — (2325) Propriété du triangle isoscèle, IM., IX.

— (2057). Construire un triangle dont on connaît les longueurs de symédianes ou des syhauteurs, IM., IX, 76.

— (2429. Triangles à un angle $\frac{\pi}{6}$ de Brocard, IM., IX.

— (2430). Quand est-il possible de construire un triangle, 1° avec les hauteurs ; 2° avec les bissectrices intérieures ; 3° avec les bissectrices extérieures d'un triangle donné ? IM., IX.

G.-N. BATES. — Tripolar coordinates, MG., II (183-188).

G. BIASI. — Di due nuove forme del teorema di Wallace, PML. (2), I, 179-181.

H.-F. BLICHFELDT. — Demonstrations of a pair of theorems in Geometry, PEMS, XX, 16-17.

H. BROCARD. — (1782) Philo's Line, IM., IX.

T.-J. BROMWICH. — Notes on Conics in areals, MG., II, 175-179.

A.-G. BURGESS. — Theorems in connection with lines drawn through a pair of points parallel and antiparallel to the sides of a triangle, PEMS, XX, 6-7.

CANON (pseud.). — Autre démonstration du théorème de Feuerbach, (4), II, 500-501.

G. CESARO. — Généralisation des formules d'Euler, MSL. (3), IV, n° 3.

E. COLLIGNON. — Problème de géométrie : Construire un triangle, connaissant les trois bissectrices intérieures, AF. (Montauban), 1-13.

H.-A. CONVERSE. — On the hypocycloids of class three inscribed in a 3-line, *Baltimore. John Hopkins University Circulars*, XXII.

G. DELAHAYE. — Sur les triangles pseudo-isoscèles, M. (3), II, 112-114.

G. DELITALA. — Nuove proprieta dei punti notevoli del triangolo, PML, (2), IV, 124-137.

— Construire un triangle, connaissant une bissectrice de chacun des trois angles, M. (3), II, 159-162.

— Su di un sistema di coordinate trilineari, MPA, II, 154-160.

J. DÉPREZ. — Géométrie du triangle, M. (3), II, 64-67.

J.-J. DURAN-LORIGA. — Sopra una trasformazione per rette isobariche, MPA, II, 121-122.

— Sur les triangles isogonologiques, AF. (Montauban), 157-165.

— Nota de Geometria del triangulo, RTM, II, 145-162.

T. FALCJEV. — Nouveau point remarquable du triangle, VSO, 28e semestre, 173-181.

F. FERRARI. — Sur les triangles trihomologiques, M. (3), II, 5-12.

P.-A. FONTEBASSO. — Una risoluzione elementare d'un problema geometrico, BMB, I, 219-220.

G. FONTENÉ. — Sur un certain triangle, M (3), II, 43.

K. GEISSLER. — Die Saetze von Menelans, Ceva und von sollstadigen Vierseite und das Unendliche, ZH, VIII, 83-87.

L. GIANNI. — Contributo allo studio della Geometria del triangolo, PML, (2), IV, 127-137.

W. GODT. — Ueber einige sogenannte merkwürdige Punkte des Dreiecks. Progr. Lübeck. 23 pages ; suite : 15 pages, 1 pl.

N.-J. HATZIDAKIS. — (2.422) Construire un triangle, connaissant les sommets des triangles équilatéraux construits sur ses côtés, IM, IX.

V. HIOUX. — Nouvelle démonstration du théorème de Feuerbach, NA (4), II, 254-256.

J.-G HUN. — Invariant relations of two triangles, *Baltimore. John Hopkins University Circulars*, XXI, 90.

C.-A. LAISANT. — Remarques sur les bissectrices d'un triangle, EM, IV, 284-287.

E. LEBON. — Propriétés métriques du triangle, BME, VII, 129-131.

— Théorème sur deux triangles ayant deux angles égaux et deux angles supplémentaires, BME, VII, 161-162.

E. LEMOINE. — Transformation continue dans le triangle, AGr (3), III, 249-256.

— (1996) Sur un plan du point d'un triangle en rapport avec trois forces, IM, IX, 20-22.

— (2104) Relation particulière entre deux triangles, IM,IX, 25.

A. LIBICKY. — Nouveaux théorèmes de Caspary relatifs à la Géométrie du triangle, CMF, XXXI, 24-33, 105-115, 189-201, 273_283.

J.-S. MACKAY. — History of a theorem in elementary Geometry, PEMS. XX, 19-22.

— Note on the Theorem of Menelaus and Ceva, PEMS, XX, 35-39.

J. MAJCEN. — Deux droites particulières dans la Géométrie du triangle, BAA, CLI, 69-80.

R.-F. MUIRHEAD. — Notes on the theorem of Menelaus and Ceva, PEMS, XX, 62-66.

— Constructions connected with Euclid VI. and the Circle of Apollonius, PEMS, XX, 67-69.

J. NEUBERG. — Sur le quadrilatère complet, AB, XXVI, 9 pages.

— Sur la similitude des cercles, M (3), II, 85-89.

— Sur les quadrangles et les quadrilatères parallélogiques, M (3), II, 153-158.

— Sur quelques cas particuliers d'un théorème de Grassmann, M (3), II, 2501253, 265-266.

— (338, 1605) Construction géométrique du point M d'un plan donné dont la somme des distances à trois points extérieurs donnés est un minimum, IM, IX, 267.

L. RIPERT. — Sur les triangles orthologiques, M (3), II, 91.

II, 30-34.

— Sur une extension élémentaire du théorème de Wallace, MPA

— Su due triangoli di Brocard ed una retta di Eulero, MPA. II, 158-160.

C. SERVAIS. — Théorèmes de M. Van Aubel *(démonstr. géométrique)*, M (3), II, 273-274.

H.-A.-W. SPECMAN. — Eeen nieuwe cirkel in den modernen driehoek, NAW (2), II, V, 367-373.

E. VISCONTI. — Alcune nuove dimostrazioni del teorema di Pitagora, BMB, III, 45-52.

C. WAFELBAKKER. — (1955) Etant donnés les symétriques des sommets d'un triangle par rapport aux côtés opposés, construire le triangle, IM, IX, 17-20.

J. WASTEELS. — Théorèmes de Métagéométrie relatifs aux médianes d'un triangle, M (3), II, 39-42.

M. WEILL. — Sur les distances mutuelles des points remarquables d'un triangle, BME, VII, 241-243.

J.-N. WISSCHERS. — Een eigenschap van den vlakken driehoek, VW, XVII, 128.

... (2283) Lieu des points à triangles podaires d'aire constante, IM, IX.

... Sur un théorème célèbre (Théorème de Stewart), BME, VII, 177-178.

... (2145) Bibliographie du Théorème de Feuerbach, IM, IX, 30.

1903

L. DE ALBA. — Formulas de la Geometria del triangulo *(suite)*, RTM, III, 1-12, 83-92, 131-143, 186-196.

H. VAN AUBEL. — Notes de Géométrie, M (3), III, 22-23.

E.-N. BARISIEN. — Sur une nouvelle définition du point de Lemoine d'un triangle, M (3), III, 112.

H.-F. BLICHFELDT. — Proof of a theorem concerning isosceles triangles, RMS (2), IV, 22-24.

G. BONFANTINI. — Costruire due triangoli desiguali aventi cinque elementi rispettivamente uguali, BMB, II, 11-13, et 13-14.

F.-P. BUONVINO. — Triangoli disuguali con cinque elementi uguali, SPML, VI, 49-50.

A.-G. BURGESS. — Notes on antireciprocals points, PEMS, XXI, 88-95.

L.-S. DE LA CAMPA. — (2303) Démonstration géométrique du théorème de Pythagore, IM, X.

CANON (pseud.). — Démonstration de la construction trouvée par Hamilton pour déterminer le point où le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit, NA (4), III, 13-15.

— Autre démonstration du théorème de Feuerbach, BME, VIII, 132-133.

L. CASTEELS. — Notes de Géométrie, M (3), III.

C.-A. CIKOT. — Quadrilatère complet, NAW (2), VI, 62.

— Sur un point remarquable du quadrilatère inscrit, NAW (2), VI, 63-65.

G. DELITALA. — Nuove proprietà dei punti notevoli del triangolo, PML (2), V, 185-191.

J. DÉPREZ. — Géométrie du triangle, M (3), III, 64-68.

— Sur les triangles automédians, M (3), III, 196-200, 226-230, 245-248.

P. DOLGOUCHINE. — Triangles rationnels, VSO, 30e *semestre*, 145-157.

V. EDUARDO. — Nouvelles démonstrations du théorème de Pythagore, RS (4), XXI, 368-370.

D. EFREMOV. — Sur les lignes « équi-inclinées » d'un triangle, VSO, 30e *semestre*, 178-182.

E.-B. ESCOTT. — (2583) Construire un triangle rectangle, étant données l'hypoténuse et la longueur de la bissectrice de l'angle droit, IM, X, 268-269.

M.-W. HASKELL. — Generalisation of a fundamental theorem in the Geometry of the Triangle, AMM, X, 30-33.

— Generalisation of a fundamental theorem in the Geometry of the triangle, AGr (3), V, 278-281.

V. HIOUX. — Sur la droite de Simson, M (3), III, 167-168.

C.-A. LAISANT. — Propriété élémentaire du triangle, SP (9), IV, 121-122.

G. MAJCEN. — Neue Beitræge zur Dreiecksgeometrie, A. Gr. (3), IV, 299.

V. MICHAILOV. — Démonstration géométrique du théorème généralisé de Pythagore, VSO, 29e *semestre*, 37-38.

S.-N. MIRCA .— Quelques théorèmes concernant des cercles, GMB, VIII, 245-248.

F. MORLEY. — Orthocentric properties of the plane n-line, TAMS, IV, 1-12.

D. NASTURAS. — Propriétés des cercles passant par deux sommets et l'orthocentre du triangle, GMB, VIII, 53-55, 221-224.

J. NEUBERG. — Sur les couples de triangles homologiques dont les sommets sont situés sur six droites données, M (3), III, 105-108.

— Deux théorèmes sur la droite d'Euler, M (3), III, 134-136.

— Sur la question 1287 (page 32), M (3), III, 134-136.

— Métaparallélisme et orthologie, M (3), III, 200-201.

— Sur un groupe de trois paraboles, M (3), III, 249-250.

— Kegelschnitte aus der Dreiecksgeometrie, AGr (3), IV, 281-287.

A.-S. RAMSEY. — (1238) Démonstration originale du Théorème de Feuerbach, IM, X.

H.-A.-V. SPECKMAN. — Sur l'hyperbole de Feuerbach, M (3), III, 265-270.

P.-F. TEILHET. — (2496) Démonstration du théorème de Pythagore, IM, X.

J.-A. THIRD. — Triangles in Multiple Perspective wiewed in connection with Determinants of the third order, PEMS, XXI 116-137.

TURRIÈRE. — Note sur les cercles exinscrits à un triangle, BME, VIII, 261-262.

H. DE VRIÈS. — Een tiental merkwaardige eigenschappen van den driehoek. VW, XVIII, 40-45.

— Eenige eigenschappen van den rechthoekigendriehoek, VW, XVIII. 50-56.

— (2507) Point de Lemoine du multilatère, IM, X.

1904

C. ALASIA. — Un antico problema di Geometria piana, P, X, 65-73.

L. DE ALBA. —Formulas de la Geometria del triangulo *(suite)*, RTM, IV 10-19.

P. BARBARIN. — A propos d'un théorème sur le triangle, EM, III, 237-239.

E.-N. BARISIEN. — (2768) Lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans un triangle donné, IM, XI ,225-229.

— (2585) Construire un triangle, connaissant les pieds des trois symédianes, IM, IX, 21.

R. BERARD. — Triangles dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers, BME, IX, 225-227.

C. BIOCHE. — Sur la distinction analytique des régions déterminées par un triangle ou par un tétraèdre, IM, XI, 492-494.

R. BRICARD. — Ordre de grandeur de deux côtés d'un triangle et des bissectrices correspondantes, BME, IX, 195.

A. CADENAT et J. NEUBERG. — Sur le triangle dont deux symédianes sont perpendiculaires, M (3), IV, 37-39.

E. CANTONI. — A propos d'un théorème sur le triangle, EM, III, 409-411.

J. DÉPREZ. — Sur la question de M. Fitz-Patrick, M (3), IV, 266.

A. DROZ-FARNY. — Sur une formule de M. E. Lemoine, M (3), IV, 86-87.

— Osservazioni geometriche sulla retta di Simson, P, X, 3-4.

E.-B. ESCOTT. — (2737) Inventaire de la Géométrie du triangle, IM, XI, 136.

P. FAURE. — A propos d'un théorème sur le triangle, EM, III, 406-407.

FITZ-PATRICK. — Solution d'un problème de Géométrie élémentaire, M (3), IV, 108-110.

G. FONTENÉ. — Sur les triangles isoscèles, BME, IX, 146-147.

G. FRANKE. — A propos d'un théorème de Géométrie, EM, III, 407-409.

J.-W.-L. GLAISHER. — On the angles of pedal triangles of a triangles and some arithmetical questions connected therewith, MM, XXXIV, 140-141.

H. HILTON. — A propos d'un théorème sur le triangle, EM, III, 236-237.

J. KARIYA. — Un théorème sur le triangle, EM, III, 130-132.

T. LALESCU. — Propriétés du cercle orthocentroïdal, GMB, IX, 31-34.

T. LEMOYNE. — Note de Géométrie, NA (4), IV, 400-402.

R.-F. MUIRHEAD. — Solution of a Geometrical Problem, PEMS, XXII, 74-75.

D. NASTURAS. — Une propriété des triangles isoscèles, CMB, IX, 174-179.

J. NEUBERG. — Exercices sur l'hyperbole $xy = 1$, M (3), IV, 187.

— Sur un groupe de trois paraboles (*cf.* 1903), M (3), IV, 67.

A. PARISSOTTI. — I triangoli che anno lati ed area espressi per mezzo di numeri razionali, SPML, VII, 116-119.

T. PATRICIU. — Sur les triangles homologues à un triangle, qui sont inscrits ou circonscrits à ce triangle, GMB, IX, 223-226.

E. PICCIOLI. — Distanze di alcuni punti notevoli nel tetraedro, PML (3), II, 123-126.

— Contributo alla Geometria recente del triangolo sferico, PML (3), II, 181-187.

— Contributo alla Geometria recente del tetraedro, PML (3), II, 201-207.

P. PINKERTON. — Note on Mr. Tweedie's Theorem in Geometry, PEMS, XXII, 27.

N. PLAKHOWO. — (2439) Propriété du point de Lemoine de rendre minimum $x^2 + y^2 + z^2$. IM, XI, 195.

N. QUINT. — (2771) Bibliographie du problème de la construction d'un triangle, connaissant trois bissectrices, IM, XI, 229-230.

— (2773) Réimpression du travail original de Feuerbach, IM, XI, 231.

T. RIETTI. — Un teorema sul triangolo isoscele, P. X.

Y. SAWAYAMA. — An elementary demonstration of Feuerbach's Theorem, TKG, II, 119.

L.-A. SILVA. — Construccion de problemas en que entran una o mas medianas, RMS.

A. TAFELMACHER. — (2705) Deux théorèmes sur le triangle, IM, XI, 107.

— (2787) Dans un triangle ABC inscrire un triangle $A_1 C_1 B_1$ semblable à $A_2 C_2 B_2$ et d'aire minimale, IM, XI, 271.

C. TWEEDIE. — Inequality Theorem regarding the lines joing corresponding vertices of two equilateral, or directly similar, triangles, PEMS, XXII, 22-26.

E. WEBER. — Sur une formule de M. E. Lemoine et sur la question 1405, M (3), IV, 86.

— (2782) Propriété du centre de la conique des pieds des médianes et des symédianes, IM, XI, 117.

... (2772) Minimum de la transversale XPY d'un triangle XAY passant par un point P donné, IM, XI, 230.

1905

A. AUBRY. — Sur les triangles rectangles en nombres entiers, M (3), V, 6-13.

E.-N. BARISIEN. — (2886) Maximum d'un certain triangle, IM, XII, 50.

CANON (pseud.). — Nouvelle démonstration du théorème de Feuerbach, NA (4), V, 257.

P. CAROLLO. — Su alcune proprietà dei triangoli, P, XI, 9899.

P. CATTANEO. — Esercizi sul triangolo rettangolo, P, XI, 41-45.

A. CHIARI. — Applicazioni d'un teorema, P, XI, 19-22.

CRACIUNESCU. — Propriété du triangle, GMB, X, 77-80.

A. DROZ-FARNY. — Notes géométriques sur l'hyperbole d'Apollonius, *Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern*, 8 p., 1 fig.

H. FILIP. — Point du géomètre japonais Kariya, GMB, X, 53.

G. FONTENÉ. — Discussion d'un triangle donné par les points remarquables O,I,H, NA (4), V, 241.

— Extension du théorème de Feuerbach, NA (4), V, 504.

— Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés, NA (4), V, 529.

A. KRAHÉ. — Les centres isodynamiques dans la résolution de l'équation du troisième degré. M (3), V, 61-66.

T. LEMOYNE. — Lieu du centre de gravité d'un triangle. IM, XII, 6.

G. DE LONGCHAMPS. — (2891) Sur les quadrilatères remarquables. IM, XII 52.

E. MALO. — (2922) Rôle d'un certain cercle dans la Géométrie du triangle. IM, XII, 178.

E. PICCIOLI. — Sulla Geometria recente del tetraedro. P, XI, 45-50.

R.-P. STEPHENS. — A system of parastroids arising from the projection of a variable point in the Wallace line at a fixed inclination. *Baltimore, John Hopkins University Circulars (Nouvelle série)*, n° 1, 1-9.

A. TAFELMACHER. — Sobre triangulos inscritos en un triangulo dado. BMSC, II, 191-196.

E. WAELSCH. — Binæranalyse zur Geometrie des Dreiecks. Monatsh. f. M. u. P. T. XVI, 273-311.

E. WEBER. —Sur quelques coniques associées au triangle. M (3), V, 149-151.

— Sur un système de droites isotomiques. BS, VII.

— Transformation au moyen d'un système de droites isotomiques. BS, VII.

Lyon — Imp A Storck et Cie 8 rue de la Méditerranée

Analyse de quelques publications récentes

SUR LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE (*)

PAR

Paul MANSION

Professeur à l'Université de Gand

I

ROBERTO BONOLA. LA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA. Esposizione storico-critica del suo sviluppo con 69 figure. Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1906. In-8°, de VIII-216 pages. Prix : 5 lire.

M. R. Bonola, bien connu de tous ceux qui s'occupent de géométrie non euclidienne comme auteur de notes savantes sur la matière et surtout de travaux consciencieux et complets sur la bibliographie y relative, fait, dans le volume dont nous venons de transcrire le titre, un exposé à la fois historique et critique du développement de cette partie de la science. Nous allons en analyser les divers chapitres en signalant ce qui nous y frappe surtout et en indiquant aussi les endroits où nous ne sommes pas d'accord avec l'auteur.

I. *Les essais de démonstration du cinquième postulat d'Euclide* (pp. 1-19). 1. Comme on le sait, Euclide (300 ans avant J.-C.) base la théorie des parallèles (définies comme droites d'un plan qui ne se rencontrent pas), sur le POSTULAT DES TROIS DROITES : *Deux droites d'un plan coupées par une troisième avec laquelle elles font, d'un côté, des angles intérieurs dont la somme est moindre que deux droits se rencontrent de ce côté.*

(*) Extrait de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, octobre 1907, t. LII, pp. 615-629.

Posidonius (I^er^ siècle avant J.-C.), pour éviter le postulatum d'Euclide, propose d'appeler parallèles deux droites d'un plan qui sont équidistantes; cette définition implique ce nouveau postulat que l'équidistante d'une droite est une droite. Geminus (I^er^ siècle avant J.-C.) remarque d'ailleurs qu'il existe des courbes, telles que l'hyperbole et la conchoïde, qui, prolongées indéfiniment, ne rencontrent pas une droite, savoir leur asymptote : L'asymptote et l'hyperbole sont parallèles dans le sens d'Euclide, elles ne le sont pas dans le sens de Posidonius. L'équidistance et le parallélisme ou la non-rencontre de lignes prolongées indéfiniment ne sont donc pas des propriétés équivalentes. Geminus trouve d'ailleurs que l'existence des asymptotes est le fait *le plus paradoxal* de toute la géométrie (1).

Ptolémée (II^e^ siècle ap. J.-C.) établit la théorie des parallèles en partant du postulat suivant : Si deux droites qui ne se rencontrent pas faisaient, d'un côté, avec une transversale des angles dont la somme est supérieure à deux droits, il en serait de même de l'autre côté. Proclus (410-485) (à qui sont dus les renseignements précédents sur Posidonius, Geminus, Ptolémée), admet que la distance de deux parallèles est toujours finie et en déduit le postulatum.

Malgré cela, Proclus suppose en deux endroits différents de son commentaire du premier livre d'Euclide, qu'il n'est pas impossible qu'il y ait des droites asymptotes l'une de l'autre : *deux droites coupées par une transversale avec laquelle elles forment des angles internes dont la somme est inférieure à deux droits pourraient ne pas se rencontrer*, bien que, le segment de la transversale restant le même, les droites se rencontrassent, si la somme des angles internes diminuait.

Ce passage de Proclus est extrêmement remarquable parce qu'il montre que, *contrairement à la légende*, les anciens n'ont pas admis la vérité absolue du postulat V d'Euclide.

D'après un commentaire arabe d'Al-Nirizi (IX^e^ siècle) sur Euclide, Aganis, un ami de Simplicius (VI^e^ siècle), le célèbre commentateur d'Aristote, a établi la théorie des parallèles en supposant comme Posidonius qu'il y a des droites équidistantes.

2. Chez les Arabes, on ne trouve rien d'original sur la question des parallèles, sauf chez Nassireddin (1201-1274) qui admet

(1) Aujourd'hui encore, l'asymptotisme paraît très singulier aux commençants et bien des géomètres de profession, débutant en géométrie non euclidienne, trouvent aussi très paradoxal le théorème de Saccheri : *Deux droites peuvent être asymptotes l'une de l'autre.*

comme postulat l'existence du rectangle, c'est-à-dire du quadrilatère ayant les quatre angles droits et les côtés opposés égaux. Il en déduit aisément le postulatum d'Euclide.

3. A la Renaissance et au XVII[e] siècle, Commandin (1509-1575), Clavius (1537-1612), Cataldi (?1548-1626), Borelli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711), admettent tous au fond le postulat de Posidonius; mais le dernier le restreint, car il parvient à le prouver si trois points seulement d'une droite sont à la même distance d'une troisième. — Wallis (1616-1713) démontra le postulatum d'Euclide en en admettant un plus compliqué et contenant des conditions superflues : *il existe des triangles semblables*. Parmi les auteurs de cette période, les uns laissèrent le postulat des trois droites parmi les postulats, les autres le transportèrent parmi les axiomes comme aussi la première édition imprimée du texte grec des *Éléments* d'Euclide (1533).

II. *Les précurseurs de la géométrie non euclidienne* (pp. 19-57). 1. *G. Saccheri* (1667-1733) est, par excellence, le précurseur de la géométrie non euclidienne, dans son *Euclides ab omne naevo vindicatus*, « non seulement parce qu'il a démontré rigoureusement les premiers principes de la géométrie lobatchefskienne, mais surtout parce qu'il est le créateur de la critique des postulats. Pour voir si le postulat V d'Euclide est indépendant des vérités géométriques admises, Saccheri crée un système de géométrie indépendant de ce postulat ». Nous avons publié une analyse critique de ses recherches dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES (1890, t. XIV, 2[e] partie, pp. 46-59) et dans *Mathesis* (1891). Il nous suffira ici de résumer sur deux points essentiels l'exposé de M. Bonola.

Saccheri étudie un quadrilatère birectangle isoscèle ABCD : les angles B, C sont droits, les côtés AB, CD sont égaux. On peut faire trois hypothèses sur les angles A et D, qui sont égaux, selon qu'ils sont droits, obtus, ou aigus. Ces trois hypothèses dites de l'angle droit, de l'angle obtus ou de l'angle aigu correspondent à la géométrie euclidienne, à la riemannienne, et à la lobatchefskienne. Saccheri essaie de prouver que si, dans un seul cas, l'une ou l'autre de ces hypothèses est vraie, il en est toujours de même. La démonstration est insuffisante parce qu'elle s'appuie sur Euclide I, 17 et il en est de même, croyons-nous, de la démonstration de M. Bonola. De Tilly a établi ce théorème dans *Mathesis*, d'une manière simple, mais en recourant au principe de continuité.

Saccheri prouve que l'hypothèse de l'angle obtus est incompatible avec les proportions admises dans les éléments avant la théorie des parallèles. En essayant, en vain, de faire la même démonstration pour l'hypothèse de l'angle aigu, il établit rigoureusement ce théorème fondamental de géométrie lobatchefskienne : *Deux droites se rencontrent, ou sont asymptotes, ou ont une perpendiculaire commune.*

2. *Lambert* (1728-1777). L'ouvrage de Saccheri, signalé dans les histoires des mathématiques de Heilbronner (1742) et de Montucla (1758), analysé avec soin dans une dissertation de Klügel patronnée par Kaestner (1763), a probablement été la source directe ou indirecte de toutes les recherches ultérieures.

Lambert, dont le travail (1766) fut publié après sa mort, en 1786, étudie les trois hypothèses de Saccheri sur un quadrilatère trirectangle, moitié de celui de Saccheri et trouve ce théorème important (en germe d'ailleurs dans une remarque de Saccheri) : *Dans l'hypothèse de l'angle aigu, l'aire d'un triangle est proportionnelle à la différence entre deux droits et la somme de ses angles*, comme s'il était tracé sur une sphère imaginaire ; mais cela entraînerait l'existence d'une unité absolue de mesure, ce qui est absurde, selon lui.

3. *Divers géomètres. D'Alembert* (1717-1783) admet comme évident que tous les points d'une droite sont équidistants d'une autre s'il en est ainsi de deux d'entre eux. *Lagrange* (1736-1813) a observé que la trigonométrie sphérique est indépendante du postulatum d'Euclide, ce qui est vrai. *Carnot* (1753-1823) et *Laplace* (1749-1827) regardent le postulat de Wallis comme la base naturelle de la théorie des parallèles. D'après *Fourier* (1768-1830), on devrait définir le plan et la droite comme les lieux des points équidistants de deux ou de trois points. *Legendre* (1752-1833) prouve avec rigueur que la somme des trois angles d'un triangle est égale ou inférieure à deux droits si la droite est infinie ; que cette somme est égale à deux droits si elle l'est dans un seul triangle ; qu'il en est vraiment ainsi s'il n'y a pas dans les équations qui lient les angles et les côtés d'un triangle, un paramètre analogue au rayon des triangles sphériques, une unité absolue de mesure. *Wolfgang Bolyai* (1775-1856) prend comme postulat la proposition : *Par trois points, on peut toujours faire passer un cercle* ; Wachter (1792-1817) la suivante : *Par quatre points, on peut faire passer une sphère.* De plus, Wachter fait cette remarque juste : Dans un système de géométrie où le postulat d'Euclide ne serait pas vrai pour un plan, il serait vrai sur une sphère de rayon infini.

III. *Les fondateurs de la géométrie non euclidienne* (pp. 58-74). 1. *Gauss* (1777-1855). Nous avons donné un aperçu des travaux de Gauss dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES (1901, t. XXV, 1re partie, pp. 104-107). On peut résumer notre analyse et celle de M. Bonola de la manière suivante : De 1794 jusque vers 1816, Gauss s'assimile ou retrouve de lui-même et complète, sous la forme la plus nette, les résultats obtenus jusqu'alors sur les principes de la géométrie; à partir de 1816, au moins, il voit que la géométrie non euclidienne dépendant d'un paramètre est aussi légitime que la géométrie euclidienne correspondant à une valeur infinie de ce paramètre; il trouve la métrique non euclidienne; enfin, il fait observer que l'existence de deux géométries également rigoureuses, également possibles renverse les vues subjectivistes de Kant sur l'espace.

2. *Schweikart* (1780-1859), dans une note (1818) destinée à Gauss, énonce quelques théorèmes de géométrie non euclidienne que l'on trouve dans Saccheri et Lambert, mais où il affirme de plus que ceux-ci que la géométrie astrale, comme il appelle celle qui porte maintenant le nom de géométrie lobatchefskienne, est la vraie géométrie générale et est peut-être réalisée dans la nature.

3. *Taurinus* (1794-1874), neveu du précédent, publie, en 1826, ses *Geometriae prima Elementa* qui contiennent la métrique dite plus tard lobatchefskienne; il l'obtient en supposant purement imaginaires les côtés d'un triangle sphérique. Cette métrique correspond à l'hypothèse de l'angle aigu de Saccheri et de Lambert. Taurinus croit d'ailleurs que cette métrique ne peut s'appliquer dans le plan, mais il conjecture qu'elle est peut-être réalisée sur quelque autre surface, ce qui est vrai (Beltrami).

IV. *Les fondateurs de la géométrie non euclidienne. Suite* (pp. 75-119). 1. *Lobatchefsky* (1793-1856). Lobatchefsky est le principal créateur de la géométrie non euclidienne, parce qu'il en a exposé le premier les principes (1829), qu'il l'a fait sous deux formes différentes, l'une directe, l'autre inverse, qui, au point de vue philosophique, se complètent, et avec d'importantes applications au calcul intégral, à la mesure des longueurs, des aires et des volumes; enfin parce qu'il a publié en français et en allemand des écrits de vulgarisation qui, après sa mort, attirèrent enfin l'attention des géomètres sur cette partie de la science. M. Bonola fait connaître la méthode de Lobatchefsky sous la forme que le géomètre russe lui a donnée, dans ses

Recherches géométriques. Il aurait fallu signaler en outre au moins, selon nous, les recherches de Lobatchefsky sur les notions fondamentales de la géométrie (sphère, plan, droite), et sa méthode inverse, parce que c'est celle-ci surtout qui donne à Lobatchefsky et aux géomètres la certitude de l'indémontrabilité du postulatum d'Euclide.

2. *Jean Bolyai* (1802-1860). M. Bonola analyse avec soin l'*Appendix* à l'ouvrage de W. Bolyai, où Jean Bolyai a exposé en 1832, trois ans après Lobatchefsky, sous une forme extrêmement condensée, la géométrie lobatchefskienne; puis divers écrits publiés récemment qui prouvent que le géomètre hongrois voyait beaucoup moins que Lobatchefsky la portée philosophique de sa découverte et qu'il en doutait même parfois.

3. *Trigonométrie absolue*. M. Bonola introduit la fonction $\mathrm{E}x$ de De Tilly (rapport d'un segment d'équidistante de hauteur x à sa base) et $\mathrm{O}x$ de Bolyai (circonférence de rayon x) pour écrire comme il suit, en trigonométrie plane, sphérique ou lobatchefskienne, les formules fondamentales relatives à un triangle A B C, rectangle en C :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{O}a = \mathrm{O}c \sin \mathrm{A}, & \cos \mathrm{A} = \mathrm{E}a \sin \mathrm{B}; & \mathrm{E}c = \mathrm{E}a\,\mathrm{E}b; \\ \mathrm{O}b = \mathrm{O}c \sin \mathrm{B}, & \cos \mathrm{B} = \mathrm{E}b \sin \mathrm{A}; & \end{array}$$

d'où l'on déduit la jolie formule de M. Bonola :

$$\mathrm{O}^2a\,(\mathrm{E}a + \mathrm{E}b\mathrm{E}c) + \mathrm{O}^2b\,(\mathrm{E}b + \mathrm{E}c\mathrm{E}a) = \mathrm{O}^2c\,(\mathrm{E}c + \mathrm{E}a\mathrm{E}b).$$

4. *Hypothèses équivalentes au postulat des trois droites*. M. Bonola donne ici une idée de la géométrie semi-euclidienne de Max Dehn, où l'on n'admet pas le postulat d'Eudoxe (dit d'Archimède) : la somme des angles d'un triangle y est égale à deux droits, mais par un point on peut mener plus d'une non-sécante à une droite.

5. *La diffusion de la géométrie non euclidienne*. Baltzer (1818-1887), Houel (1823-1886), G. Battaglini (1826-1894), Beltrami (1835-1900), par leurs écrits originaux ou leurs traductions des écrits des inventeurs nous semblent devoir surtout être signalés comme propagateurs de l'idée non euclidienne; puis aussi De Tilly (1838-1906), dont, selon nous, M. Bonola ne parle pas assez, pas plus que de Veronese, Pieri et Barbarin; sans doute, l'exposé de leurs travaux ne rentrait pas dans son plan.

V. *Développements successifs de la géométrie non euclidienne* (pp. 120-172). A. *Direction métrique différentielle* (pp. 121-144). 1. Géométrie sur une surface. 2. Fondements d'une géométrie plane selon les idées de Riemann. 3. Fondements d'une géométrie de l'espace suivant Riemann. 4. L'œuvre de Helmholtz et les recherches de Lie. Ces différents paragraphes renferment beaucoup de renseignements sur les travaux de Riemann, de Beltrami, de Klein, de Hilbert, de Liebmann, de Max Dehn, etc., sur la géométrie des géodésiques des surfaces à courbure constante, négative ou positive; puis aussi sur la géométrie de faisceaux de droites, ou de demi-droites, correspondant à la géométrie doublement ou simplement elliptique, et sur la géométrie non legendrienne de Max Dehn (indépendante du postulat d'Eudoxe, avec droite non fermée, somme des trois angles d'un triangle supérieure à deux droits). Mais il y manque l'analyse de la vraie géométrie riemanienne de l'espace développée en 1878 par De Tilly, et de plusieurs de ses travaux ultérieurs et antérieurs. Les écrits de Riemann, de Helmholtz et de Lie, dont il est question dans les §§ 3 et 4, sont, selon nous, de l'analyse pure : les coordonnées dont il y est question n'ont pas de définition géométrique.

B. *Direction projective* (pp. 173-192). 1. Subordination de la géométrie métrique à la géométrie projective. 2. Représentation de la géométrie lobatchefskienne dans le plan euclidien. 3. Représentation de la géométrie elliptique de Riemann dans l'espace euclidien. 4. Fondation de la géométrie en partant de concepts graphiques. 5. Indémontrabilité des postulats. — Dans ces divers paragraphes, l'auteur donne des indications rapides sur les travaux de Laguerre, de Cayley, de Klein au moyen desquels on obtient une représentation *presque* parfaite des géométries non euclidiennes, dans l'espace euclidien, en y supposant invariante une conique ou une quadrique fondamentale, quand on effectue des transformations projectives. — A propos du § 1, nous ne croyons pas que l'on ait jamais établi l'indépendance de la géométrie projective de la géométrie métrique. L'indémontrabilité des postulats et leur compatibilité avec les définitions de la géométrie, ne dépendent nullement, selon nous, de la représentation des géométries non euclidiennes dans l'espace euclidien, mais de l'analyse que Lobatchefsky a faite de ces notions premières dans sa méthode inverse et des travaux de De Tilly sur la géométrie comme physique mathématique des distances.

Note I. Les principes fondamentaux de la statique et le postulatum d'Euclide (pp. 173-192). Analyse d'un excellent Mémoire de Genocchi (1877) sur un travail de Daviet de Foncenex (1760-1761) dont l'idée fondamentale est probablement due à Lagrange.

Note II. Les parallèles et la surface de Clifford (pp. 193-208). Étude élémentaire d'un couple de droites riemanniennes équidistantes, non situées dans un même plan, et de la surface (équidistante ou hypersphère) engendrée par l'une en tournant autour de l'autre. M. Barbarin dans son ouvrage sur les quadriques non euclidiennes a aussi étudié ce couple et cette surface.

Index des noms (pp. 211-213). *Errata* (p. 215).

Le livre de M. Bonola, malgré les petites lacunes que nous avons dû y signaler, est très propre à initier ceux qui voudront le lire attentivement à l'ensemble de recherches très diverses que l'on désigne aujourd'hui sous le nom de géométrie non euclidienne.

Pour les philosophes, en particulier pour les admirateurs de Kant, il les guérira, espérons-le, de cette *conception historique fausse que la géométrie a toujours été regardée comme apodictiquement démontrée à l'égal de la théorie des nombres.* Au contraire, depuis Euclide jusqu'à Lobatchefsky, les géomètres n'ont jamais été tranquilles sur le célèbre postulat des trois droites : ils ont toujours essayé de le démontrer jusqu'au jour où ils ont vu qu'il était indémontrable, qu'il n'était pas une suite des notions premières, bases de la géométrie.

II

RATIONAL GEOMETRY, a Text-Book for the Science of Space based on Hilbert's Foundations by G. B. HALSTED, A. M. Princeton, Ph. D. Johns Hopkins. First Edition. — New-York, John Wiley and Sons. London, Chapman and Hall. 1904. In-12 cartonné à l'anglaise de VIII-285 pages. Prix : 1,75 dollar (1).

M. Hilbert a publié en 1899, puis en 1903 avec des remaniements profonds, ses *Grundlagen der Geometrie* où il s'est efforcé de mettre en évidence, en les classant soigneusement, les postulats implicitement employés dans les traités de géométrie.

(1) Une seconde édition revue, de VIII-273 pages (prix : 1,50 dollar), a paru en 1907. M. Halsted signale dans une note ce qui la distingue de la première : « Il y a, dit-il, dans la nouvelle édition, des simplifications inattendues : l'auteur

M. Halsted, le savant et zélé protagoniste de la géométrie non euclidienne aux États-Unis, à qui l'on doit la traduction anglaise des ouvrages de Saccheri, de Bolyai et de Lobatchefsky, outre des livres originaux et de nombreux articles sur les progrès de la géométrie générale, a publié sa *Rational Geometry* pour faire entrer dans le domaine de l'enseignement, au moins pour les maîtres, les vues de M. Hilbert sur les principes de la science de l'espace.

Il faudrait lire la *Rational Geometry* à la loupe, si j'ose ainsi dire, et refaire, pour son propre compte, le même travail de dissection, d'analyse minutieuse des bases de la géométrie et de reconstruction de l'édifice des Éléments que M. Halsted, pour pouvoir critiquer utilement et minutieusement son livre. Il faudrait en même temps l'expérimenter dans une classe, pour pouvoir dire jusqu'à quel point il convient de remplacer, dans l'enseignement, par le raisonnement explicite, les intuitions ou les raisonnements implicites auxquels on recourt maintenant. Très probablement, les deux modes d'exposition, le rationnel et l'intuitif, diffèrent moins au fond qu'il ne semble au premier abord. Comme Gauss l'a remarqué, il y a toujours un résidu intuitif dans toute géométrie, sans quoi elle ne serait plus de la géométrie, mais de l'analyse. D'autre part, tel croit faire appel à l'intuition, qui, sans le savoir, s'adresse à l'esprit, parce que *la raison*, dit Aristote, *voit les concepts dans les images*. La bonne méthode est sans doute celle qui réussit à donner l'esprit géométrique aux élèves moyennement doués au point de vue de l'intelligence et de la volonté, sans les troubler par des discussions trop minutieuses sur les premiers principes, mais aussi sans affaiblir l'aspiration naturelle des jeunes esprits pour les démontrations rigoureuses, en faisant trop souvent appel à l'évidence sensible. Aux bons maîtres de se tenir dans ce juste milieu, entre l'enseignement d'une géométrie rationnelle trop abstraite et celui d'une géométrie purement empirique. Mais pour cela, ils doivent connaître, sinon les *Grundlagen* de M. Hilbert ou ceux de Veronese et de Pieri, au moins la géométrie élémentaire du second ou la *Rational Geometry* de Halsted.

Donnons une indication sommaire des matières exposées dans ce dernier ouvrage.

1. Premier groupe de postulats : postulats d'association entre les notions de point, droite, plan. 2. Postulats de l'ordre relatif.

a trouvé qu'il n'est pas nécessaire d'employer le cercle comme auxiliaire, soit dans les démonstrations, soit dans les constructions, et il a pu ainsi abréger et dégager la géométrie d'une manière étonnante. »

Sont rejetées dans le premier appendice les démonstrations de ces théorèmes se rattachant à ce chapitre : si B est entre A et C, et C entre A et D, C est entre B et D et réciproquement. 3. Postulats sur l'égalité en vue d'éviter l'idée de mouvement et le transport idéal des figures qu'il est difficile de décrire sans commettre un cercle vicieux. 4. Postulat de la parallèle unique. 5. Cercle. A la fin de ce chapitre se trouve le postulat d'Eudoxe ou définition des grandeurs de même espèce (un multiple suffisamment grand d'une grandeur surpasse toute grandeur de même espèce) que M. Hilbert, on ne sait pourquoi, a appelé postulat d'Archimède. Dans la suite, chaque fois qu'il le peut, l'auteur évite de se servir de ce postulat. M. Zeuthen a remarqué qu'Euclide s'en passe aussi dans une grande partie des Éléments. 6. Problèmes de construction, en n'utilisant le compas que comme transporteur de segments. 7. Égalités et inégalités entre côtés, angles et arcs. 8. Calcul des segments. 9. Proportions et similitude. Les segments a, b, c, d, forment une proportion si l'on a $ad = bc$ dans le sens géométrique indiqué dans le chapitre précédent; les triangles sont semblables s'ils sont équiangles. 10. Equivalence, aire en définissant, comme M. Gérard (voir MATHESIS, 1897, pp. 265-266), l'aire du triangle comme la moitié du produit de la base par la hauteur. 11. Géométrie des plans dans l'espace; c'est l'équivalent de la première moitié du livre XI des *Éléments* d'Euclide ou du livre V de ceux de Legendre. 12. Polyèdres et volumes. Le volume du tétraèdre est, par définition, comme chez M. Gérard, le tiers du produit de la base par la hauteur. Notons en passant (n° 399, p. 186) la jolie formule $4V = H\,(B + 3S)$ pour le volume d'un prismatoïde de base B, de hauteur H, de section S aux trois quarts de la hauteur, un prismatoïde étant un agrégat de tétraèdres compris entre deux polygones parallèles où se trouvent leurs sommets, leurs bases, ou leurs arêtes opposées. Nous regrettons de ne pas rencontrer dans ce chapitre le beau théorème de Darboux : *Tout tétraèdre est la somme de six hexaèdres autosymétriques*, d'où résultent l'équivalence des figures symétriques et la solution d'un paradoxe de Kant et des philosophes qui ignorent les premiers éléments de la géométrie. 13. Figures sur la sphère. Aire et volume de la sphère. La vieille solution du problème : *trouver le rayon d'une sphère dont on connaît une partie* (n° 546, p. 202) devrait être remplacée par celle de De Tilly, dont le principe est dans Pappus et qui est applicable à beaucoup d'autres questions analogues : on cherche et on trouve aisément sur la

sphère trois points équidistants de deux points pris sur cette sphère et, par suite, appartenant à un grand cercle. 14. Cône et cylindre. 15. Sphérique pure ou géométrie à deux dimensions sur la sphère, traitée en employant le minimum des postulats des premiers chapitres. 16. Angles trièdres et polyèdres.

Appendices. 1. Théorèmes d'ordre relatif. 2. Les postulats du compas. 3. Méthodes de résolution des problèmes. — *Index.* — Sept cents exercices choisis sont distribués entre les divers chapitres du livre.

La *Rational Geometry* de M. Halsted est écrite avec une concision extrême et contient beaucoup de matière sous un petit volume, à cause des notations abrégées dont se sert l'auteur. Après les *Éléments* d'Euclide, et avec les manuels de Faifofer et de Veronese, nous n'en connaissons pas de plus suggestif pour les professeurs trop habitués à l'ordre des matières et aux démonstrations des Éléments de Legendre et de ses succédanés; il les fera réfléchir non seulement sur les principes fondamentaux de la géométrie, mais aussi sur la manière la plus simple ou la plus naturelle d'en exposer telle ou telle théorie.

III

Encyclopädie der elementaren Geometrie bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Walter Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. — Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1905. (In-8° cartonné de XII-604 pp.) Prix : 12 marcs (1).

L'*Encyclopédie de la Géométrie élémentaire* ne répond guère à son titre, semble-t-il; on n'y trouve pas, en effet, comme dans le Traité de Rouché, un exposé relativement complet des plus belles recherches anciennes et modernes des géomètres proprement dits dans le domaine élémentaire de leur science. L'ouvrage contient une étude très personnelle sur les principes de la géométrie par M. Wellstein (premier livre), un abrégé de trigonométrie, de géométrie analytique et de stéréométrie dû à M. H.

(1) Second volume de l'*Encyclopädie der Elementar-Mathematik.* Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von H. Weber und J. Wellstein, Professoren in Strassburg. Leipzig, Teubner. Le tome I, contenant l'Algèbre élémentaire et l'Analyse par H. Weber, a paru en 1903; le tome III, contenant les applications, entre autres la mécanique et la géométrie descriptive, en 1907.

Weber (première section du second livre, et troisième livre), enfin un exposé un peu long de la sphérique et de la trigonométrie sphérique, par M. W. Jacobsthal (seconde section du second livre).

Sommaire. *Premier livre : les principes de la géométrie, par J. Wellstein* (pp. 1-201). *Introduction* (pp. 3-4) : l'auteur déclare ne pas vouloir faire un exposé systématique de la géométrie, mais discuter surtout la portée de chacune des hypothèses fondamentales qui sont la base de cette science.

I. *Critique des concepts fondamentaux* (pp. 5-27). 1. Historique (exact, avec çà et là de petites inexactitudes; même remarque pour les autres indications historiques contenues dans l'ouvrage); metagéométrie (cette désignation est de Leibniz). 2-4. Critique des concepts : point, ligne, surface; droite, plan, parallèles; mouvement et égalité. Au premier abord, l'auteur semble empiriste, mais, au fond, il emploie comme tout le monde tous les concepts qu'il déclare incomplètement définis. 5. Constructions de Steiner au moyen de la règle et d'une seule [illegible] 6. La géométrie naturelle [illegible] *réaliste* [illegible] de Pasch, [illegible] sur [illegible]

propos, qu'il n'est pas tout à fait d'accord avec M. Wellstein, sinon pour le fond, au moins pour la forme. Personnellement, sur les questions principales abordées dans cette section, nous trouvons qu'il est plus simple d'étudier dans Euclide, Lobatchefsky, De Tilly (ce dernier spécialement pour la géométrie riemannienne que l'on ne peut guère trouver ailleurs), Gérard (géométrie analytique non euclidienne), les trois branches naturelles de la métagéométrie que dans les ensembles compliqués de cercles et de sphères de M. Wellstein, ou dans la traduction antérieure de Cayley, en géométrie projective. Au point de vue philosophique, Gauss (contre Kant), Lobatchefsky, De Tilly (sur la compatibilité logique de chacune des branches de la métagéométrie), sans compter les géomètres-philosophes italiens plus récents, ont dit, depuis longtemps, tout l'essentiel.

III. *La géométrie projective* (pp. 148-219). 15. Les axiomes ou postulats d'association et d'ordre relatif, en admettant que, réellement ou fictivement, deux droites d'un plan se rencontrent toujours, comme en géométrie riemannienne. 16. L'axiome de Dedekind et le théorème fondamental de la géométrie projective, démontré en utilisant au minimum la notion de continuité, d'après les idées de M. Hilbert. 17. Les propriétés projectives essentielles des coniques. 18. Métrique projective. 19. Bibliographie (avec des additions, pp. 601-602).

IV. *Planimétrie* (pp. 220-301). 20. Propositions fondamentales (d'après les vues de M. Hilbert). 21. Similitude comme cas particulier de la collinéarité. 22. Les aires (d'après MM. Hilbert et Gérard); le théorème de Pythagore (démonstration de Saint-Venant). 23. Polygones réguliers et cercle. 24. Théorèmes et problèmes sur le cercle, entre autres le problème du cercle tangent à trois autres. 25. Théorie élémentaire des coniques; pour la suite, l'auteur renvoie au petit manuel de Zeuthen.

Livre deuxième. Trigonométrie (pp. 303-438). V. *Trigonométrie plane et polygonométrie*, par M. H. Weber (305-339), §§ 26-35. L'auteur expose clairement et brièvement toutes les questions essentielles en dix paragraphes : les fonctions trigonométriques d'angles inférieurs à un droit, ou quelconques, auquel cas la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante sont définies par les relations $\operatorname{tang} x = \sin x : \cos x$, etc. (comme M. Mandart l'a proposé); les formules fondamentales; la multiplication et la division des angles; le calcul des triangles, des quadrilatères; les points de Brocard; les polygones; le périmètre

et l'aire des polygones réguliers. Le théorème de Simson, dit de Stewart, est donné sous la forme ordinaire et non sous la forme si utile $\lambda\,(x1)^2 + \mu\,(x2)^2 + \nu\,(x3)^2 = 1$, liant les distances d'un point quelconque x à trois points 1, 2, 3 d'une droite, λ, μ, ν, étant indépendants de x.

VI. *Sphérique et trigonométrie sphérique*, par W. Jacobsthal (pp. 340-438). §§ 36-56. On trouve dans cette section non seulement les questions traitées habituellement dans les manuels, mais toutes les *complications* qui s'y introduisent, quand on considère des triangles dits de Mobius où les côtés peuvent varier de 0 à 2π et les angles être plus grands que deux droits mais inférieurs à quatre, mais aussi des triangles de Study où les côtés et les angles sont absolument quelconques. Nous n'avons pas rencontré la formule analogue au théorème de Simson-Stewart, $\lambda \cos(x1) + \mu \cos(x2) + \nu \cos(x3) = 0$, si importante en métagéométrie. Le § 83 (pp. 517-524), dans le livre suivant, est aussi dû à M. Jacobsthal : il traite de sphérique analytique et peut se rattacher à la présente section.

Livre troisième. Géométrie analytique et stéréométrie, par H. Weber (pp. [illegible]). VII. *Géométrie analytique du plan* (pp. 441-510). §§ 57-61. Coordonnées ; la droite, théorèmes de Ceva et de M[illegible]. §§ 62-[illegible]. Le cercle, les axes radicaux. §§ [illegible]. [illegible]. §§ 70-82. Propriétés [illegible] tangentes, asymptotes, [illegible] de courbure. [illegible]

VI[illegible] (pp. 525-[illegible]). §§ 84-87. IX. [illegible] des corps ronds) (pp. [illegible]). §§ [illegible]. X. [illegible] et polyèdres réguliers (pp. [illegible]). §§ [illegible]. [illegible] et savant, [illegible]. Au § 88, [illegible] signaler la célèbre [illegible] une limite pour [illegible] une surface, quand [illegible], sur les groupes de [illegible] des questions d'ordre [illegible] autres endroits, [illegible] à découvrir, [illegible] questions élémentaires [illegible]

XI. *Géométrie analytique de l'espace* (pp. 572-588, §§ 98-103). Aperçu vraiment trop sommaire : coordonnées, directions dans l'espace, équation du plan, volume du tétraèdre, quadriques, aire de l'ellipse, volume de l'ellipsoïde. Ici, comme dans la section IX, M. Weber obtient le volume par le principe dit de Cavalieri, que l'on vient de retrouver chez Archimède : *deux corps ont des volumes égaux quand leurs sections par des plans parallèles ont des aires égales*, admis comme postulat. Soit dit en passant, Cavalieri (1591 ou 1598-1647) n'était pas jésuite; il appartenait à l'ordre des *jésuAtes*, qui n'existe plus.

Index (pp. 594-600).

Comme on le voit par l'analyse qui précède, l'Encyclopédie de la géométrie élémentaire de MM. Wellstein, Jacobsthal et Weber manque d'unité; les matières nous en paraissent distribuées dans un ordre singulier, parce que nous sommes convaincu qu'il est impossible d'établir une géométrie projective (nous ne disons pas une énumération qualitative de lettres appelées points) avant une géométrie métrique. Par suite, nous pensons que les étudiants proprement dits, les aspirants au doctorat en sciences mathématiques, ne pourraient pas retirer grand profit de la partie du livre qui est l'œuvre de M. Wellstein, parce que les vues trop particulières que l'auteur y expose ne sont guère accessibles que si l'on connaît au moins les ouvrages de M. Pasch et de M. Hilbert sur les bases de la géométrie. La trigonométrie sphérique de M. Jacobsthal est aussi trop encombrée de formules rarement utiles pour que l'on puisse en conseiller la lecture à ceux qui n'ont pas absolument besoin de ces formules. Au contraire, les professeurs déjà au courant des travaux récents sur la géométrie, s'ils ont la patience d'étudier à fond la partie de l'Encyclopédie due à MM. Wellstein et Jacobsthal, y rencontreront des vues nouvelles, parfois paradoxales sur les principes de la science de l'espace, voire sur la trigonométrie sphérique, qui leur suggéreront peut-être de nouvelles recherches.

Quant aux sections de l'Encyclopédie, qui sont l'œuvre de M. Weber, on peut évidemment les recommander, à des titres divers, aux maîtres et aux étudiants, comme tout ce qui sort de la plume de l'éminent géomètre de Strasbourg.

Imp. Joseph Pellerin, Issoire. Tél. 8050

ld be

BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
RD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
NFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
VERSITY
RARIES
LIBRARIES
STANFOR
UNIVERSIT
NFORD
IVERSITY
RARIES
To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below
SCR-12-50-98455

NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARI
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
IES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STA
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIV
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARI
ORD UNIVERSITY LIBR
SITY LIBRARIES · ST
IES · STANFORD UNI
BRARIES · STANFOR
STANFORD UNIVERS
NIVERSITY LIBRARI

STANFORD UNIVERSITY LIBRARY
Stanford, California

510·5
M429
v.26-27
1906-1907